

Stolz homomorphism と Oricycle homomorphism

和歌山大学 教育 貴志 一男

§1 序

単位円板 D 上の有界正則関数の全体からなる Banach 環 $H^\infty(D)$ の極大イデアル空間を $\bar{D}$ とする. 単位円 C 上の点 1 を原点とする Stolz 角領域 A の $\bar{D}$ における閉包 $\bar{A}$ に対し, $\bar{A} \setminus A$ に属する点を Stolz homomorphism といい, Stolz homomorphisms の全体を S とする. ここでは, S は連結集合であること, $S, \bar{S}$ はそれぞれ Gleason part の和集合であること, その他 $=, \neq$ の性質を述べる.

次に点 1 で単位円 C に接する D 内の二つの円によって囲まれる Oricycle 領域 A に対し, $\bar{A} \setminus A$ に属する点を Oricycle homomorphism といい, Oricycle homomorphisms の全体を O とするとき, S で述べたと同様の性質を O について考察する.

§2 準備

Carlesonの結果から単位円板 D は Banach 環 $H^\infty = H^\infty(D)$ の極大イデアル空間 $\bar{D}$ で稠密である。 D 上連続な関数 f が $\bar{D}$ 上の連続な関数に拡張できるとし、この拡張した関数を $\hat{f}$ で表す。 u を D で上方(または下方)に有界な調和関数とし、 v を u の共役調和関数とすると、 $f = \exp(u+iv)$ (または $f = \exp(-u-iv)$) が H^∞ に属し、 $\hat{u} = \log |\hat{f}|$ (または $\hat{u} = -\log |\hat{f}|$) を用いて、 u を $\bar{D}$ 上の連続関数 $\hat{u}$ に拡張できる。

集合 $A (\subset \bar{D})$ の $\bar{D}$ における閉包を $\bar{A}$ で表す。また $\bar{A} \cap (\bar{D} \setminus D)$ を A' で表す。とくに $D' = \bar{D} \setminus D$ である。関数 $f(z) = z$ に対して $D_\alpha = \{z \in D' : \hat{f}(z) = \alpha\}$ ($|\alpha|=1$) を点 α 上の fiber という。

単位円周 C 上の Lebesgue 測度 db による $L^\infty(db)$ を $L^\infty(C)$ で、 $L^\infty(C)$ の極大イデアル空間を X で表す。 $X \subset D'$ である。 H^∞ の Gelfand 表現 $\hat{H}^\infty$ の X への制限 $\hat{H}^\infty|_X$ が X 上の logmodular 環で、 X は $\hat{H}^\infty|_X$ の Šilov 境界である。 H^∞ と $\hat{H}^\infty|_X$ は同一視することができる。 $X_\alpha = X \cap D_\alpha$ とおく。

関数 $u^* \in L^\infty(C)$ の Poisson 積分

$$u(z) = P_z(u^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^*(e^{i\psi}) P_r(\theta - \psi) d\psi$$

$$z = re^{i\theta}, \quad 0 \leq r < 1, \quad P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

は D 上の有界複素調和関数である。 $u^* \mapsto u^\circ = \hat{u}|_X$ によって定義される写像によって $L^\infty(C)$ と $C(X)$ は Banach 環として(等距離的)同型である。特に C 上の Lebesgue 可測集合 A の特性関

数 $u^* = \chi_A$ に対し, u^s は X 上の開かつ閉な集合 $A^s = \{x \in X :$

$\hat{\chi}_A(x) = 1\}$ の特性関数である. この $u^* = \chi_A$ に対し $u = \mu(\cdot, A)$

すなわち $u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_A(e^{i\psi}) P_r(\theta - \psi) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_A P_r(\theta - \psi) d\psi = \mu(z, A)$

(z における) は A の調和測度である. $u^* \in L^\infty(C)$ に対し

$$u(z) = \int_C u^*(\xi) \mu(z, d\xi), \quad z \in D$$

が成立する.

