

Root 系に付随した一次元多体問題

(量子力学系の場合)

広下 理學部 橋爪道考

序 同一質量をもつ n 個の粒子が、一直線上を運動している量子力学系で、そのハミルトニアンが

$$(T) \quad H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n-1} g_i^2 e^{2(x_i - x_{i+1})}$$

で与えられる系を (非周期的) 戸田系,

$$(C) \quad H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + g \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^{-2}$$

で与えられる系を Calogero 系と呼ぶ。ここに $x_1, x_2, \dots, x_n$ は n 個の粒子の位置を表わし, $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$ 及び g は零でない実定数とする。なお粒子の質量及び Planck 定数は 1 としてある。対応する古典力学系についてはその完全積分可能性及び運動の軌跡の具体的な記述はよく知られている (c.f. [6])。[5] において Kostant は (非周期的) 古典戸田系の拡張を、実分解型半単純リー環の実分解型カルタン部分環に関するルート系に付随して与え、その系の完全積分可能性と運動の exact な記述を与えた。又 Calogero 古典系に関しては Olshanetsky - P

erelomov([7]) が, ルート系に付随した拡張を与え, その完全積分可能性を古典型ルート系の場合に示している。一方[1]において Calogero は (C) で与えられるハミルトニアンの固有値問題 $H\psi = E\psi$ (E : エネルギー) の exact な解を構成し, その系の散乱状態を考察している。

ここでは ルート系に付随した下図 B の Calogero 量子系の拡張を, より広い class のルート系に對して与える。更に Berger-大島の意味での半単純対称空間に付随したルート系に對応して得られる力学系を導入する。これらの拡張された系のハミルトニアンは, それを与えるルート系に對応する対称空間のラプラス-ベルトラミ作用素と密接な関係にあり, 従って その固有値問題の考察には 現在著しい発展を遂げつつある等質空間上の調和解析の理論が 重要な役割を果す。この立場から 我々は固有関数の具体的な決定を行う。

記号と定義 $(V, (\cdot, \cdot))$ を n 次元ユークリッド空間とする。

R : V 内のルート系 (簡單のため既約とする)。 B : R の基。

R_+ : 對応する R の正のルート系, W : R の Weyl 群とする。

$\mathfrak{g}$: 実半単純リー環, $B(x, y)$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式,

σ : $\mathfrak{g}$ の包含的自己同型, θ : σ と可換な $\mathfrak{g}$ のカルタン包含,

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ を天々 θ, σ に關する固有空間分解

のとき $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{g}_2$ (直和) が成立つ。

$\mathcal{O}_0$: $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}$ の極大可換部分環, $\mathcal{O}$: $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環

$\Sigma(\mathcal{O})$: $\mathfrak{g}$ の $\mathcal{O}$ に関するルート系, $\Sigma(\mathcal{O}_0)$: $\mathfrak{g}$ の $\mathcal{O}_0$ に関するルート系.

$\alpha \in \Sigma(\mathcal{O})$ に対し, そのルート空間 $\mathfrak{g}^\alpha$ の次元を m_α , 同様に $\alpha \in \Sigma(\mathcal{O}_0)$

に対し, そのルート空間を $\mathfrak{g}^\alpha$ と表わす. このとき m_α^+, m_α^- を

$$m_\alpha^+ = \dim(\mathfrak{g}^\alpha \cap (\mathfrak{f} \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{g} \cap \mathfrak{p})), m_\alpha^- = \dim(\mathfrak{g}^\alpha \cap (\mathfrak{f} \cap \mathfrak{p} + \mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}))$$

で定義する.

ルート系に付随した量子力学系. 上の記号のもとに先づ戸

田系 $\mathcal{U}$ は Calogero 系の核張を与える. $V = \mathcal{O}$ にとり, 内積 $(,)$

は Killing 形式の $\mathcal{O}$ への制限で定義する. ルート系 R として

$\Sigma(\mathcal{O})$ をとる. $B \in R = \Sigma(\mathcal{O})$ の基, R_+ を対応する正のルート系と

する. $V = \mathcal{O}$ のユークリッド計量 $(,)$ に関するラプラス-ベル

トラミ作用素を Δ で表わす.

