

Some remarks in 2nd Microlocalization

(joint works with K. Kataoka)

東大・理 斎瀬信之 (Nobuyuki Tose)

Introduction

$M \cong \mathbb{R}_t^{n-d} \times \mathbb{R}_x^d$ の開集合 z'' , $X \cong \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{C}_z^d$ 中の複素化と見る。 ($w = t + \sqrt{-1}s, z = x + \sqrt{-1}y$) $\cong z''$

$$N = \{(w, z) \in X; \operatorname{Im} w = 0\}$$

$$\tilde{\Sigma} = T_N^* X$$

と置く。 $\tilde{\Sigma}$ は $T_N^* X$ 中の正則部分の接体

$$\Sigma = \{(t, x; \sqrt{-1}(\xi dt + \eta dx)) ; \xi = 0\}$$

の部分複素化と呼ばれる。 $\cong z'' T_N^* X$ の座標を $\zeta \in \mathbb{R}^{n-d}, \xi \in \mathbb{R}^d$

を用いて $(t, x; \sqrt{-1}(\xi dt + \eta dx)) \in \tilde{\Sigma}$ と置く。 $T_{\tilde{\Sigma}}^* \tilde{\Sigma}$ 上に相原先生は層 $\mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}}^2$ (2-microfunctions の層) を構成した。(1973年 Nice)

$\mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}}^2$ は次のように構成される。局所的には

$$\tilde{\Sigma} \cong \sqrt{-1} T^* \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{C}_z^d$$

と同一視できることに注意する。 $\tilde{\Sigma}$ 上には層 $\mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}}^2$, 即ち

$$\mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}}^2 = H^{n-d}(\mu_N(\mathcal{O}_X))$$

なる $\tilde{\Sigma}$ 上の正則 μ_N の $\tilde{\Sigma}$ 上の μ_N を持つ micro 函数の層が定義可

れる。この時 $\mathcal{C}_{\Sigma}^2$ は、

$$\mathcal{C}_{\Sigma}^2 = H^d(\mu_{\Sigma}(\mathcal{C}_{\Sigma}^2))$$

と定義される。ここで $\mu_{\Sigma}(\cdot)$ は佐藤の超局所化の関手である。

$\mathcal{C}_{\Sigma}^2$ の最も重要な性質として、次の完全系列がある。

と表わすことができる。

$$0 \rightarrow A_{\Sigma}^2 \rightarrow B_{\Sigma}^2 \rightarrow \pi_*(\mathcal{C}_{\Sigma}^2|_{T_{\Sigma}^* \Sigma}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_{M|_{\Sigma}} \rightarrow B_{\Sigma}^2.$$

ここで

$$A_{\Sigma}^2 = \mathcal{C}_{\Sigma}^2|_{\Sigma} \quad \text{及び} \quad B_{\Sigma}^2 = \mathcal{C}_{\Sigma}^2|_{\Sigma}$$

と表わす。更に、規範的なスピタル写像

$$S_{p\Sigma}^2: \pi^* B_{\Sigma}^2 \longrightarrow \mathcal{C}_{\Sigma}^2 \quad (\pi: T_{\Sigma}^* \Sigma \longrightarrow \Sigma)$$

があり、これを用いて $u \in \mathcal{C}_{M|_{\Sigma}}$ に対して u の Σ に沿った第2超局所化を

$$SS_{\Sigma}^2(u) := \text{supp}(S_{p\Sigma}^2(u))$$

と表わす。 $(\mathcal{C}_{\Sigma}^2$ について $[k-L]$ を参照 $n = \epsilon$.)

この小論の目的の一つとして、 $\mathcal{C}_{\Sigma}^2$ の部分層 $\mathcal{C}_{\Sigma}^2$ を構成して、完全系列

$$0 \rightarrow A_{\Sigma}^2 \rightarrow \mathcal{C}_{M|_{\Sigma}} \rightarrow \pi_*(\mathcal{C}_{\Sigma}^2) \rightarrow 0$$

が成立するようにする必要がある。様々な問題の解の構成に

第2超局所化を応用する時には必須となることを予想される。

§1. Flabbiness of C^2_{Σ} .