$u^* \in L^\infty(C)$ とする. 上で述べた (u^*, u, u^s) と $z \in \bar{D}$ に対し, 写像 $u^s \mapsto \hat{u}(z)$ は $C(X)$ 上の線形汎関数で, X 上確率測度 $\nu(z, \cdot)$ によって

$$\hat{u}(z) = \int_X u^s(\xi) \nu(z, d\xi) = \int_X \hat{u}(\xi) \nu(z, d\xi), \quad z \in \bar{D}$$

と表される. 特に上式が $u \in H^\infty$ に対し成立し, $\nu(z, \cdot)$ は H^∞ に対するその表現測度である. X 上の測度空間の $*$ 弱位相によって $\nu(z, \cdot)$ は $z \in \bar{D}$ の連続関数である. 特に A^s が開かつ閉な集合であるときは $\nu(\cdot, A^s)|_D = \mu(\cdot, A)$ が D 上の調和関数で, $\bar{D}$ 上の連続関数 $\nu(\cdot, A^s) = \hat{\mu}(\cdot, A)$ に拡張できる.

$\mathbb{E}_1 = \{E \subset D : E^c \cap C = \{1\}\}$ (ここで E^c は平面上の E の閉包を表す. 以下同様) とおく. また $z, w \in D$ に対し $\chi(z, w) = \left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right|$ とおく. $E \subset D$, $0 < \delta < 1$ に対し

$$E^\delta = \{z \in D : \chi(s, z) < \delta \text{ for some } s \text{ in } E\}$$

とおく. $E \in \mathbb{E}_1$ に対し, $E' (= \bar{E} \setminus D)$ と交わる Carleson part

の全体からなる集合を $\mathcal{P}(E)$ で表す. ときには $\bigcup_{P \in \mathcal{P}(E)} P$ をまた

$\mathcal{P}(E)$ で表す. $z, w \in \bar{D}$ が同じ Gleason part に属するときは $z \sim w$ と表す. $z \in \bar{D}$ を含む Gleason part を $\mathcal{P}(z)$ とかく.

定理 2.1. $E, F \in \mathcal{E}_1$ とする. このとき $\mathcal{P}(E) \supset \mathcal{P}(F)$ であるための必要十分条件はある δ ($0 < \delta < 1$) が存在して $E^\delta \supset F$ となることである. (Rosenfeld-Weiss [4], Theorem 3.2.)

§3 Stolz homomorphism

定義. $S_\alpha = \bigcup \{A' : A \text{ は } \alpha \in \mathbb{C} \text{ を頂点とする Stolz 角領域 } (\subset D_\alpha) \text{ に属する点}\}$ を点 α における Stolz homomorphism という.

以下 $S = S_1$ のみを取り扱う.

D の有界調和関数である $u(z) = \arg(1-z)$ ($-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2}$) に対して

$$(3.1) \quad S = \{z \in D_1 : -\frac{\pi}{2} < \hat{u}(z) < \frac{\pi}{2}\}, \quad \{\hat{u}(z) : z \in S\} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

が成立する.

$M = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ とおき, $z \in D$ における M の調和測度を $\mu(z, M)$ で表す. $z_0 \in D$ に対して

$$\Gamma = \{z \in D : \mu(z, M) = \mu(z_0, M)\}$$

とおくと, Γ は三点 $-1, z_0, 1$ を通る円と D の共通部分である.

そして $z \in \Gamma$ に対して $\mu(z, M) = \frac{\delta}{\pi}$ ($\delta \in (0, 1)$) である. ただし

δ は Γ と弧 $C \setminus M$ のなす角である. $z \in \Gamma'$ とすると, z に収束するネット $\{z_\alpha\} (\subset \Gamma)$ が存在して, $\mu(z_\alpha, M) \rightarrow \nu(z, M_1^s)$

(ただし $M_1^S = M^S \cap X_1$). よって $\nu(z, M_1^S) = \frac{\delta}{\pi}$ である. これから $S \subseteq \{z \in D_1 : 0 < \nu(z, M_1^S) < 1\}$ を得る. $\supseteq$ も容易にわかり

$$(3.2) \quad S = \{z \in D_1 : 0 < \nu(z, M_1^S) < 1\}, \quad \{\nu(z, M_1^S) : z \in S\} = (0, 1)$$

が成立する.

