

平行な平面場を持つリーマン多様体のベッチ数について

大町英理子 (Eriko Omachi)

§ 1. 序. M^n を向き付け可能な連結コンパクト n 次元 Riemann 多様体とし, Riemann 計量を $g = (g_{ji})$ で表す. また M^n の p 次 Betti 数を b_p で表す. M^n が 1 個または 2 個の平行ベクトル場を持つとき, その Betti 数に関して L. Karp や A. Lichnerowicz 等が研究しているが ([1][2]), より一般に, M^n が r 個の平行ベクトル場を持つ場合, Betti 数に関して次の不等式が知られている ([3]):

定理 (Ogawa - Tachibana) M^n が r ($1 \leq r \leq n$) 個の平行ベクトル場を持つとき, 不等式

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{s+r-1}{i} b_{p-i} \geq 0, \quad (1 \leq s \leq r, 1 \leq p \leq n)$$

が成り立つ.

ここでは, M^n が向き付け可能な平行 2 次元 distribution を持つ場合に, Betti 数に関してどのような不等式が成り立つかを調べる. 扱う関数やテンソルはすべて C^∞ とする.

H_p を M^n 上の調和 p -形式全体のなすベクトル空間とすれば, $\dim H_p = b_p$ である. 便宜上, $p > n$ または $p < 0$ の時には $H_p = \{0\}$ とし, その上では各作用素は自明に作用するものとする.

ベクトル場 $u^j (\partial / \partial x^j)$ は 1-形式 $u_i dx^i$ ($u_i = g_{ij} u^j$) と必要に応じて同一視し, ともに u で表す. u による外積および内積作用素を $e(u)$, $i(u)$ で表す. すなわち, p -形式 w に対しては, $X_1, \dots, X_{p-1}$ を接ベクトルとするとき

$$e(u)w = u \wedge w$$

$$(i(u)w)(X_1, \dots, X_{p-1}) = W(u, X_1, \dots, X_{p-1})$$

であり,

$$e(u)^2 = i(u)^2 = 0$$

をみたす. また, 単位ベクトル u に対しては

$$i(u)e(u) + e(u)i(u) = I$$

が成り立つ. ここに I は恒等作用素である. 上の定理はこれらの性質を使って証明される.

§ 2. 平行な平面場に関連する作用素. 以下, M^n は向き付け可能な平行 2 次元 distribution D を持つと仮定する. D の正規直交基底 $u = (u^i)$, $v = (v^i)$ をとる. これらは局所的な C^∞ ベクトル場である

このとき

$$\pi_{ji} = u_j v_i - u_i v_j$$

とおくと $\nabla_k \pi_{ji} = 0$, すなわち $\pi = (\pi_{ji})$ が平行であることが示される. また, π は同じ向きを持つ D の正規直交基底のとり方によらず, 大域的に定まることも分かる. すなわち $\pi = \frac{1}{2} \pi_{ji} dx^j \wedge dx^i$ は, u, v を 1-形式と見なせば, $\pi = u \wedge v$ で定義される大域的な 2-形式である. π に関する外積および内積作用素を定義する. p -形式 $w = (1/p!) w_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ に対して

$$e(\pi)w = \pi \wedge w$$

$$i(\pi)w = (1/(p-2)!)(\frac{1}{2} \pi^{ij} w_{i_1 i_2 \dots i_p}) dx^{i_3} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (p \geq 2)$$

$$i(\pi)w = 0 \quad (p = 0, 1)$$

によって作用素 $e(\pi)$ および $i(\pi)$ を定める. また

$$\phi(\pi) = e(u)i(u) + e(v)i(v)$$

により作用素 $\phi(\pi)$ を定義する. u, v は局所的であるが, $\phi(\pi)$ は大域的な作用素であることが確かめられる.

§ 3. 結果. π に関する内積と外積の定義より

$$i(\pi) = i(v)i(u), \quad e(\pi) = e(u)e(v) \quad (1)$$

であり, これらを使って

$$i(\pi)^2 = e(\pi)^2 = 0$$

が示される. さらに, $i(\pi)e(\pi)$ を p -形式 w に作用させ (1) を使うことによって, 次の定理が証明される.

$$\text{定理 1} \quad I = i(\pi)e(\pi) + \phi(\pi) - e(\pi)i(\pi) \quad (2)$$

が成り立つ.

$e(\pi)$, $i(\pi)$, $\phi(\pi)$ を p -形式に対して作用させる時, それぞれ $e(\pi)_p$, $i(\pi)_p$, $\phi(\pi)_p$ と書くことにする. もし w が調和であれば, $i(\pi)w$ および $e(\pi)w$ もまた調和であることが, 直接, 計算によって示される. ここで

$$K_p = i(\pi)_p^{-1}(0) \cap H_p$$

とおくと, (1) から

$$i(\pi)_p(H_p) \subset K_{p-2}$$

が得られる.

さてここで, 前節で定義した作用素 ϕ に関する条件

$$\phi(\pi) = 2 e(\pi)i(\pi) \quad (A)$$

を考える. p -形式に対する条件 (A), すなわち

$$\phi(\pi)_p = 2 e(\pi)_{p-2} i(\pi)_p \quad (A)_p$$

を $(A)_p$ で表す.

