

気泡流中での包絡ソリトンの存在性検証へ向けた NLS 方程式の数値的検討

東京大学大学院工学系研究科 金川 哲也 (KANAGAWA Tetsuya)
Department of Mechanical Engineering, The University of Tokyo
旭川工業高等専門学校 江頭 竜 (EGASHIRA Ryu)
Asahikawa National College of Technology

概要

マイクロオーダの気泡を一様に含む液体中の圧力変動に対する、非線形 Schrödinger (NLS) 方程式の高波数領域においては、群速度の波数導関数が極めて小さいがゆえに [Kanagawa et al., *J. Fluid Sci. Technol.*, **5**, 351 (2010)], 包絡ソリトン解などの周知の厳密解が存在しない可能性がある。ここでは、NLS 方程式の数値解析を行い、波の諸性質の大きさに注意しながら、気泡流中でどのような包絡波形が存在しうるか検討する。

1 はじめに：気泡流中の弱非線形波動方程式

多数の球形微細気泡を一様に含む圧縮性液体 (気泡流) 中における、有限小振幅の 1 次元 (平面) 進行波を扱う (弱非線形問題)。初期に、媒質は静止状態にあり、気泡径・気泡数密度を含む全ての物理量 (従属変数) が一様であるとする。気泡内気体の粘性、気体と液体の熱伝導性、気液界面を通しての相変化およびエネルギー輸送などは考慮しない。基礎方程式系には、著者らのグループ [1, 2] が提示した気泡流の平均化方程式系 (二流体モデルに基づく気相と液相に対する質量および運動量の保存則、気泡壁の運動方程式、状態方程式など) を用いる。多重尺度法 [3] を用いた漸近解析を行うと、基礎方程式系から、図 1 に示すように、2 種類の異なる周波数帯それぞれを記述する非線形波動方程式群が導かれる [4] :

1. 低周波数・低波数に対する Korteweg–de Vries–Burgers (KdVB) 方程式:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \Pi_1 f \frac{\partial f}{\partial \xi} + \Pi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \Pi_3 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} = 0 \quad (1)$$

2. 高周波数・高波数の搬送波の包絡線に対する非線形 Schrödinger (NLS) 方程式:

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \nu_3 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \nu_1 |A|^2 A + i \nu_2 A = 0 \quad (2)$$

ここに、両方程式において、独立変数 τ は時間、 ξ は空間座標 (移動座標系); 従属変数 f は液相圧力の 1 次の摂動、 A は気泡半径の摂動の複素振幅; 係数 Π_i および ν_i は非線形係数 ($i = 1$), 散逸係数 ($i = 2$), 分散係数 ($i = 3$) である。諸係数は、初期ボイド率や初期気泡

径などから構成され、煩雑な形ゆえに本稿では省略する(陽な表式は既報 [4] を参照されたい). NLS 方程式 (2) の非線形係数 $\nu_1 (< 0)$ および散逸係数 $\nu_2 (> 0)$ は, 初期ボイド率 α_0 如何によらず, 高波数極限 $k \rightarrow \infty$ で有限値をとる(既報 [4] の図 4(a)(b) を参照されたい).

本稿では, 後に重要となる, NLS 方程式 (2) の分散係数 $\nu_3 (< 0)$ の表式 [4] のみ示す:

$$\nu_3(k) = \frac{d^2\Omega}{dk^2} = -\frac{9\alpha_0\Delta^2\Omega(k)}{(3\alpha_0 + \Delta^2k^2)^2} \quad (3)$$

ここに, α_0 は初期ボイド率(気相の体積分率), $k(\Omega)$ は波数($\Omega \equiv \omega^*/\omega_B^* = O(1)$ は無次元周波数; ω は周波数, ω_B^* は気泡の固有振動数), $\Delta \equiv R_0^*/L^* = O(1)$ は長さの無次元数である(R_0^* は初期気泡半径, L^* は代表的な波長).

式 (3) を眺めれば, 短波 $k \rightarrow \infty$ の極限において, 分散係数 $\nu_3 \rightarrow 0$ なる収束がわかるだろう. それでいて, NLS 方程式の導出の大前提としての, 気泡径と波長が同じスケールであるという, 短波の制約 $R_0^* \simeq L^*$ をも満たさねばならない [4]. したがって, (i) 分散係数は, 包絡波の変調を招くほどに, 波に強い分散性を持ち込む値を取らねばならず, その一方で, (ii) 波数は大きくなければならない. この両立が要求されるのである.