(3.2) から次のことがわかる.

$$(3.3) \quad D_1 \setminus S = H^\infty\text{-hull}(M_1^S) \cup H^\infty\text{-hull}(X_1 \setminus M_1^S)$$

$$H^\infty\text{-hull}(M_1^S) \cap H^\infty\text{-hull}(X_1 \setminus M_1^S) = \emptyset.$$

補題 3.1. $u(z) = \arg(1-z)$ ($-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2}$) とする.

$\Gamma = \{z \in D : \operatorname{Re} z \geq 0, u(z) = \alpha\}$ ($-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$) ならば Γ' は連結集合である.

証明. $\Gamma_r = \Gamma \cap \{z \in D : |z-1| < r\}$ ($0 < r < 1$) とおくと

$$\Gamma' = \bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}$$

となる. $\supseteq$ となること. $\varphi \in \Gamma'$ に対し, φ に収束するネット $\{\varphi_\alpha\} \subset \Gamma$ が存在する. このとき $\varphi_\alpha(z) \rightarrow \varphi(z) = 1$ であるから, 任意の $r > 0$ に対し, ある α_0 があって, $\alpha \geq \alpha_0$ のとき $|\varphi_\alpha(z) - 1| < r$. ゆえに $\varphi_\alpha \in \Gamma_r$, ゆえに $\varphi \in \overline{\Gamma_r}$. ゆえに $\Gamma' \subseteq \bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}$. 逆は $\supseteq$ となること. 明らかに, $(\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}) \cap D = \emptyset$, ゆえに $\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r} \subset D'$, ゆえに $(\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}) \cap \overline{D} \subset D' \cap \overline{D}$ から $\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r} \subseteq \Gamma'$.

いま Γ' が不連結集合であるとする, $\Gamma' = A_1 \cup A_2$, $A_1 \neq \emptyset$,

$A_2 \neq \emptyset$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, A_1, A_2 はコンパクト集合となる。
 このとき $U(\Gamma') = U(A_1) \cup U(A_2)$, $\overline{U(A_1)} \cap \overline{U(A_2)} = \emptyset$
 となるものがある。ただし $U(\Gamma')$, $U(A_1)$, $U(A_2)$ はそれぞれ Γ' , A_1 , A_2 の $\bar{D}$ 近傍である。このとき, ある Γ_0 が存在して,
 $\Gamma' \subset \overline{\Gamma_0} \subset U(\Gamma')$ となり, $\overline{\Gamma_0}$ は不連結集合となり, 矛盾である。
 (証明終)

定理 3.2. (i) S は D' の開集合である。

(ii) S は連結集合である。

証明. ^{(i)の証明.} (3.2) 式から $S = \{z \in D_1 : 0 < \nu(z, M_1^s) < 1\}$ であるから
 S は D_1 の相対開集合である。また関数 $f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ を
 考えれば, $D' \setminus D_1$ 上で $|\hat{f}(z)| = 1$ であるから, $\overline{D' \setminus D_1}$ 上で $|\hat{f}(z)| = 1$ 。
 一方 S 上で $f(z) = 0$ であるから $\overline{S}$ 上で $\hat{f}(z) = 0$ 。よって

$$S \subset D' \setminus \overline{(D' \setminus D_1)} \subset D_1$$

ゆえに S は D' の開集合である。

(ii)の証明. $u(z) = \arg(1-z)$ ($-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2}$) とする。

$\Gamma = [0, 1)$ とおくとき, $z_0 \in \Gamma'$ に対して

$$S = \bigcup_{w \in p(z_0)} T_w'$$

が成立する。ただし T_w は, $\hat{u}(w) = \alpha$ とするとき, $T_w = \{z \in D : \operatorname{Re} z \geq 0, u(z) = \alpha\}$ を満たす集合である。

なぜならば z が S に属するならば $\hat{u}(z) = \beta$ ($-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$)。

そこで $T_\beta = \{z \in D : \operatorname{Re} z \geq 0, u(z) = \beta\}$ とするとき, ある β が存

在して, $[0, 1)^\delta \supset \Gamma_1$, $\Gamma_1^\delta \supset [0, 1)$ であるから, 定理 2.1 から $\rho(\Gamma_1) = \rho([0, 1))$. ゆえに $\Gamma_1' \cap P(z_0) \neq \emptyset$. ゆえに $S \subseteq \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$. また $S \supseteq \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$ は明らかであるから, $S = \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$ である.