定義 1. ルート系 $R = \Sigma(\mathcal{O})$ に付随した戸田系とは ハミル

トン $\mathcal{H} = \mathcal{A}$ が 次で与えられる $V = \mathcal{O}$ 上の量子系とする.

$$H_T = -\frac{1}{2} \Delta + \sum_{\alpha \in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha(x)}$$

ここに g_α ($\alpha \in B$) は零でない実定数とする.

定義 2. ルート系 $R = \Sigma(\mathcal{O})$ に付随した Calogero 系とは, ハミ

ルト $\mathcal{H} = \mathcal{A}$ ン

$$H_C = -\frac{1}{2} \Delta + \sum_{\alpha \in R_+} g_\alpha \alpha^{-2}(x)$$

をもつ $V = \mathcal{O}$ 上の量子系である. ここに g_α ($\alpha \in R_+$) は

C を実定数として,

$$(1) \quad g_\alpha = 2^{\frac{1}{2}}(\alpha, \alpha) \{ m_\alpha (m_\alpha + 2m_{2\alpha}) c^2 - m_\alpha c \}$$

で与えられる定数 (但し, $2\alpha \notin R$ のとき $m_{2\alpha} = 0$ とする)。

次に半単純対称空間のルート系 $\Sigma(\mathfrak{g}_0)$ に付随した量子力学系を与える。この場合 $V = \mathfrak{g}_0$; 内積 $(,) = \text{Killing 形式の } \mathfrak{g}_0$ の制限, $R = \Sigma(\mathfrak{g}_0)_+$ とする。 R の正のルートを R_+ とし, Δ は $V = \mathfrak{g}_0$ の Laplace-Beltrami 作用素とする。

定義 3. ルート系 $R = \Sigma(\mathfrak{g}_0)$ に付随した量子系とは

$\mathfrak{h} \ni \text{ル} \text{ト} = \mathfrak{A} \ni \text{ハ}$

$$H_S = -\frac{1}{2}\Delta + \sum_{\alpha \in R_+} \left(\frac{g_\alpha^+}{\sinh^2 \alpha(x)} - \frac{g_\alpha^-}{\cosh^2 \alpha(x)} \right)$$

で与えられる $V = \mathfrak{g}_0$ 上の系とする。ここには g_α^+, g_α^- ($\alpha \in R_+$)

は C を実定数として 夫々

$$(2) \quad \begin{cases} g_\alpha^+ = 2^{\frac{1}{2}}(\alpha, \alpha) \{ m_\alpha^+ (m_\alpha^+ + 2m_{2\alpha}^+) c^2 - m_\alpha^+ c \} \\ g_\alpha^- = 2^{\frac{1}{2}}(\alpha, \alpha) \{ m_\alpha^- (m_\alpha^- + 2m_{2\alpha}^-) c^2 - m_\alpha^- c \} \end{cases}$$

で与えられる定数とする。但し $2\alpha \notin R$ のとき $m_{2\alpha}^\pm = 0$ とおく。又 $\sinh = \sinh$, $\cosh = \cosh$ と略記する。

(注意) 1. H_T において, 定数 g_α は各ルートの対して $g_{s\alpha} = g_\alpha$ ($s \in W$) となるように与えておけば H_T は基本 $\mathfrak{B}$ のとり方によらない。同様に H_C, H_S における定数 $g_\alpha, g_\alpha^\pm$ を与える式 (1), (2) の右辺は Weyl 群不変, 従って $\mathfrak{h} \ni \text{ル} \text{ト} = \mathfrak{A} \ni \text{ハ}$ H_C, H_S は Weyl 群不変であり正のルートを R_+ のとり方によらない。

注意 2 序で与えられた $\mathfrak{h} \ni \text{ル} \text{ト} = \mathfrak{A} \ni \text{ハ}$ (T), (C) において重心座

