

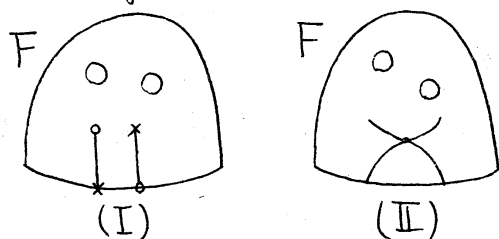
Standard representation curves of $\pi_1(M^3)$.

北大 教養 小林一草

向きづけ可能な次元多様体 M^3 の基本群の元 $w \in \pi_1(M^3)$ を “standard” な単純閉曲線と表現する事を考える (実際は $w \in [\pi_1(M^3), \pi_1(M^3)]$ (交換子群) なる元にも $\pi_1(M^3)$ standard representation curve が定義される)。

α を M^3 内でホモローグ 0 の単純閉曲線とし, $\phi: F \rightarrow M^3$ を $\phi|_{\partial F}$ が embedding で $\phi(\partial F) = \alpha$ となる写像とする (ただし F は compact orientable surface で $\partial F \cong S^1$ となるものとする)。

piping technique を使って ϕ の singularities $S(\phi)$ は次の 2 つの types に還元出来る。



(I) cusp singularity

(II) tree with a branch point.

(II) の 1 つの成分を T とすると T はさらに次の性質をもつ。

「 $B^2 \supset T - (T \cap \partial F)$, $B^2 \cap \{S(\phi) - T\} = \emptyset$, $B^2 \cap \partial F \cong B^1$ となる 2-ball B^2 が F 内にある」 $\phi(B^2) \hookrightarrow M^3$ だから

$U(\phi(B^2), M^3)$ は 3-ball で, そこで $U(\phi(B^2), M^3)$ の中でのみ ϕ を変形することにより上の (II) の singularities は全て (I) の singularities に還元出来る。

定義 0. α を M^3 内でホモローグ 0 の単純閉曲線とし $\phi: F \rightarrow M^3$ を上のような写像で (I) の singularities のみをもつとする。そのような写像の集合 $\{(F, \phi)_\alpha\}$ に次のような順序をいれる。 $(F_1, \phi_1)_\alpha, (F_2, \phi_2)_\alpha \in \{(F, \phi)_\alpha\}$ に対し

(1) $g(F_1) < g(F_2)$ ($g(F)$ は F の種数) または

(2) $g(F_1) = g(F_2)$ で $\#\{S(\phi_1)\} < \#\{S(\phi_2)\}$

このとき $(F_1, \phi_1)_\alpha < (F_2, \phi_2)_\alpha$ と定義する。また $g(F) = p, \#\{S(\phi)\} = 2g$ のとき singular surface $(F, \phi)_\alpha$ の type (または order) は (p, g) であるという。 F はコンパクト, ϕ は PL 写像だから $\{(F, \phi)_\alpha\}$ は最小元をもち, その最小元を α の minimal surface という。

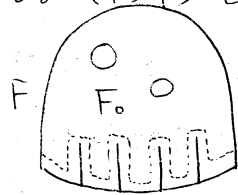
定義 1. α を M^3 内のホモローグ 0 の単純閉曲線とする。 α の minimal surface の type が $(p, 0)$ ($p \geq 0$) のとき α は M^3 内の standard curve という。

命題 1. α を M^3 内のホモトピック 0 の単純閉曲線とする。このとき α が standard curve $\iff \alpha$ は M^3 内で non-singular 2-ball を bound する。

命題 2. 交換子群 $[\pi_1(M^3), \pi_1(M^3)]$ の任意の元 ω に対して $\omega =$

$[\alpha]$ とする standard curve α が存在する。(ここで $[\]$ はホモトピー類を表わす)。

証明. ホモトピー類が ω とする 1 つの単純閉曲線を β とする。 (F, ϕ) を β の minimal surface とし, その type を (p, q) と



ある。 $q = 0$ ならば β は standard curve.

$q > 0$ のとき図の点線の中にある image を α とおく。 α は type $(p, 0)$ の singular surface を bound し, しかもこれが α の 1 つの minimal surface になっている。また α と β はホモトピー的。従って α は $[\alpha] = \omega$ とする standard curve.

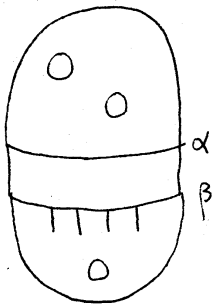
命題 3. α を M^3 内の standard curve とする。 B^3 を $B^3 \cap \alpha \cong B^1$ とするよう M^3 内の任意の 3-ball とすると常に $(B^3, B^3 \cap \alpha) \cong (B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$ が成り立つ。