$P(z_0)$ は連結集合であり (Wermer の埋め込み定理), 補題 3.1 から Γ_w' は連結集合であるから, S は連結集合である.

(証明終)

定理 3.3. D 中での D_1 の位相境界 $D_1 \cap \overline{(D \setminus D_1)}$ を C_B とすると, C_B は Gleason part の和集合である. (Weiss [6], p. 96).

$z \in D_1 \setminus C_B$ とすると, D 中のある可算集合 E で, $E^d \cap C = \{z\}$ (すなわち $E \in \mathcal{E}_1$) で, $z \in \overline{E}$ を満たすものが存在する. (Weiss [6], p. 96)

$C_B \supset X_1$ である.

定理 3.4. D 上の調和関数 u が

$$u(z) = u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \varphi) d\mu(\varphi)$$

と表されてい^(3.4.1)て, $a = \inf_D u > -\infty$, $\mu(\{z\}) = 0$ を仮定する,

さらに $B \in \mathcal{E}^1$ に対して $\lim_{\substack{z \in B \\ z \rightarrow 1}} u(z) = a$ と仮定する.

このとき, $A = \{z \in D_1 : \hat{u}(z) > a\}^-$ に対して D 上の非常調和関数 $\hat{u}$ で,

$$\hat{u}(B) = 0, \quad \hat{u}(A) = +\infty$$

を満たすものが存在する。(Doob [1], p. 193)

注意. u が D で有界調和関数ならば, (円周上の Lebesgue 測度にかんして)ほとんどすべての θ について $u^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta})$ が存在して, $u^* \in L^\infty(T)$ から $u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \varphi) u^*(e^{i\varphi}) d\varphi$ である (Fatou の定理). よって $d\mu = u^* dz / 2\pi$ に対して $\mu(\{1\}) = 0$ である.

定理 3.5. (i) $z_0 \in S$ に対して $P(z_0) \subset S$ である.

(ii) $z_0 \in S$ とする. D 上の調和関数 $u(z) = \arg(1-z)$ ($-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2}$) に対し $\{\hat{u}(z): z \in P(z_0)\} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である. また $z \in P(z_0)$ の表現測度 $\nu(z, \cdot)$ については $\{\nu(z, M_1^S); z \in P(z_0)\} = (0, 1)$ である. ただし, $M = \{e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq \pi\}$ で $M_1^S = \{x \in X: \hat{\chi}_A(x) = 1\} \cap D_1$ である.

(iii) $z_0 \in \overline{S}$ に対して $P(z_0) \subset \overline{S}$ である.

証明. (i) の証明. $w \in D_1 \setminus S$ ならば $\nu(w, M_1^S) = 1$ または $\nu(w, X_1 \setminus M_1^S) = 1$ である. $\nu(w, M_1^S) = 1$ ならば $\nu(w, X_1 \setminus M_1^S) = 0$ である. 一方 (3.2) 式から, $z \in S$ に対して $\nu(z, X_1 \setminus M_1^S) > 0$. よって $\nu(z, \cdot)$ は $\nu(w, \cdot)$ に関して絶対連続にならない. したがって z と w は同じ Gleason part に属さない. $\nu(w, X_1 \setminus M_1^S) = 1$ としても同様の結論を得る.