標を分離して得られるハミルトニアンは $\mathbb{H}_T, \mathbb{H}_C$ で A_{n-1} 型被約ルート系で各ルート α に対し $m_\alpha=1$ となる場合に得られるハミルトニアンに一致する。但し $g=c^2-c$ である。

以下 R が被約ルート系で更に各 α に対し $m_\alpha=1$ となる場合に $\mathbb{H}_T, \mathbb{H}_C$ の具体的な表示を与える。(E型ルート系は省略)。

$$\begin{cases} (B_l) & \mathbb{H}_T = -\frac{1}{2}\Delta + g_1 e^{2(x_1-x_2)} + \dots + g_{l-1} e^{2(x_{l-1}-x_l)} + g_l e^{2x_l} & (V=\mathbb{R}^l) \\ (C_l) & \mathbb{H}_T = -\frac{1}{2}\Delta + g_1 e^{2(x_1-x_2)} + \dots + g_{l-1} e^{2(x_{l-1}-x_l)} + g_l e^{4x_l} & (V=\mathbb{R}^l) \\ (D_l) & \mathbb{H}_T = -\frac{1}{2}\Delta + g_1 e^{2(x_1-x_2)} + \dots + g_{l-1} e^{2(x_{l-1}-x_l)} + g_l e^{2(x_{l-1}+x_l)} & (V=\mathbb{R}^l) \\ (G_2) & \mathbb{H}_T = -\frac{1}{2}\Delta + g_1 e^{2(x_1-x_2)} + g_2 e^{2(-2x_1+x_2+x_3)} & (V=\{x \in \mathbb{R}^3: x_1+x_2+x_3=0\}) \\ (F_4) & \mathbb{H}_T = -\frac{1}{2}\Delta + g_1 e^{2(x_2-x_3)} + g_2 e^{2(x_1-x_4)} + g_3 e^{2x_4} + g_4 e^{(x_1-x_2-x_3-x_4)} & (V=\mathbb{R}^4) \end{cases}$$

$$(B_l)=(C_l). \quad \mathbb{H}_C = -\frac{1}{2}\Delta + g \left\{ 2^l \sum_{1 \leq i \leq l} x_i^{-2} + \sum_{1 \leq i < j \leq l} ((x_i-x_j)^{-2} + (x_i+x_j)^{-2}) \right\}$$

$$(D_l) \quad \mathbb{H}_C = -\frac{1}{2}\Delta + g \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq l} ((x_i-x_j)^{-2} + (x_i+x_j)^{-2}) \right\}$$

$$(G_2) \quad \mathbb{H}_C = -\frac{1}{2}\Delta + g \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i-x_j)^{-2} + 3((2x_1-x_2-x_3)^{-2} + (2x_2-x_3-x_1)^{-2} + (2x_3-x_1-x_2)^{-2}) \right\}$$

(F₄) 省略。

尚 $\mathbb{H}_S$ の表示に現われる $m_\alpha^+, m_\alpha^-, m_\alpha^+$ の具体的な値は各ルート系 $R = \sum(\alpha_i)$ に対し、南口氏によって計算されている。

固有値問題 (戸田系の場合)

この節では 定義1 で与えられたハミルトニアン $\mathbb{H}_T$ の固有値問題を考察する。最初に対応する古典力学系について簡単に触れておく、 $\mathbb{H}_T$ に対応する古典系のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}(y, y) + \sum_{\alpha \in R} g_\alpha^2 e^{2(\alpha, x)}, \quad (x, y) \in V \times V$$

で与えられる。但し V とその双対空間 V^* とは内積 $(,)$ により同一視しておく。并添するハミルトンの運動方程式は,

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2 \sum_{\alpha \in B} g_{\alpha}^2 e^{2(\alpha, x)} \alpha \end{cases}$$

で与えられる。この運動方程式に并添する Lax pair の一例を挙げておく。各 $\alpha \in B$ に對し $e_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha} \in$, $-B(e_{\alpha}, \theta e_{\alpha}) = 1$ を満たすようにとる, このとき $\theta e_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, $[e_{\alpha}, \theta e_{\alpha}] = -\alpha$ である。