＝「 Σ 」は $\Sigma \in S^*_M X$ 中の正則包含的な部分の様体

$$\Sigma = \{(t, x; F(t, \xi) \in \infty); \xi = 0\}$$

と考へる。更に $\tilde{\Sigma} = S^*_N X \cong F S^* \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{C}^d$ とおく。 $C^2_{\Sigma} | \tilde{\Sigma} \cong \Sigma$
 $S^*_N \tilde{\Sigma}$ 上の層として考へ、 C^2_{Σ} が脆弱層であることを示すのが
 目的である。

定理 1.1. C^2_{Σ} は $S^*_N \tilde{\Sigma}$ 上の脆弱層である。

＝定理は [S'KK] と同様に次の定理を示すことに帰着され
 る。

$M = L \times \mathbb{R}^d_x$ として Introduction と同様に $X, N, \Sigma, \tilde{\Sigma}, C^2_{\Sigma},$
 A^2_{Σ} を定めることが出来る。但し、 L は p -次元の向き付け可
 能な C^∞ 級の様体である。但し Σ は $S^*_M X$ 中、 $\tilde{\Sigma} = S^*_N X$ として
 C^2_{Σ} は $\tilde{\Sigma}$ 上、 A^2_{Σ} は Σ 上の層として考へる。この時、次の成立する。

定理 1.2. $U \subset \Sigma$ の任意の開集合とする。このとき、

$$H^k(U, A^2_{\Sigma}) = 0 \quad (\forall k > 0)$$

が成立する。

(証明) M に一変数 x_0 を加えて、 $M_0 = L \times \mathbb{R}^{d+1}_{(x_0, x)}$ とおく。

$\tilde{L}$ を L の複素近傍として $X_0 = \tilde{L} \times \mathbb{C}^{d+1}_{(z_0, z)}$ と定め、更に、

$N_0, \Sigma_0, \tilde{\Sigma}_0 \subset N, \tilde{\Sigma}, \Sigma$ と同様に

$$N_0 = L \times \mathbb{C}_{(z, \bar{z})}^{d+1}, \Sigma_0 \simeq \Gamma S^* L \times \mathbb{R}_{(x_0, x)}^{d+1}$$

$$\tilde{\Sigma}_0 = S^*_{N_0} X_0 \simeq \Gamma S^* L \times \mathbb{C}_{(z, \bar{z})}^{d+1}$$

と置く。 $P = (\partial/\partial x_0)^2 + \cdots + (\partial/\partial x_n)^2$ は Laplace 作用素を $\tilde{\Sigma}_0$ 上

に

$$C^P_{M_0} = \ker \{P: C_{M_0} \rightarrow C_{M_0}\}$$

と置く。すると

$$0 \rightarrow C^P_{M_0}|_{\tilde{\Sigma}_0} \xrightarrow{P} C_{M_0}|_{\tilde{\Sigma}_0} \xrightarrow{P} C_{M_0}|_{\tilde{\Sigma}_0} \rightarrow 0$$

は完全系列が、Bony-Schapira [B-S] の partially elliptic 作用素の可解性が導かれる。また partially elliptic operator の性質から

$$\begin{aligned} C^P_{M_0}|_{\tilde{\Sigma}} &\simeq \ker \{P; A^2_{\tilde{\Sigma}_0} \rightarrow A^2_{\tilde{\Sigma}_0}\}|_{\tilde{\Sigma}} \\ &\simeq (A^2_{\tilde{\Sigma}})^2 \end{aligned}$$

であることが分る。([B-S] 及び Kasahara-Schapira [K-S] を参照のこと) $\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}_0 \cap \{x_0 = 0\}$ と同一視した。以上より

$$0 \rightarrow (A^2_{\tilde{\Sigma}})^2 \rightarrow C_{M_0}|_{\tilde{\Sigma}} \xrightarrow{P} C_{M_0}|_{\tilde{\Sigma}} \rightarrow 0$$

は $(A^2_{\tilde{\Sigma}})^2$ の脱弱分解を得る。更に、 P の大域的な可解性は、 P の基本解の存在により従う。よって、求める漸減定理が証明された。

注意: 上の証明法は P. Schapira 教授の示唆による。

§2. P. Laubin と P. Esser の仕事.

