

ある完備な多値論理系について

藤田 米春 北橋忠宏 田中幸吉

大阪大学基礎工学部 電気工学科

まえがき 多値論理体系は、J. Lukasiewicz と E. Post などにより、例が与えられている。たとえば、Post の m 値論理体系では、真理値に、 $1, 2, \dots, m$ を対応させ、それに、大小関係 $1 < 2 < \dots < m$ を考える。そして、関数 $\min(x, y)$ と、

$$N(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq m \\ 1 & x = m \end{cases}$$
 により、この m 値論理体系が関数的に完全である事を示している。このように、真理値に順序づけを行って、 $\min(x, y)$ なる関数を持ちこむのは、 $\min(x, y)$ なる関数の論理的解釈がやりやすい事および、2 値のブール代数との対応からであろう。しかしながら、これらの関数を基本演算に、選らんだ場合、数値演算（たとえば、加法）の表現が複雑になる事が予想される。そこで、2 値の場合の法 2 の加算 $x_1 \oplus x_2$ に対応して、法 m の加算を、考え、これを定数および、置換により、関数的に完全な m 値論理系がでる事を示し、又その標準形を作った。

次に、良く知られている、多値しきい値関数系の関数的完全性の証明を得たので、簡単に述べた。

まず、次の3個の関数の集合を $F = \{S(x, y), a, \sigma(x)\}$ とあらわす。ただし、ここで、 $S(x, y)$ および a は、 a が生成元となり、 $S(x, y)$ が演算となるような、定数関数の巡回群を作るとする。又 $\sigma(x)$ は、1つの互換とする。

〔定理〕 F は完全な m 値論理系をなす。

これを証明するために、論理関数系の完全性の必要十分条件を与える Slupecki の定理を次に示す。

〔Slupecki の定理〕 m 値 ($m > 2$) 命題論理において、ある関数集合が関数的に完全であるための必要十分条件は、

- (1) すべての1変数関数が定義できること。
- (2) 真理値 s, t, r が存在して、 $f(s, t) \neq f(s, r), f(s, t) \neq f(s, t), f(s, r) \neq f(s, t)$ (ただし $1 \leq s, t, r \leq m$) となりかつ、任意の i ($1 \leq i \leq m$) に対して、 j, k ($1 \leq j, k \leq m$) が存在して、 $i = f(j, k)$ であること。

〔定理〕の証明 $S(x, a)$ は巡回置換をあらわす。又、 $\sigma(x)$ は互換であるから、この2個の置換ですべての置換が定義できる。ここで次の表現を定める。 $ka \equiv S(S \cdots S(a, a) \cdots)$ (a が k 個) とあらわす。定数関数は $S(x, y)$ に関して有限巡回群であるから、 $0 \leq ma$ と書けば、 0 は単位元となる。 $i a$ の逆元は、 $(m-i)a$ である。任意の関数 g を考えれば、定数関数 0 を単位元とし、 g の逆元を $(m-1)g$ として、一般の関数も $S(x, y)$

に関して、可換群となる。したがって $S(x, y)$ を加法の記号を用いて $x+y$ と表わす。又 $\sigma_{ij}(x)$ は $i a$ と $j a$ の互換を表わす。

まず、条件 (1) を満たす事を示すために、 m が偶数の場合と m が奇数の場合とに分ける。

(i) $m=2l$ の場合

$t(x) \triangleq x + \sigma_{0,1}(x)$ とすれば

$$t(x) = \begin{cases} a & x=0, a \\ 2x & \text{その他} \end{cases}$$

故に

$$l t(x) = \begin{cases} la & x=0, a \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

そこで

$I(x) \triangleq \sigma_{0,1}(l t(x))$ とおけば

$$I(x) = \begin{cases} a & x=0, a \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

さらに

$$\begin{aligned} H(x) &\triangleq S(I(x), I(S(x, (m-1)a))) \\ &= I(x) + I(x + (m-1)a) \quad \text{とおけば} \end{aligned}$$

$$H(l) = \begin{cases} a & x=0, 2a \\ 2a & x=a \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

ゆえに

$J_1(x) \triangleq I(H(x) + 2a)$ とおけば

$$J_1(x) = \begin{cases} I(2a+2\bar{a}) = I(0) = a & x=a \\ I(a+2\bar{a}) = I(\bar{a}) = 0 & x=0 \\ I(a+2\bar{a}) = I(\bar{a}) = 0 & x=2a \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

$$I(0+2\bar{a}) = I(2\bar{a}) = 0 \quad \text{その他} \dots \textcircled{2}$$

ただし ①であるために $\bar{a} \neq a$ すなわち $m \geq 3$

②であるために $2\bar{a} \neq a$ すなわち $m \geq 4$

$$J_k(x) = J_1(x + (k-1)a) \text{ とおけば}$$

$$J_k(x) = \begin{cases} a & x = ka \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となり、 $J_k(x)$ と関数“+”によってすべての1変数関数が合成できる事になる。