KdVB 方程式(弱分散)も NLS 方程式(強分散)も, 気泡流中の音響波に限らず, 弱非線形波動論 [3, 5] で周知である. 著者らの両方程式の導出 [4] は, 設けた仮定のもとに, 首尾一貫していることを強調しておく. しかしながら, 解そして実現象はどうだろうか:

1. KdVB 方程式: 後述するように, 広範のレンジで数値解が存在. 実験的報告が, 古くより多数存在する [6].
2. NLS 方程式: 観測結果は皆無. 著者らの二流体モデル [4] に基づく係数 [式 (3)] のみならず, 混合体モデルから導かれる NLS 方程式の分散係数 [7] においても, 式 (3) と同様に, 分散係数が高波数でゼロに漸近する. 数値解が存在するレンジが極めて狭いことが想定される(後述).

“気泡流中の有限振幅音響波において, NLS 方程式の解(厳密解・数値解)は存在するか. NLS 方程式から導かれる波形は適切か. どのように時空間発展するか. 実現象として存在しうるか.”

本稿の目的は, これらの疑問を解消すべく, 数値的回答を与えることにある.

2 厳密解

数値解に進む前に, 厳密解に対する簡単なレビューを与えておこう. KdV, KdVB, NLS の方程式群はいずれも, 分散性非線形波動の分野で著名な発展方程式であり, ソリトン解を代表とする様々な厳密解・解析解が精力的に調べられている [5].

散逸項を無視すると, KdV 方程式に対するソリトン解, NLS 方程式に対する包絡ソリトン解が, とともに sech 関数の形で描ける. 講演では, 波形のボイド率依存性について踏み込んだが, その詳細は既報 [4] の図 3 および図 5 を参照されたい.

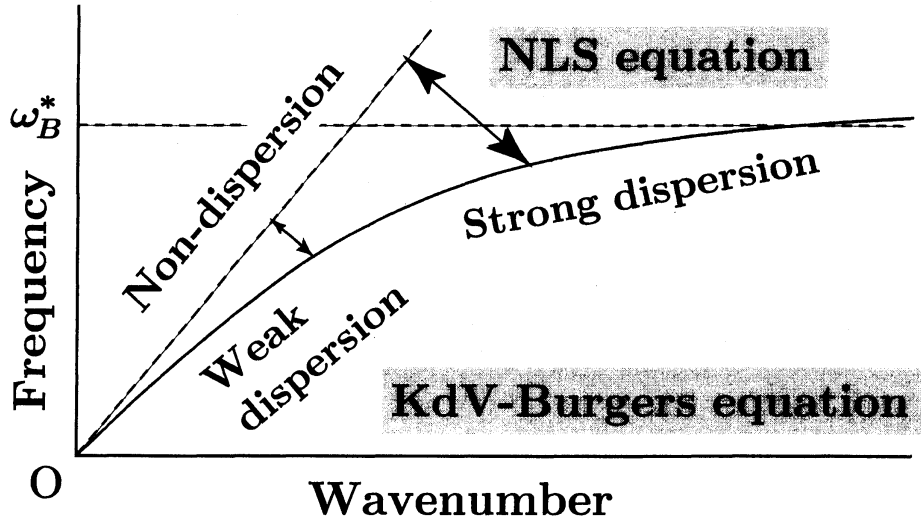


Fig. 1: Weakly nonlinear waves in the low- and high- frequency bands are governed by the KdVB and NLS equations, respectively. Here ω_B^* denotes the eigenfrequency of a single bubble.

3 数値解

KdVB 方程式と NLS 方程式に対する有限差分法を計算する.

3.1 KdVB 方程式

数値解の計算は、以下の手順にしたがう：

1. Zabusky & Kruskal (1965) にならい、時間および空間導関数の双方に中心差分を用いる (CTCS): (i) 時間発展にはかえる跳び法を、(ii) 散逸項および分散項には 2 次精度中心差分を、(iii) 非線形項には

$$f \frac{\partial f}{\partial \xi} \approx \left(\frac{f_{i+1} + f_i + f_{i-1}}{3} \right) \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta\xi} \right) \quad (4)$$

なる差分を採用する.

2. 周期境界条件を用いる.
3. 初期条件には、矩形パースト波を与える [図 2(a) 参照].