(ii) の証明. $P(z_0) \subset S$ であることと (3.1) 式から

$$\{\hat{u}(z): z \in P(z_0)\} \subseteq (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

を得る。いま $\hat{u}(z_0) = \alpha_0$ とし, $\Gamma_0 = \{z \in D : \operatorname{Re} z \geq 0, u(z) = \alpha_0\}$ とすると $\Gamma_0' \ni z_0$ である。任意の $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に対して $\Gamma = \{z \in D : \operatorname{Re} z \geq 0, u(z) = \alpha\}$ とおく。このときある δ ($0 < \delta < 1$) が存在して $\Gamma_0^\delta \supset \Gamma$ かつ $\Gamma^\delta \supset \Gamma_0$ である。ゆえに定理 2.1 から $\rho(\Gamma) = \rho(\Gamma_0)$ 。ゆえに $\Gamma' \cap P(z_0) \neq \emptyset$ 。このとき $w \in \Gamma' \cap P(z_0)$ に対して $\hat{u}(w) = \alpha$ 。ゆえに $\{\hat{u}(z) : z \in P(z_0)\} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である。

$\{v(z, M_1^0) : z \in P(z_0)\} = (0, 1)$ なることも同様に証明できる。

(iii) の証明. $\bar{S} \cap C_B = \emptyset$ であるから (定理 3.2 の (i) の証明参照), 定理 3.3 を用いて, 任意の $z \in \bar{S}$ と任意の $w \in C_B$ は同じ Gleason part に属さない, ゆえに任意の $z \in \bar{S}$ と任意の $w \in D_1 \setminus (\bar{S} \cup C_B)$ が同じ Gleason part に属さないことを示せばよい。

$u(z) = \arg(1-z)$ ($-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2}$) は D で有界調和関数である。 $A = \{z \in D_1 : -\frac{\pi}{4} < \hat{u}(z)\}^-$ とおき $D_1 \setminus (A \cup C_B)$ に属する一点 z_1 をとる。

$z_1 \notin C_B$ よりある(可算)集合で $E^c \cap C = \{1\}$, $\bar{E} \ni z_1$ を満たすものがある。よって z_1 に収束するあるネット $\{z_\alpha\} (CE)$ が存在する。いま z_1 のある $\bar{D}$ 近傍 $V(z_1)$ で $V(z_1) \cap (A \cup C_B) = \emptyset$ を満たすものをとると, ある定数 α_0 があって $\alpha \geq \alpha_0$ ならば $z_\alpha \in V(z_1)$ 。 $B = \{z_\alpha : \alpha \geq \alpha_0\} (C D)$ に対し $B^c \cap C = \{1\}$

で, $\lim_{\substack{z \in B \\ z \rightarrow 1}} u(z) = -\frac{\pi}{2}$ である.

このとき D 上の非常調和関数 v で

$$\hat{v}(B') = 0, \quad \hat{v}(A) = +\infty$$

を満たすものが存在する (定理 3.4). v_1 を v の共役調和関数

とし, $f = \exp(-v - i v_1)$ とおくと, $f \in H^\infty(D)$, $\|f\| \leq 1$,

$$\hat{f}|_1 = \exp(-\hat{v}) = \begin{cases} 1 & (z = z_0) \\ 0 & (z \in A) \end{cases}$$

ゆえに, z_1 と任意の $z \in A$ は同じ Gleason part に属さない.

u の代わりに $u_1 = -u$ を用いることにより, 上と同様に

$$A_1 = \{z \in D_1 : \hat{u}_1(z) > -\frac{\pi}{2}\} \text{ とおくと, 任意の } z_1 \in D_1 \setminus (A_1 \cup C_B)$$

と任意の $z \in A_1$ は同じ Gleason part に属さない,

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \{z \in D_1 : -\frac{\pi}{2} < \hat{u}(z) < \frac{\pi}{2}\} \\ &= \{z \in D_1 : -\frac{\pi}{2} < \hat{u}(z)\} \cap \{z \in D_1 : \hat{u}(z) < \frac{\pi}{2}\} \\ &= A \cap A_1 \end{aligned}$$

$z_1 \in D_1 \setminus (\bar{S} \cup C_B)$ ならば $z_1 \in D_1 \setminus (A \cup C_B)$ または $z_1 \in D_1 \setminus (A_1 \cup C_B)$ であ