(ii) $m = 2l + 1$ の場合

$$t(x) \triangleq x + J_0(x) \text{ とおけば}$$

$$t(x) = \begin{cases} a & x = 0, a \\ 2x & \text{その他} \end{cases}$$

$$U(x) = lt(x) + x \text{ とおけば}$$

$$U(x) = \begin{cases} la & x = 0 \\ (l+1)a & x = a \\ 0 & x \neq 0, a \end{cases}$$

さらに、

$$V(x) = U(U(x) + (l+1)a) \text{ とおけば}$$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ la & x = a \\ 0 & x \neq 0, a \end{cases}$$

故に

$$J_1(x) = J_1(V(x)) \text{ とおけば}$$

$$J_1(x) = \begin{cases} a & x=a \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$J_k(x) = J_1(x + (k-1)a) \text{ とおけば}$$

$$J_k(x) = \begin{cases} a & x=ka \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$J_k(x)$ と演算“+” によってすべての1変数関数が合成できる。

以上から F は条件 (1) を満たす。

さて、 $t=1, r=2, s=0, S=2$ とすれば、

$$S(s, t) = 1 + 2 = S(s, r)$$

$$S(s, t) = 1 + 3 = S(S, t)$$

$$S(s, r) = 2 + 3 = S(S, t)$$

となり、又、 $S(x, y)$ は1から m までのすべての値をとり得る事は明らかである。したがって条件 (2) も満たす。

以上から定理が証明された。

[標準形]

$$J_{ij}(x, y) = J_0(J_i(x) + J_j(y) + 2a) \text{ とおけば}$$

$$J_{ij}(x, y) = \begin{cases} a & x=i a, y=j a \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となる。これから

$$J_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_1, \dots, x_k) = J_{i_1 i_k}(J_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}(x_1, \dots, x_{k-1}), x_k)$$

によって、任意の次元に $J_{ij}(x, y)$ を拡張できる。

$(i_1 a, i_2 a, \dots, i_k a)$ における $f(x_1, \dots, x_k)$ の値を $f(i_1 a, i_2 a, \dots, i_k a)$ とすれば $f(i_1 a, i_2 a, \dots, i_k a) = \varphi(i_1, i_2, \dots, i_k) a$ なる整数 ($0 \leq \varphi(i_1, i_2, \dots, i_k) \leq m-1$) が存在するから、これにより

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \varphi(0, \dots, 0) J_{0 \dots 0}(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

$$+ \varphi(1, 0, \dots, 0) J_{1 0 \dots 0}(x_1, \dots, x_k) + \dots + \varphi(m-1, \dots, m-1) J_{m-1 \dots m-1}(x_1, \dots, x_k)$$

と書ける。

回路実現について

上述の基本演算を用いた論理は、数値演算を主目的とする。回路に用いる事ができる。すなわち、 $m=10$ として、法10の加算を考える。これと置換と定数により、すべての論理関数が実現できるのであるが、現在まだ、多安定の回路素子が、開発されていないので、回路実現としては、多線式の疑似多値回路となる。この場合、素子としては法10のダイオードマトリクス一種となる。値の置換は、接続線の交換とすればよい。もちろん、この系に、掛算のマトリクスなど、他の回路をつけ加える事は、回路構成の小型化の面から好ましい事である。このような、多線式実現は、素子の冗長性が大となる欠点を持つが、本方式においては、構造の比較的簡単な、マ

トリクス回路であるので、小型の集積回路とする事が可能と思われる。

多値しきい値関数系の完全性

多値しきい値関数系が関数的に完全である事は、直感的、経験的には、ほぼ、明らかと思われるが、簡単な証明を与えておく。やはり、ここにおいても、 m 値とする。

[証明] すべての1変数関数が、 m 項の巡回置換と、1つの互換と、それに対応する関数(たとえば、後述の $f_{i,i}$ と $f_i(x)$)とによって合成できるということは、S. Piccard によって証明されている。そこで、まず、これらの1変数関数が、いずれもしきい値関数の組合せとして実現できることを示し、3値以上のしきい値関数系が Slupecki の条件(1)を満たすことを示す。