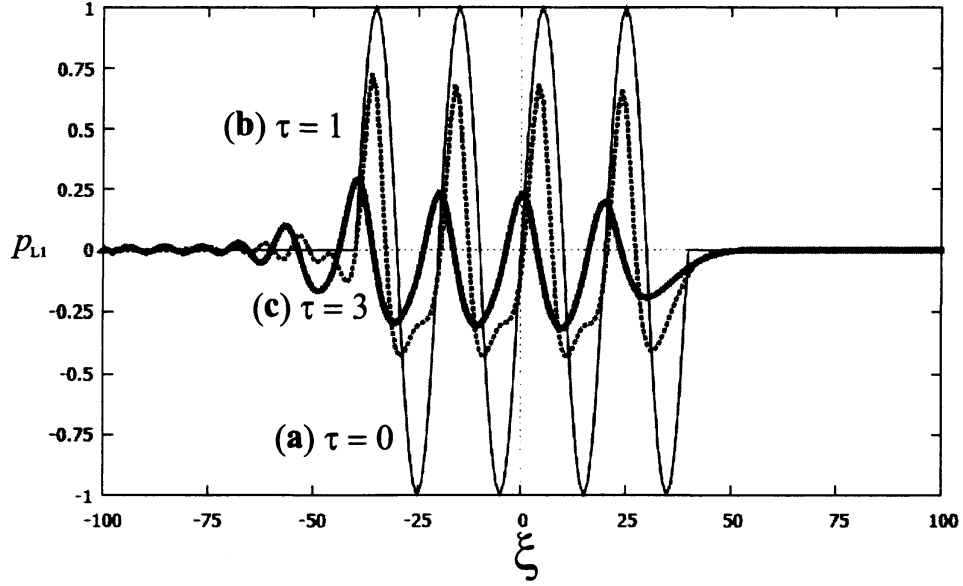


Fig. 2: Waveform of pressure perturbation f in the KdVB equation (1) for the case of initial void fraction $\alpha_0 = 0.01$, initial bubble radius $R_0^* = 10\mu\text{m}$, frequency $\Omega = 1$, nondimensional amplitude $\sqrt{\epsilon} = 0.15$, and ambient conditions of air–water system; $0 \leq \tau \leq 3$; and $|\xi| \leq 10$. Initial condition is burst waveform [see (a)] and periodic boundary condition are installed.

3.2 NLS 方程式

複素振幅を $A = g \exp(ih)$ と実振幅 g および 実位相 h に分割ののちに, NLS 方程式 (2) に代入すると, 実変数 g と h に対する 2 階の非線形偏微分方程式系をうる:

$$g \frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\nu_3}{2} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} - g \left(\frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^2 \right] + \nu_1 g^3 \quad (5)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = -\frac{\nu_3}{2} \left[g \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + 2 \left(\frac{\partial g}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial \xi} \right) \right] - \nu_2 g \quad (6)$$

以下の方針にしたがって, 有限差分解を描く:

1. 2 次精度中心差分を用いる;
2. 初期条件は, $g = 1 + \exp(-\xi^2)$, および, $h = 0$ を与える;
3. 周期境界条件を与える.

図 3 に示す実振幅を眺めると, 以下のことに気づく: (i) 波の分散が見て取れない; さらに, 計算結果から以下の事項が判明済である: (ii) 波形の気泡径 R_0^* 依存性は極めて小さい; (iii) 波数 k を大きくすると, あるいはボイド率を α_0 を大きくすると, 発散に至る.

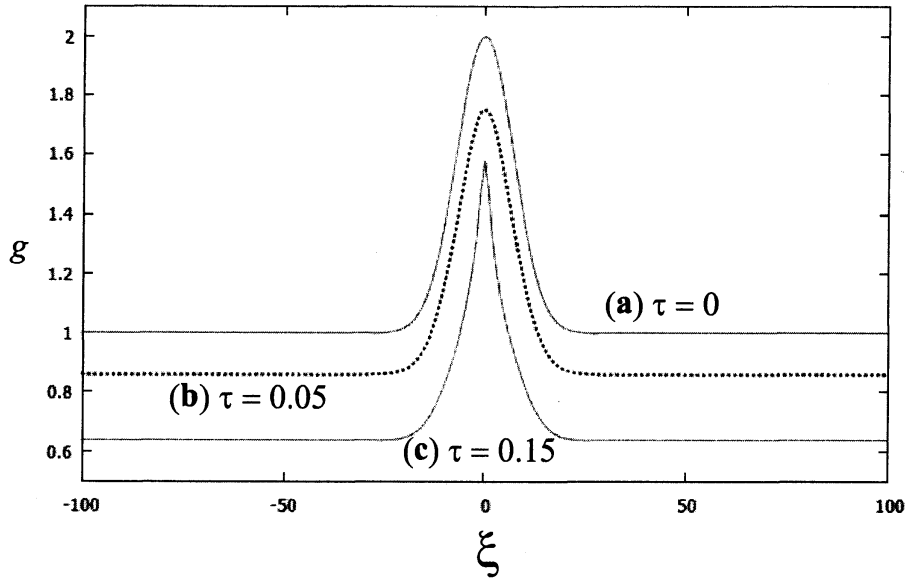


Fig. 3: Waveform of real amplitude of bubble radius g in the NLS equation (2) for the case of $\alpha_0 = 0.05$, $\epsilon = 0.07$, wavenumber $k = 1$, and other quantities are the same as those used in Fig. 2; $0 \leq \tau \leq 0.15$; and $|\xi| \leq 10$. Initial condition is $g = 1 + \exp(-\xi^2)$ (with $h = 0$) [see (a)] and periodic boundary condition are installed.