$L \in \mathfrak{g}$, $M \in \mathfrak{k} \in$

$$\begin{cases} L = \gamma + \sum_{\alpha \in B} g_{\alpha} e^{(\alpha, x)} (e_{\alpha} - \theta e_{\alpha}) \\ M = \sum_{\alpha \in B} g_{\alpha} e^{(\alpha, x)} (e_{\alpha} + \theta e_{\alpha}) \end{cases}$$

とおく。このとき

$$\dot{L} = [L, M] \Leftrightarrow \text{Hamilton の運動方程式} (*)$$

が成立し, この系の運動の積分は $P(L)$ ($P \in S(\mathfrak{g})^K = \mathfrak{g}$ 上の K -不変多項式環) で与えられ, このことから完全積分可能であることも示される。

再び 戸田量子力学系に戻って, 我々はハミルトン $= \gamma \in \mathfrak{H}_T$ と并称空間 G/K の Laplace-Beltrami 作用素の関係と考察する。ここには G/K は Riemann 并称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ に并添する Riemann 并称空間である。まず

$$\mathfrak{H}_T \oplus = E \oplus \quad (E: \text{エネルギー})$$

を变形して

$$(\Delta - 2 \sum_{\alpha \in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha}) \Phi = -2E \Phi$$

を得る。 $\nu \in \mathcal{O}_\mathbb{C}^*$ ($\mathcal{O} = V$ の複素双対空間) へ $(\nu, \nu) = -2E$ を満たすようにとる。従って我々の考察する微分方程式は

$$(\Delta - 2 \sum_{\alpha \in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha}) \Phi = (\nu, \nu) \Phi$$

となる。 π を $\mathfrak{g}$ の部分リー環で、 $\pi = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}^\alpha$ であるものとする。 $\pi, \mathcal{O}$ に対応する G の解析的部分群を夫々 N, A と書く。このとき $G = NAK$ が成立ち、 G の各元 g は $g = nak$ ($n \in N, a \in A, k \in K$) と一意的に分解する (岩沢分解)。

さて 定数の組 $\{g_\alpha : \alpha \in B\}$ に對し π から $\mathbb{R}$ へのリー環としての準同型 η 以下のように定める。所で一般に π から $\mathbb{R}$ へのリー環としての準同型は 交換子 $[\pi, \pi] = 0$ で 従って $\pi/[\pi, \pi]$ 上の1次形式と同一視される。しかるに $\pi/[\pi, \pi]$ は $\sum_{\alpha \in B} \mathfrak{g}^\alpha$ と同型であるから η はその $\mathfrak{g}^\alpha$ ($\alpha \in B$) への制限 η_α で完全に決まる。我々は $\{g_\alpha : \alpha \in B\}$ に對し η_α ($\alpha \in B$) を

$$|\eta_\alpha|^2 = g_\alpha^2 \quad (\alpha \in B)$$

を満たすようにとり 固定する。ここには $|\eta_\alpha|$ は $\mathfrak{g}^\alpha$ 上の1次形式 η_α の、 $\mathfrak{g}$ (従って $\mathfrak{g}^*$) の内積 $-B(x, \theta y)$ に因する長さである。

$\{\eta_\alpha : \alpha \in B\}$ により定まる π の準同型 η は、 N の一次元表現 ψ_η を

$$\psi_\eta(\exp X) = e^{i\eta(X)} \quad (X \in \pi)$$

により与える。

G 上の C^∞ -関数のなす空間 $C^\infty_\gamma(G/K)$ を

$$C^\infty_\gamma(G/K) = \{ f \in C^\infty(G) : f(ngk) = \psi_\gamma(n) f(g) \quad (n \in N, k \in K) \}$$