る. $z_1 \in D_1 \setminus (A \cup C_B)$ ならば任意の $z \in A$ に対して $z_1 \not\sim z$. おって

任意の $z \in A \cap A_1$ に対し $z_1 \not\sim z$. $z_1 \in D_1 \setminus (A_1 \cup C_B)$ としたと同様に

任意の $z \in A \cap A_1$ に対して $z_1 \not\sim z$. (証明終)

§4 Oricycle homomorphism

点 1 で単位円 C に接する D 内の円を点 1 における Oricycle

という。また点 1 における二つの Oricycle に囲まれる領域を点 1 における Oricycle 領域という。点 1 における一つの Oricycle Γ に対して $\{z \in \Gamma : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $\{z \in \Gamma : \operatorname{Im} z \leq 0\}$ をそれぞれ Γ の upper oricycle, lower oricycle という。点 1 における upper oricycle 領域, lower oricycle 領域も同様に定義する。

定義. $O = \bigcup \{A' : A \text{ は点 1 における Oricycle 領域}\}$ に属する点を Oricycle homomorphism という。また, $O^+ = \bigcup \{A' : A \text{ は点 1 における upper oricycle 領域}\}$ に属する点を upper Oricycle homomorphism という。 $O^- = \bigcup \{A' : A \text{ は点 1 における lower oricycle 領域}\}$ に属する点を lower Oricycle homomorphism という。

$O^+ \subset H^\infty\text{-hull } M_1^S$, $O^- \subset H^\infty\text{-hull } (X_1 \setminus M_1^S)$ である。ただし $M = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$, $M_1^S = \{x \in X : \hat{x}_M(x) = 1\}$ である。(3.3) 式参照) $O = O^+ \cup O^-$, $\overline{O^+} \cap \overline{O^-} = \emptyset$ であるから O は不連結である。

定理 4.1. (i) O^+ , O^- はそれぞれ D' の開集合である。

(ii) O^+ , O^- はそれぞれ連結集合である。

証明. (i) の証明. $f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ を考えると, $D' \setminus D_1$ 上では $|\hat{f}(z)| = 1$ で, $O = \{z \in D_1 : 0 < |\hat{f}(z)| < 1\}$ であるから $O = \{z \in D' : 0 < |\hat{f}(z)| < 1\}$ となり O が D' で開集合である。ゆえに O^+ ,

$\bar{O}$ は D' の閉集合である。

(ii) $z_0 \in O^+$ を一つ固定する。このとき、ある upper
 Oricycle Γ_0 が存在して $\Gamma_0' \ni z_0$ である。 $w \in P(z_0)$ に対して
 upper Oricycle Γ_w を次のように定義する。

$$\Gamma_w = \{z \in D; \operatorname{Im} z \geq 0, |f(z)| = c\}, \text{ ただし } c = |\hat{f}(w)|$$

(この Γ_w は中心 $(\frac{k}{k-1}, 0)$, 半径 $\frac{1}{1-k}$ (ただし $\log c = k$) の
 upper Oricycle である) このとき

$$O^+ = \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$$

である。なぜならば $z \in O^+$ ならば $|\hat{f}(z)| = l$ ($0 < l < 1$)。

$\Gamma = \{z \in D; \operatorname{Im} z \geq 0, |f(z)| = l\}$ とおく。このときある δ が存在して
 $\Gamma_0^\delta \supset \Gamma$ であって $\Gamma^\delta \supset \Gamma_0$ であるから、定理 2.1 から $P(\Gamma)$

$= P(\Gamma_0)$ 。ゆえに $\Gamma' \cap P(z_0) \neq \emptyset$ 。よってある $w \in P(z_0)$

に対して $\Gamma = \Gamma_w$ 。ゆえに $O^+ \subseteq \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$ 。 $O^+ \supseteq \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$

は明らかであるから、 $O^+ = \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$ 。

補題 3.1 と同様に証明により Γ_w' は連結集合であることが
 わかり、これと $P(z_0)$ の連結性から O^+ の連結性を得る。

(証明終)

定理 4.2. (i) $z_0 \in O^+$ に対して $P(z_0) \subset O^+$ である。

(ii) $z_0 \in O^+$ とする。関数 $f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ に対して、
 $\{|\hat{f}(z)|; z \in P(z_0)\} = (0, 1)$ である。

$\bar{O}$ に対しても同様なことが成立する。

証明, (i)の証明. 是す $z_0 \in O$ ならば $P(z_0) \subset O$ となることを示す. このためには任意の $w \in D_1 \setminus O$ と z_0 が同じ Gleason 部分に属さないことを示せばよい.