証明. (F, ϕ) を α の minimal surface とし その type を $(p, 0)$ とする。 $B^3 \cap \alpha \cong B^1$ だから $F \cap \partial B^3 = l \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_p$ (disjoint union) とかける。ここで $F_\alpha = \phi(F)$, l は simple arc, C_i は simple closed curve. 次に C_i が ∂B^3 上で innermost であるとする。即ち $\partial B_i^2 = C_i$ とする 2-ball B_i^2 が ∂B^3 上に存在したとする。もし $C_i \neq 0$ in F_α ならば C_i が F_α 上で bound する $\bar{B}_i^2$ を B_i^2 に置き代える事により C_i を除去出来る。また $C_i \neq 0$ ならば同様の操作で F_α の genus を小さく出来る。これは F_α が α の minimal

surface である事に矛盾. 以上より $F_\alpha \cap \partial B^3 = \emptyset$ としてよい.
 ここでもし $F_\alpha \cap B^3$ が 2-ball に位相同型なら $(B^3, B^3 \cap \alpha) \cong (B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$, また $F_\alpha \cap B^3$ が種数 1 以上の連結な向きづけ可能な曲面 F_* なら $F_* \subset B^3$ だから F_* を singular 2-ball に変え piping technique を使ってその singularities を全て (I) に変えられる.
 従って α の minimal surface の type を小さく出来, これは仮定に反する. 従ってこの場合は起らない. 故に $(B^3, B^3 \cap \alpha) \cong (B^1 \times B^2, B^1 \times \{0\})$.

命題 4. α, β を $\omega \in \pi(M^3)$ の representation curves とする. F_α, F_β を α, β の minimal surface とする. もし α が standard curve なら F_α の order は F_β の order 以下である.

証明. もし F_β の order の方が F_α の order より小さいならば α



に F_α の order より小さい singular surface が張れ, これは矛盾.

系. α, β が standard curves で $\alpha \simeq \beta$ (free homotopic)
 $\Rightarrow \alpha, \beta$ の minimal surfaces の types は同じ.

定義 2. $\omega \in [\pi(M^3), \pi(M^3)]$ を取り α を ω の representation curve で standard なものとする. F_α を α の minimal surface とする. この時 F_α の type (order) で ω の type (order) を定義す

る。(この定義は命題3, 5から well-defined).

命題5. M^3, N^3 を compact, orientable 3-manifolds とし $f: M^3 \rightarrow N^3$ をホモトピー同値写像とする。任意の $w \in [\pi_1(M^3), \pi_1(M^3)]$ に対し $\text{ord}(w) = \text{ord} f_*(w)$.

証明. α を w の standard representation curve とし, F_α を α の minimal surface, $\text{ord}(F_\alpha) = (p, 0)$ とすると f の連続性から $\text{ord}(f(F_\alpha)) = (p', q')$ に対し $p' \leq p, q' \geq 0$ すると命題1の証明方法と同様にして $f_*(w)$ の表現曲線として, q' の minimal surface が $(p', 0)$ となるものがある。故に $\text{ord}(w) \geq \text{ord}(f_*(w))$ 次は f の homotopy inverse を使う事により $\text{ord}(w) = \text{ord}(g_*(f_*(w))) \leq \text{ord}(f_*(w))$ 故に $\text{ord}(w) = \text{ord}(f_*(w))$.

命題6. α を $w \in [\pi_1(M^3), \pi_1(M^3)]$ の standard representation curve とし, F_α を α の minimal surface とする。 β を F_α 上の単純閉曲線で F_α 上でホモトピック 0 でないとする。すると β は M^3 内でも1点にホモトピックでない。(従って $i_*: \pi_1(F_\alpha) \rightarrow \pi_1(M^3)$ に対し $i_*([\beta]) \neq 1$)

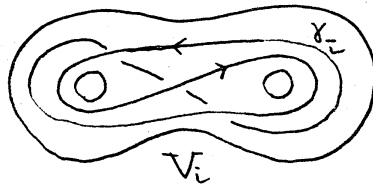
証明. もし $\beta \simeq 0$ in M^3 なら β を bound する singular 2-ball を使って F_α を変形し, α の minimal surface の order を小さく出来る。これは F_α が minimal という事に矛盾。

注. 一般に $\text{Ker } i_* \neq \{1\}$ である。もし常に $\text{Ker } i_* = \{1\}$ が成立するならば Seifert fiber space でホモロジー球面となってしまう。

ような M^3 に対し, その normal fiber が表わすホモトピー類を g とすると $g = 1 \in \pi_1(M^3)$ となってしまう。これは一般に成立しない。

命題 7. α を $\omega \in [\pi_1(M^3), \pi_1(M^3)]$ の standard representation curve とし, F_α を α の minimal surface で種数が p となるものとする。すると $\omega = \prod_{i=1}^p [a_i, b_i]$, $a_i, b_i \in \pi_1(M^3)$ とかけ, しかも p はそのような最小数である。($p > 0$ の時は $a_i \neq 1, b_i \neq 1$ in $\pi_1(M^3)$)。また逆に $\omega = \prod_{i=1}^p [a_i, b_i]$ とかけ p がそのような最小数なら ω は minimal surface の種数が p であるような standard representation curve をもつ。