いま, 条件 $(A)_{p-2}$ を仮定しておく. すなわち

$$\phi(\pi)_{p-2} = 2 e(\pi)_{p-4} i(\pi)_{p-2} \quad (A)_{p-2}$$

が成り立つものとする. このとき (2) によって

$$I = i(\pi)_p e(\pi)_{p-2} + e(\pi)_{p-4} i(\pi)_{p-2}$$

が得られる. これを使うと, $w \in K_{p-2}$ に対して

$$w = lw = i(\pi)_p e(\pi)_{p-2} w$$

となり, w が $i(\pi)_p(H_p)$ に含まれることが分かる. 従って $K_{p-2} \subset i(\pi)_p(H_p)$ である. このことから, 条件 $(A)_{p-2}$ のもとで, H_p は K_p と K_{p-2} の直和にベクトル空間として同型であることが分かる. 従って K_p の次元を k_p とし, $p < 0$, $p > n$ の時には $k_p = 0$ とすれば, 次の定理が成り立つ.

定理 2 条件 $(A)_{p-2}$ を仮定すれば, 関係

$$b_p = k_p + k_{p-2}$$

が成り立つ.

この定理から次の定理が得られる.

定理 3 n を越えない偶数 (または奇数) p と任意の自然数 r に対して, 条件 $(A)_q$ が $p-4r-2 \leq q \leq p-2$ をみたすすべての偶数 (または奇数) q に対して成り立つならば,

$$\sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} = k_p + k_{p-4r-2} \geq 0$$

が成り立つ.

§ 4. 条件(A)の局所表現. 前節において仮定した条件(A)について考えよう.

まず, 今までに導入した作用素間に, 次の関係が成り立つことに注意する.

$$i(u)e(\pi)i(\pi) = e(v)i(\pi)$$

$$i(v)e(\pi)i(\pi) = -e(u)i(\pi)$$

$$i(u)\phi(\pi) = i(u) + e(v)i(\pi)$$

$$i(v)\phi(\pi) = i(v) - e(u)i(\pi)$$

これらの関係を使って次の定理が証明される.

定理 4 条件(A)は,

$$i(u) = e(v)i(\pi) \quad (3)$$

と

$$i(v) = -e(u)i(\pi) \quad (4)$$

が同時に成立することと同値である。

定理 4 を使って、条件 $(A)_p$ の局所表現を与えよう。(3)と(4)を p -形式 $w = (w_{i_1 \dots i_p})$ に作用させると

$$u^r w_{r i_2 \dots i_p} = \sum_{\ell=2}^p (-1)^\ell v_{\lambda_\ell} u^r v^s w_{rs i_2 \dots \hat{i}_\ell \dots i_p} \quad (5)$$

$$v^r w_{r i_2 \dots i_p} = \sum_{\ell=2}^p (-1)^\ell u_{\lambda_\ell} v^r u^s w_{rs i_2 \dots \hat{i}_\ell \dots i_p} \quad (6)$$

が得られる。 $\hat{}$ は、その部分の添字が除かれていることを表す。

ここで、 D に直交する distribution を $D^\perp$ で表せば、 D が平行であることから、 D と $D^\perp$ は共に積分可能である。従って M^n は局所的には Riemann 積 $M'^2 \times M''^{n-2}$ に等長である。 M'^2 の局所座標 $\{x^a; a=1, 2\}$ と M''^{n-2} の局所座標 $\{x^\lambda; \lambda=3, \dots, n\}$ から構成される M^n の座標 $\{x^i; i=1, 2, 3, \dots, n\}$ をとり、これを adapted coordinate と呼ぼう。この座標に関して、 p -形式 w は

$$\begin{aligned} w &= \sum_{I_1 < \dots < I_p} w_{I_1 \dots I_p} dx^{I_1} \wedge \dots \wedge dx^{I_p} \\ &= \sum_{\lambda_1 < \dots < \lambda_p} w_{\lambda_1 \dots \lambda_p} dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_p} \\ &\quad + \sum_{\lambda_2 < \dots < \lambda_p} w_{a \lambda_2 \dots \lambda_p} dx^a \wedge dx^{\lambda_2} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_p} \\ &\quad + \sum_{\substack{a < b \\ \lambda_3 < \dots < \lambda_p}} w_{ab \lambda_3 \dots \lambda_p} dx^a \wedge dx^b \wedge dx^{\lambda_3} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_p} \end{aligned} \quad (7)$$

と表せる。添字の範囲は、 $a, b = 1, 2, \lambda_1, \dots, \lambda_p = 3, \dots, n$ である。(7)の右辺の第1, 第2, 第3各項をそれぞれ $w^{(1)}, w^{(11)}, w^{(111)}$ で表せば p -形式 w は $w = w^{(1)} + w^{(11)} + w^{(111)}$ と分解される。 $w = w^{(1)}$ のとき I 型, $w = w^{(11)}$ のとき