$\mathcal{C}_2^0$ の理解を深めるために、この節では Liège の P. Laubin と P. Esser の仕事を紹介しよう。この節では、Introduction の設定のもとで議論する。即ち、 M を $\mathbb{R}_t^{n-d} \times \mathbb{R}_x^d$ の開集合、 X を $\mathbb{C}_w^{n-d} \times \mathbb{C}_z^d$ 中の M の閉近傍とする。更に

$$\bar{Z} = \{ (x; (t, \xi)) \in T^*M; \xi = 0 \}$$

と置く。この時、FBI変換を用いた 2nd analytic wavefront set (第2解析的波面集合) を次のように定義する。 $\omega \in M$ の有界開集合、 $u \in (A(\bar{\omega}))'$ に対し、

定義 $WF_{a, \bar{Z}}^{(2)}(u) \not\ni (t_0, x_0; \tau_0, x_0^*)$

$\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{正数 } \varepsilon, \nu, \mu_0, C > 0 \text{ 及 } \nu'' \geq 0, \mu_0 \in \mathbb{R} \text{ の減少函数 } f(\mu) \\ \text{が存在して} \end{array} \right.$

$$|z - (x_0 - i x_0^*)| < \nu, |w - (t_0 - i \tau_0)| < \nu$$

$$\lambda > f(\mu), 0 < \mu < \mu_0$$

の時

$$\left| \int u(x, t) e^{-\frac{\lambda \mu}{2} (z-x)^2 - \frac{\lambda}{2} (w-t)^2} dx dt \right| \leq C e^{\frac{\lambda \mu}{2} |\operatorname{Im} z|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} w|^2 - \varepsilon \mu \lambda}$$

が成立する。

上の定義で $T \subseteq T^*M$ の座標を $(z(t, x; \tau; x^*))$ と書いた。

P. Laubin と P. Esser の仕事の紹介の為に tuboid の定義をまづする。

— $\mathbb{C}^n$ の集合 Λ が profile であるとは

$$(x + \sqrt{t}y, t + \sqrt{t}s) \in \Lambda, t > 0 \Rightarrow (x + \sqrt{t}y, t + \sqrt{t}s) \in \Lambda$$

が成立する $\Rightarrow$ である。

— $\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n; \exists (y, s) \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } (x + \sqrt{t}y, t + \sqrt{t}s) \in \Lambda\}$
 とおく。 Λ の trace と呼ぶ。

— Λ が convex とは

$$\Lambda_{(x,t)} := \{(y, s) \in \mathbb{R}^n; (x + \sqrt{t}y, t + \sqrt{t}s) \in \Lambda\}$$

が任意の $(x, t) \in \bar{\Omega}$ について convex.

— $\Lambda_{(x,t)}^* := \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; y \cdot \xi + s \cdot \tau \geq 0 \ (\forall (y, s) \in \Lambda_{(x,t)})\}$
 $\Lambda^* = \{(x, t; \xi, \tau) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n; (\xi, \tau) \in \Lambda_{(x,t)}^*\}$
 とおく。

— $\mathbb{C}^n$ の開集合 $\tilde{\Omega}$ が Λ の profile とする tuboid とは

$K \subset \Lambda$ なる任意のコンパクト集合 K に対して正数 R が存在して

$$\{(x + \sqrt{t}y; t + \sqrt{t}s) ; 0 < \sqrt{t} < R, (x + \sqrt{t}y, t + \sqrt{t}s) \in K\} \subset \tilde{\Omega}.$$