1変数関数を関数値を要素とする行ベクトルとして表わせば、任意の i ($1 \leq i \leq m-1$) について、 $f_i(x) = (1, 2, \dots, i-1, i, i, i+1, \dots, m-1)$ はしきい値関数である。これは、小さい方から k 番目のしきい値を、 T_k とすれば、重みを1として、

$$i=1 \text{ のとき} \quad k+1 < T_k < k+2 \quad (1 \leq k \leq m-1)$$

$$2 \leq i \leq m-1 \text{ のとき} \quad \begin{cases} k < T_k < k+1 & (1 \leq k \leq i-1) \\ k+1 < T_k < k+2 & (i \leq k \leq m-1) \end{cases}$$

とすればよい。

また、2変数の m 値しきい値関数を $T\{w_1, w_2; T_1, T_2, \dots, T_{m-1}\}$ とあらわすことにする。(ただし、 $T_{k-1} < w_1 x_1 + w_2 x_2 < T_k$ のとき $T\{w_1, w_2; T_1, T_2, \dots, T_{m-1}\} = k$ とする。)

まず、次のような $t_i(x_1, x_2)$ を定める。

$i=1$ では

$$t_1(x_1, x_2) = T\left\{\left(\delta - \frac{1}{2}\right), 1; T_1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\delta, T_2 = \frac{1}{2} + 2\delta, \right. \\ \left. T_k = \frac{1}{2}k - \frac{3}{4} + (k + \frac{1}{2})\delta \ (k \geq 3)\right\}$$

$2 \leq i \leq m-2$ では

$$t_i(x_1, x_2) = T\left\{\left(\delta - \frac{1}{2}\right), 1; T_k = (k + \frac{1}{2})\left(\frac{1}{2} + \delta\right) \ (1 \leq k \leq i-2)\right. \\ T_{i-1} = \left(\frac{1}{2} + \delta\right)i - \frac{1}{2}, T_i = \left(\frac{1}{2} + \delta\right)i - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \delta\right), \\ T_{i+1} = \left(\frac{1}{2} + \delta\right)i + \delta, T_k = \left(\frac{1}{2} + \delta\right)k - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \delta\right) \\ \left. (m-1 \geq k \geq i+2)\right\}$$

$i=m-1$ では

$$t_{m-1}(x_1, x_2) = T\left\{\left(\delta - \frac{1}{2}\right), 1; T_k = (k + \frac{1}{2})\left(\frac{1}{2} + \delta\right) \ (k \leq m-3), \right. \\ \left. T_{m-2} = \left(\frac{1}{2} + \delta\right)m - 1 - \delta, T_{m-1} = \left(\frac{1}{2} + \delta\right)m - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\delta\right\}$$

(ただし $0 < \delta < \frac{1}{10}$)

この $t_i(x_1, x_2)$ と、はじめに述べた1変数関数 $f_i(x)$ から、

$$\sigma_{i+1}(x) = t_i(x, f_i(x)) \quad (i=1, 2, \dots, m-1)$$

をつくると、 $\sigma_{i+1}(x)$ は、真理値 i と真理値 $i+1$ との互換をあらわす関数となる。ゆえに、 m 項の巡回置換ができる。

m 項の巡回置換と、 $f_{i+1}(x)$ と $f_i(x)$ とにより、すべての 1 変数関数を合成できる事は、さきに述べたとおりである。

よって条件 (1) が満たされた。

つぎに、 $S(x_1, x_2) = T\{1, 1; T_k = k + \frac{3}{2} (1 \leq k \leq m-1)\}$ なる関数は 1 から m までのすべての値をとり、しかも、Slupecki の条件 (2) における p, r, s, t として $p=1, s=3, t=1, r=2$ をとれば、 $S(1, 1) = 1 \neq 3 = S(3, 1)$, $S(1, 1) = 1 \neq 2 = S(1, 2)$, $S(1, 2) = 2 \neq 3 = S(3, 1)$ となる。したがって条件 (2) も満たされた。

以上から多値しきい値関数系が、関数的に完全である事が証明された。

あとがき 有限多値論理の完全な関数集合は、すでに、数多く与えられているが、多値論理関数の実現問題は、実際には、具体的なしかも実用的な多値論理素子を与えられていない事から、非常に一般的なとりあつかいか、最も回路構成に都合の良い関数を仮定して考察を行う事になる。本文では、後者の立場を取った。

[文献] ARTO SALOMAA, A THEOREM CONCERNING THE COMPOSITION OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES RANGING OVER A FINITE SET, THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC. Vol. 25 No. 3 Sept., 1960

NORMAN M. MARTIN, THE SHEFFER FUNCTIONS OF 3-VALUED LOGIC, THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC. Vol. 19 No. 1, March 1954