$f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ に対して $O = \{z \in D_1; 0 < |\hat{f}(z)| < 1\}$ であるから, $|\hat{f}(w)| = 1$ または $\hat{f}(w) = 0$ である.

(a) $|\hat{f}(w)| = 1$ のとき, $F = \frac{f - \hat{f}(z_0)}{1 - \overline{\hat{f}(z_0)}f}$ とおくと, F は $H^\infty(D)$ に属する inner function である. $\hat{F}(z_0) = 0$, $|\hat{F}(w)| = 1$ であるから

$$\begin{aligned} \sigma(z_0, w) &= \sup \{ |\hat{f}(w)|; f \in H^\infty(D), \|f\| \leq 1, \hat{f}(z_0) = 0 \} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって z_0 と w が同じ Gleason 部分に属さない.

(b) $\hat{f}(w) = 0$ のとき. D で $f \neq 0$ であるから Royden の補題 (Hoffman [2], Lemma 2.2) より, $P(w)$ 上で $\hat{f} = 0$. 他方 $0 < |\hat{f}(z_0)| < 1$. ゆえに $z_0 \notin P(w)$.

以上から $P(z_0) \subset O$ となることがわかった. 次に $z_0 \in O^+$ ならば $P(z_0) \subset O^+$ となること, これは $O = O^+ \cup O^-$, $\overline{O^+} \cap \overline{O^-} = \emptyset$ と $P(z_0)$ の連結性から従う.

(ii)の証明. $z_0 \in O^+$ ならば $P(z_0) \subset O^+$ で, $\{|\hat{f}(z)|; z \in O\} = (0, 1)$ なることから $\{|\hat{f}(z)|; z \in P(z_0)\} \subseteq (0, 1)$ である.

ある upper orbit Γ_0 が存在して $\Gamma_0' \ni z_0$ である. 任意の $c \in (0, 1)$ に対して $\Gamma_c = \{z \in D; \operatorname{Im} z \geq 0, |\hat{f}(z)| = c\}$ とお

$\delta < 1$, Γ_1 は upper arcycle である. このとき ある δ ($0 < \delta < 1$) が存在して $\Gamma^\delta \supset \Gamma_1$, $\Gamma_1^\delta \supset \Gamma$ である. ゆえに定理 2.1 から $\rho(\Gamma) = \rho(\Gamma_1)$. ゆえに $\Gamma_1' \cap \rho(z_0) \neq \emptyset$. ゆえに ある $z \in \rho(z_0)$ に対して $|\hat{f}(z)| = c$. これから $\{|\hat{f}(z)| : z \in \rho(z_0)\} = (0, 1)$ である. (証明終)

文 献

- [1] J. L. Dool, Boundary approach filters for analytic function. Ann. Inst. Fourier, 23 (1973), 187-217.
- [2] K. Hoffman, Bounded analytic functions and Gleason parts, Ann. Math. 86 (1967), 74-111.
- [3] A. Kerr-Lawson, A filter description of the homomorphisms of H^∞ , Canad. J. Math., 17 (1965), 734-757.
- [4] M. Rosenfeld and M. L. Weiss, Bounded analytic functions tending radially to zero, Proc. London Math. Soc., 18 (1968), 714-726.
- [5] —————, A function algebra approach to a theorem of Lindelöf, J. London Math. Soc., 2 (1970), 209-215.
- [6] M. L. Weiss, Some separation properties in sup-norm algebras of continuous functions, 93-97, in Function algebras, Scott, Foresman, 1966.