第2超局所化と深い関係を持つのは次の定義中の特別な形の profile である。

定義: convex profile Λ が Σ -profile とは

$$(x + \sqrt{t}y, t + \sqrt{t}s) \in \Lambda, t > 0 \Rightarrow (x + \sqrt{t}y, t + \sqrt{t}s) \in \Lambda$$

が成立する $\Rightarrow$ である。 $a = a \pm \varepsilon$,

$\Lambda'_{(x,t)} := \{y \in \mathbb{R}^d; \exists s \in \mathbb{R}^{n-d} \text{ s.t. } (y,s) \in \Lambda_{(x,t)}\}$.
とおく。

P. Lambin と J. Esser は次の定理を示した。 ([L-E])

定理 $\tilde{\Omega}$ は tuboid with Σ profile Λ とする。 $f \in \tilde{\Omega}$ 上

正則函数とすると、

$$WF_{a,\Sigma}^{(2)}(bf) \subset \left\{ (t,x;\tau,x^*); (t,x) \in \Omega, \right. \\ \left. (0,\tau) \in \Lambda_{(x,x)}^*, x^* \in \Lambda_{(t,x)}^* \right\}$$

が成立する。

注意 $SS_{\Sigma}^2(bf)$ に対し 2 同様の評価を得るには、野呂正行 [Noro] の $\mathcal{C}_{\Sigma}^2$ に対する Radon 変換を用いるとほとんど自明である。(野呂-戸田 [N-T] を参照せよ。)

§3. 層 $\mathcal{C}_{\Sigma}^2$

$S'_{\Sigma}(FS^*M)$ の座標として $(t,x; F\tau d\tau\omega; F\tilde{\xi} d/2\tilde{\xi}\omega)$ とする。
($\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$). X の M を中心とする Σ に沿った comonoidal 変換を

$$Mon_{\Sigma,M}^{2*}(X) = (X \setminus M) \sqcup S'_{\Sigma}(FS^*M) \xrightarrow{\tau_{\Sigma}} X$$

により定める。 $Mon_{\Sigma,M}^{2*}(X)$ には以下に述べるように位相を入れる。即ち、 $X \setminus M$ の点の近傍系としては、普通の位相を入れる。
更に、 $\dot{p} = (\dot{t}, \dot{x}; F\dot{\tau} d\tau\omega; F\dot{\tilde{\xi}} d/2\dot{\tilde{\xi}}\omega) \in S'_{\Sigma}(FS^*M)$ の基本近傍系

$\varepsilon < 2, \varepsilon > 0$ に対し

$$\bigcup_{\substack{|z|=1 \\ |z-\tilde{z}_0|<\varepsilon \\ 0 \neq |\tilde{\xi}|<\varepsilon \\ |\frac{\tilde{\xi}}{|\tilde{\xi}|} - \frac{\tilde{\xi}_0}{|\tilde{\xi}_0|}<\varepsilon}} \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^n; \begin{array}{l} |z-\tilde{z}_0| + |w-\tilde{w}| < \varepsilon \\ \langle \operatorname{Im} z, \tilde{\xi} \rangle + \langle \operatorname{Im} w, \tilde{\xi} \rangle > 0 \end{array} \right\}$$

$\cup (S'_\Sigma(\mathbb{R}S^*M)$ 中の p の ε -近傍系)

$\varepsilon < 2$ とする。 ε の時 $\mathcal{C}^2_\Sigma$ を次のように定義する。

定義 $\mathcal{C}^2_\Sigma = \mathbb{R} \cap_{S'_\Sigma(\mathbb{R}S^*M)} (\pi_\Sigma^{-1} \mathcal{O}_x) \cap \Sigma$

また、上の定義より $\mathcal{C}^2_\Sigma$ は純次元 n の多様体であることに注意する。これは、 $\mathcal{O}_x$ の Edge of the Wedge から Σ に分る。以下 $\mathcal{C}^2_\Sigma$ の性質を列挙しに行く。