II型, $w = w^{(111)}$ のときIII型であるとよぶことにする. w が調和であれば, $w^{(1)}$, $w^{(11)}$, $w^{(111)}$ も調和であることが直接計算することによって示せる. adapted coordinate に関して $u = \sum u_a dx^a$, $v = \sum v_a dx^a$ とすれば, (5)と(6)は

$$u^a w_{a I_2 \dots I_p} = \sum_{\ell=2}^p (-1)^\ell v_{I_\ell} u^a v^b w_{ab I_2 \dots \widehat{I_\ell} \dots I_p} \quad (8)$$

$$v^a w_{a I_2 \dots I_p} = \sum_{\ell=2}^p (-1)^\ell u_{I_\ell} v^a u^b w_{ab I_2 \dots \widehat{I_\ell} \dots I_p} \quad (9)$$

となる.

w がI型の場合には(8)と(9)は常に成り立つ. w がII型の場合には(8)および(9)の右辺は0であるから

$$u^i w_{i \lambda_2 \dots \lambda_p} + u^2 w_{2 \lambda_2 \dots \lambda_p} = 0$$

$$v^i w_{i \lambda_2 \dots \lambda_p} + v^2 w_{2 \lambda_2 \dots \lambda_p} = 0$$

となり, これと u, v が正規直交であることから

$$w_{a \lambda_2 \dots \lambda_p} = 0$$

が得られる. w がIII型である場合には, (8)と(9)は

$$u^a w_{ac \lambda_3 \dots \lambda_p} = v_c u^a v^b w_{ab \lambda_3 \dots \lambda_p}$$

$$v^a w_{ac \lambda_3 \dots \lambda_p} = u_c v^a u^b w_{ab \lambda_3 \dots \lambda_p}$$

である. 従って, 次の定理が成り立つ.

定理5 adapted coordinate に関して, 条件(A)_p は, p-形式 w に対して次の

(i)(ii)が共に成り立つことと同値である:

(i) $w^{(11)} = 0$

(ii) $w^{(111)}$ に対して

$$u^a w_{ac \lambda_3 \dots \lambda_p} = v_c \alpha_{\lambda_3 \dots \lambda_p}$$

$$v^a w_{ac \lambda_3 \dots \lambda_p} = -u_c \alpha_{\lambda_3 \dots \lambda_p}$$

を満たす (P-2)-形式 $\alpha_{\lambda_3 \dots \lambda_p}$ が存在する.

$w^{(1)}$ に対しては(A)_pは何の条件も課さない.

§ 5. Riemann 積の場合. この節では, M^n が Riemann 積 $M'^2 \times M''^{n-2}$ であるとする. M'^2 および M''^{n-2} は連結, コンパクト, 向き付け可能であると仮定しておく. M^n, M'^2, M''^{n-2} の p 次 Betti 数をそれぞれ b_p, b'_p, b''_p で表せば, これらの間に関係

$$b_p = \sum_{i=0}^p b'_i b''_{p-i}$$

が知られている. これを使って, $b'_0 = b'_2 = 1, b'_q = 0$ ($q \geq 3$) に注意すれば,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} &= b''_p + b''_{p-4r-2} \\ &\quad + b'_1 (b''_{p-1} - b''_{p-3} + b''_{p-5} - \cdots + b''_{p-4r-1}) \end{aligned}$$

が得られる. この式から次の定理が導かれる.

定理 6 Riemann 積多様体 $M^n = M'^2 \times M''^{n-2}$ において,

$$b'_1 = 0$$

または

$$b''_{p-3} = b''_{p-7} = \cdots = b''_{p-4r+1} = 0$$

の何れかが成り立つならば, 不等式

$$\sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} \geq 0$$

が任意の自然数 r に対して成り立つ.

定理 6 で得た不等式は, 定理 3 で得たものと同じ不等式である.

ところで $H_p(M^n)$ の基底は次の 3 つのタイプから構成される:

I 型 w_1 ($w_1 \in H_p(M''^{n-2})$),

II 型 $\theta \wedge w_2$ ($\theta \in H_1(M'^2), w_2 \in H_{p-1}(M''^{n-2})$),

III 型 $\pi \wedge w_3$ ($w_3 \in H_{p-2}(M''^{n-2})$)

II 型に対して, 条件 $(A)_p$ は, b'_1 または b''_{p-1} の何れかが 0 になることと同値である. III 型に対しては, 定理 5 における α として w_3 をとることができ, $(A)_p$ が常に

みたされていることが分かる。以上より次の定理が得られる。

定理 7 Riemann 積多様体 $M^n = M'^2 \times M''^{n-2}$ において, 条件 $(A)_{p-2}$, $(A)_{p-6}$,
 $\dots$, $(A)_{p-4r+2}$ が成り立つならば, 不等式

$$\sum_{i=0}^{2r} (-1)^i b_{p-2i} \geq 0$$

が任意の自然数 p, r に対して成り立つ。

参考文献

- [1] L. Karp, Parallel vector fields and the topology of manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 83(1976), 1051-1053.
- [2] A. Lichnerowicz, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Ed. Cremonese, Roma, 1955.
- [3] Y. Ogawa and S. Tachibana, Parallel vector fields and the Betti number, Proc. Japan Acad. 54(1978), 292-294.