4 考察・まとめ・今後の展望

マイクロオーダの多数の気泡を一様に含む液体中における音響波の弱非線形伝播を記述する, KdVB 方程式および NLS 方程式の有限差分法の数値計算を行った。

本研究の動機の再掲からはじめて, 数値解に対する考察を, 今後の展望も含め, 列挙する:

1. KdVB 方程式においては, 広範の領域で数値解が存在する。
2. NLS 方程式においては, 数値解, ひいては, NLS 方程式の解としての波形が実現象として存在しうる領域とは, 極めて狭いレンジではないかと予想される。
3. KdVB と NLS の両方程式ともに, その導出 (係数決定を含む) 自体 [4] は, 設定した仮定のもとで, 首尾一貫して遂行されていることを改めて注意しておく。
4. 気泡流の別の基礎方程式系 (混合体モデル [8, 9]) から, 同一のスケーリングのもとで NLS 方程式を導出したが [7], やはり, 高波数領域において分散係数はゼロに漸近した。それゆえ, 気泡流のモデルに問題があるというよりも, むしろ, 気泡流という分散性媒質自体が, NLS 方程式に従う音響波を伝播させないのではないかという懐疑を拭えない。

5. NLS 方程式の導出の前提である $O(R_0^*) = O(L^*)$ とは, 定量的には, どの程度まで許されるか.
6. そもそも, 式 (3) が示すように, 明らかに小さな分散係数で数値解を描いても, 包絡ソリトン波形になりえないのは (これを形成しうる分散性が持ち込まれないのは), 当然の帰結といえる.
7. いっぽうで, 計算力学的立場からの改善も重要である. 有限差分法のみならず, スペクトル法などの適用も試みる.
8. 図 1 において, KdVB 方程式がよく記述する波数領域は相当に広く, いっぽう, NLS 方程式のそれは相当に狭いのではないか.
9. 実験的研究においては, (i) KdVB 方程式は, 古くより多数の観測例 [6] がある; (ii) NLS 方程式は著者の知る限り皆無である. NLS 方程式に関する非実験的研究も, 著者ら以外には, Akhatov らのグループのみ [9] 以外に見受けられない.

上述の事項おのおのの到達度からわかるように, 本報は, “気泡流中における有限小振幅音響波に対する NLS 方程式の解は実現象として存在するか” なる疑問に対する, 入口に迫った程度にすぎない. 回答を示すべく, 今後, 理論的・数值的・実験的立場から, 網羅的かつ厳密な検討を展開する予定である.

謝辞

科学研究費補助金 (特別研究費奨励費: 24・5892) の援助を受けた.

参考文献

- [1] R. Egashira, T. Yano and S. Fujikawa, “Linear wave propagation of fast and slow modes in mixtures of liquid and gas bubbles,” *Fluid Dyn. Res.*, **34** (2004), 317.
- [2] T. Yano, R. Egashira and S. Fujikawa, “Linear analysis of dispersive waves in bubbly flows based on averaged equations,” *J. Phys. Soc. Jpn.*, **75** (2006), 104401.
- [3] A. Jeffrey and T. Kawahara, *Asymptotic methods in nonlinear wave theory* (Pitman, London, 1982).
- [4] T. Kanagawa, T. Yano, M. Watanabe and S. Fujikawa, “Unified theory based on parameter scaling for derivation of nonlinear wave equations in bubbly liquids,” *J. Fluid Sci. Technol.*, **5** (2010), 351.
- [5] G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves* (Wiley, New York, 1974).

- [6] V. V. Kuznetsov, V. E. Nakoryakov, B. G. Pokusaev and I. R. Shreiber, "Propagation of perturbations in a gas-liquid mixture," *J. Fluid Mech.*, **85** (1978), 85.
- [7] T. Kanagawa, M. Watanabe, T. Yano and S. Fujikawa, "Nonlinear wave equations for pressure wave propagation in liquids containing gas bubbles (comparison between two-fluid model and mixture model)," *J. Fluid Sci. Technol.*, **6** (2011), 838.
- [8] R. I. Nigmatulin, *Dynamics of multiphase media*, Vols. 1 and 2 (Hemisphere, New York, 1991).
- [9] D. B. Khismatullin and I. S. Akhatov, "Sound-ultrasound interaction in bubbly fluids: theory and possible applications," *Phys. Fluids*, **13** (2001), 3582.