① Σ 上には完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{A}^2_\Sigma \rightarrow \mathcal{C}^2_\Sigma \rightarrow \pi_* \mathcal{C}^2_\Sigma \rightarrow 0$$

が存在する。 ($\pi_*: S'_\Sigma(\mathbb{R}S^*M) \rightarrow \Sigma$)

この証明の idea を述べる。 X の M を中心とし Σ に対し、 T_Σ monoidal 変換

$$\operatorname{Mon}^2_{\Sigma, M}(X) = T_\Sigma \tilde{\Sigma} \cup (X - M) \longrightarrow X$$

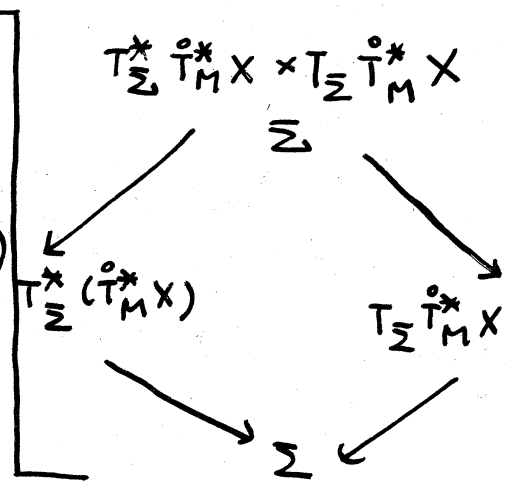
に相当な topology を与える。 Σ 上

$$j: (X \setminus M) \hookrightarrow \text{Mon}_{\Sigma, M}^2(X)$$

Σ 用 "2",

$$\sigma_{\Sigma} = Rj_* (\mathcal{O}_X|_{X \setminus M})|_{T_{\Sigma}^*(\dot{T}_M^*X)}^{[n-d]}$$

とよく。更に右の diagram に付、
 Fourier 変換を行なうと、
 $\rightarrow R\Gamma_{\Sigma}(\mathcal{F}(\sigma_{\Sigma})) \rightarrow R\pi_*(\mathcal{F}(\sigma_{\Sigma}))$
 $\rightarrow R\pi_*(\mathcal{F}(\sigma_{\Sigma})) \xrightarrow{+1}$
 なる完全系列を得る。これは、実は
 Σ の求核の完全系列に他ならない。



② 第2節の定理1.2を用いると

" $\dot{c}_{\Sigma}^2$ は $S_{\Sigma}^1(S_M^*X)$ の脆弱層である。"

と分かる。

③ (Radon 変換)

この③にはよく2は T^*X の座標と $\int_2 (w, z; \theta dw + \zeta dz)$ とする。

Σ の T^*X 中の複素化を

$$\Sigma^{\mathbb{C}} = \{(w, z; \theta dw + \zeta dz) ; \zeta = 0\}$$

と定める。 $\Sigma^{\mathbb{C}} \hookrightarrow \Sigma^{\mathbb{C}} \times \Sigma^{\mathbb{C}}$ を埋め込み

$$T^*X \cong T_X^*(X \times X) \hookrightarrow T^*(X \times X)$$

より3/5起 = 3. $\Sigma^{\mathbb{C}}$ は $\Sigma^{\mathbb{C}} \times \Sigma^{\mathbb{C}}$ の複素な既約性条件で、 $\Sigma^{\mathbb{C}}$ を

通るもの集合とす。また $T_{\Sigma}^* \cong \mathbb{C}^n$ の座標を $(w, z; \theta dw; z^* dz)$ と定める。

また $\alpha = \epsilon$ に注意。 $p_0 = (0, 0; \sqrt{\epsilon} \tau_0 dt) \in \Sigma(\leq T_M^* X)$