証明. α は F_α の境界だから a_i, b_i ($i=1, 2, \dots, p$) を $\pi_1(F_\alpha)$ の自然基底とすると $\omega = [\alpha] = \prod_{i=1}^p [a_i, b_i]$ とかけ, しかも命題 6 より $a_i \neq 1, b_i \neq 1$ in $\pi_1(M^3)$ 。またもし $\omega = \prod_{i=1}^q [c_i, d_i]$ とかけ $q < p$ ならこの証明の後半より ω の standard representation curve α' でその minimal surface $F_{\alpha'}$ の種数が q となるものが存在する。これは命題 4 の系に矛盾する。従って p は最小数。次に $\omega = \prod_{i=1}^p [a_i, b_i]$ と表現され, p がそのような最小数とする。 α_i, β_i を $x_0 \in M^3$ を基点とする単純閉曲線で a_i, b_i を表現しているものとする。 $V_i = U(\alpha_i \cup_{x_0} \beta_i, M^3)$ とおくと V_i は種数 2 の handlebody である。そこで図のような単純閉曲線 γ_i を V_i 内に取る。すると $[\gamma_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ で γ_i は種数 1 の曲面 F_{γ_i} を bound する。連



結和 $\alpha = \sum_{i=1}^p \gamma_i$ を取ると α は特異点のない曲面 $F_\alpha = \bigcup_{i=1}^p F_{\gamma_i}$ を bound する。 F_α の種数は p 。今 ω の stand-

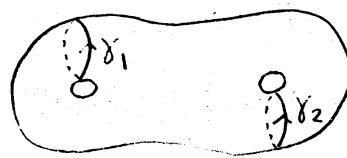
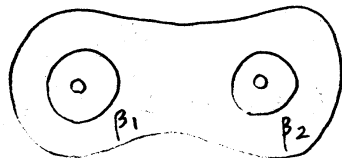
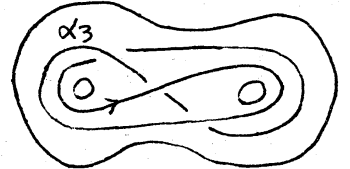
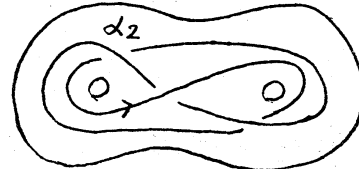
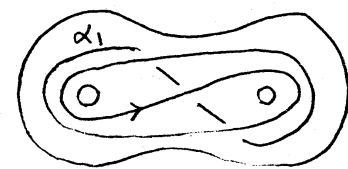
ard representation curve α_0 の minimal surface の種数を p_0 とすると命題 4 の系より $p_0 \leq p$ 。そしてもし $p_0 < p$ なら前半から $\omega = [\alpha_0] = \prod_{i=1}^{p_0} [a_i, b_i]$ とかける。これは p がそのような数のうち最小のものという条件に矛盾。故に $p_0 = p$ 。そして F_α は α の minimal surface である。

定義 3. $C_0 = \{1\}$, $C_1 = \pi_1(M^3)$ の交換子の集合, $C_2 = C_1 \times C_1$, ..., $C_n = \underbrace{C_1 \times \cdots \times C_1}_n$ とし $W_i = [\pi_1(M^3), \pi_1(M^3)] - C_{i-1}$ とする。

系 1. W_p 中 なら $\text{ord}(\omega) = p$ となる $\omega \in [\pi_1(M^3), \pi_1(M^3)]$ がある。

系 2. H_p^3 を種数が 2 以上の handlebody とすると任意の p に対し $\text{ord}(\omega) = p$ となる ω が存在する。

例 $M^3 = H_2^3 \cong (S^1 \times B^2) \cup (S^1 \times B^2)$ とおく。



$\alpha_i, \beta_j \in M^3$
 $\gamma_j \in \partial M^3$
 $(i=1,2,3; j=1,2)$

とすると $[\alpha_i] = a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1}$ で α_i の minimal surface の type は $(1, 0)$ 従って α_i は standard representation curves.

$$M' = M^3 \cup_{\beta_1 = \partial D^2 \times \{0\}} (D^2 \times D^1), \quad M'' = M^3 \cup_{\beta_2 = \partial D^2 \times \{0\}} (D^2 \times D^1) \quad \text{と置く.}$$

α_i と α_j は M^3 で ambient isotopic ではない ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$).

何故ならもし $\alpha_i \approx \alpha_j$ in M^3 ならば $\alpha_i \approx \alpha_j$ in both M' and M'' .

しかして α_1 は M' と M'' の中で 2-ball を bound し, α_2 は M', M'' 両方の中で 2-ball を bound しない。また α_3 は M'' の中で 2-ball を bound し M' の中で 2-ball を bound しない。

次に $\bar{h}_i: \partial M^3 \rightarrow \partial M^3$ を γ_i のまわりの Dehn twist とする。

$h_i: M^3 \rightarrow M^3$ を γ_i が bound する meridional 2-ball へ twist を拡大して得られる $\bar{h}$ の extension homeomorphism とすると

$h_2 h_1(\alpha_1) = \alpha_2, h_1(\alpha_1) = \alpha_3$. 従って補空間 $M^3 - \bigcup (\alpha_i, M^3)$ は全て位相同型である。

参考文献

N. Smythe: Handlebodies in 3-manifolds, Proc. A.M.S.

26. (1970) 534 - 538.