α 点に近づく

$$\mathcal{A}_\epsilon^j = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{|k|=j} f_k(w, z; \theta, \zeta) d(\zeta, \zeta)^{\alpha} ; \quad f_k \text{ は } (-j) \text{ 次形式 } \theta, \\ f_k \in \theta \left(\begin{array}{l} |w| < \epsilon, |z| < \epsilon \\ \left| \frac{(I_m \theta, I_m \zeta)}{(I_m \theta, I_m \zeta)} - (0, \tau_0) \right| < \epsilon \\ -\operatorname{Re}(\langle z, \zeta \rangle + \langle w, \theta \rangle) > \frac{1}{\epsilon} (|\operatorname{Re} \zeta| + |\operatorname{Re} \theta|) \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

$\epsilon' < \epsilon$,

$$c_{M, p_0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}_\epsilon^{n-1} / d(\zeta, \zeta) \mathcal{A}_\epsilon^{n-1}$$

と表わす。 $\alpha = \epsilon$ に注意。 (片側 $[K]$)

$\alpha = \epsilon'$ $p_0 = (0, 0; \sqrt{\epsilon'} \tau_0 dt; \sqrt{\epsilon'} \chi_0^*) \in T_{\Sigma}^* \cong \mathbb{C}^n$ に近づく

$$\mathcal{A}_{\Sigma, \epsilon}^{2(j)} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{|k|=j} f_k(w, z; \theta, z^*) d(\theta, z^*)^{\alpha} ; \\ f_k \text{ は } (\theta, z^*) \text{ 上の } (2-j) \text{ 次形式 } \theta, \\ f_k \in \theta \left(\begin{array}{l} |w| < \epsilon, |z| < \epsilon \\ 0 < |I_m z^*| < \epsilon |I_m \theta| \\ \left| \frac{I_m \theta}{(I_m \theta)} - \tau_0 \right| < \epsilon, \left| \frac{I_m z^*}{|I_m z^*|} - \chi_0^* \right| < \epsilon \\ -\operatorname{Re}(\langle z, z^* \rangle + \langle w, \theta \rangle) > \frac{1}{\epsilon} (|\operatorname{Re} z^*| + |\operatorname{Re} \theta|) \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

と定まるとき,

$$c_{\Sigma}^{2(j)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}_{\Sigma, \epsilon}^{2(n-1)} / d(z, z^*) \mathcal{A}_{\Sigma, \epsilon}^{2(n-2)}$$

を得る。更に上の Radon 変換と双対正行の C_{Σ}^2 の Radon 変換を用

いると、単射的な morphism

$$| \quad C_{\Sigma}^2 \longrightarrow C_{\Sigma}^2$$

を構成するといふことができる。更に容易に

$$SS_{\Sigma}^2(\cdot) = WF_{2,\Sigma}^2(\cdot)$$

なる同型性を分布核の $\mathcal{H}$ 上の $\mathcal{H}$ 上の $\mathcal{H}$ を持つ hyperfunction に
対して示すことが出来る。

Reference

- [B-S] Bony, J.M. and P. Schapira, Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 26 (1976), pp. 81-140.
- [K-L] Kashiwara, M. and Y. Laurent, Théorèmes d'annulation et deuxièmes microlocalisation, Prépublication d'Orsay (1983).
- [K] Kataoka, K., On the theory of Radon transformation of hyperfunctions, J. Fac. Sci., Univ. of Tokyo Sect IA Math. 28 (1981), pp. 331-413.
- [K-S1] Kashiwara, M. and P. Schapira, Microhyperbolic systems, Acta Math. 142 (1979), 1-55.
- [K-S2] -----, Microlocal Study of sheaves, Astérisque 128 (1987).
- [K-T] Kataoka, K. and N. Tose, Vanishing Theorem for the Sheaf of Microfunctions with Holomorphic Parameters ---- Flabbiness of the sheaf of 2-microfunctions, preprint.
- [L-E] Laubin, P. and P. Esser, preprint.
- [Noro] Noro, M. Master thesis presented to Univ. of Tokyo (1985).
- [N-T] Noro, M. and N. Tose, The theory of Radon transformations and 2-microfunctions, J. Fac. Sci., Univ. of Tokyo Sect IA Math. 34 (1987), pp. 309-349.