で定義する。右既約分解 $G = NAK$ より $C^\infty_\gamma(G/K)$ の元 f はその A への制限 f_A により完全に決まる。 $\mathcal{O} = V$ 上の C^∞ -関数 $f_\alpha \in f_\alpha = f_A \circ \exp$ で定める。 $\rho \in \mathcal{O}^*$ を

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} m_\alpha \alpha$$

で定義する。

Lemma 1 $f \mapsto e^{-\rho} f_\alpha$ は $C^\infty_\gamma(G/K)$ と $C^\infty(\mathcal{O})$ の間の同型対応を定める。更に $L^2_\gamma(G/K) = \{ f : \int_A |f_A(a)|^2 e^{-2\rho(\log a)} da < \infty \}$ とおくと、上の対応により $L^2_\gamma(G/K) \cong L^2(\mathcal{O})$ が成立す。

Corollary 2 $\Delta_{G/K}$ は G/K 上の Laplace-Beltrami 作用素とする。このとき任意の $f \in C^\infty_\gamma(G/K)$ に対し、

$$e^{-\rho} (\Delta_{G/K} f)_\alpha = \left(\Delta - 2 \sum_{\alpha \in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha} - (\rho, \rho) \right) (e^{-\rho} f_\alpha).$$

証明は [4] を参照せよ。

上の系より、次の言える。先づ

$$(\Delta - 2 \sum_{\alpha \in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha}) \Phi = (\nu, \nu) \Phi \Leftrightarrow (\Delta - 2 \sum_{\alpha \in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha} - (\rho, \rho)) \Phi = (\nu, \nu) - (\rho, \rho) \Phi$$

従って、同型 $C^\infty(\mathcal{O}) \cong C^\infty_\gamma(G/K)$ により Φ に対応する $C^\infty_\gamma(G/K)$ の元を f_Φ と書くことは下れば

$$(\Delta - 2 \sum_{\alpha \in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha}) \Phi = (\nu, \nu) \Phi \Leftrightarrow \Delta_{G/K} f_\Phi = (\nu, \nu) - (\rho, \rho) f_\Phi$$

言い換えれば、戸田量子力学系の固有値問題 $H_\Gamma \Phi = E \Phi$ と

$L^2_\gamma(G/K)$ における $\Delta_{G/K}$ の固有値問題は同値である。

$D(G/K)$ を, G/K 上の G -不変微分作用素環とする。 $D(G/K)$ は可換な多元環で 実際 $S(\mathfrak{a})^W (= \mathfrak{a}$ の Weyl 群不変多項式環) と同型 (c.f [2]) である。 もちろん $\Delta_{G/K} \in D(G/K)$ である。 又 $C^\infty_\eta(G/K)$ は $D(G/K)$ -加群であることも容易にわかる。 上に述べた系は、
は次の補題の系である。

Lemma 3 (c.f [4]). 各 $D \in D(G/K)$ に對し, $S(D) \in \text{Diff}(\mathfrak{a})$ が存在し 任意の $f \in C^\infty_\eta(G/K)$ に對し

$$e^{-\rho}(Df)_\mathfrak{a} = S(D)(e^{-\rho}f)_\mathfrak{a}.$$

更に $S: D \mapsto S(D)$ は $D(G/K) \rightarrow \text{Diff}(\mathfrak{a})$ (中への同型) である。

Corollary 4. $S(D(G/K))$ の各元は ハミルトンian H_T と可換。

すでに述べたように $\mathfrak{g}$ が実分解型 のとき $\{\text{互換}\mathfrak{p}$ 固有の運動の積分 $\} \cong S(\mathfrak{p})^K$ であり、これと Chevalley の同型、

$$S(\mathfrak{p})^K \cong S(\mathfrak{a})^W$$

及び Harish-Chandra の同型 $D(G/K) \cong S(\mathfrak{a})^W$ を用いれば

$$\{\text{互換}\mathfrak{p}$$
 固有の運動の積分 $\} \cong S(\mathfrak{p})^K \cong S(\mathfrak{a})^W \cong D(G/K) \cong S(D(G/K))$

となる。 $S(D(G/K))$ の元は $\mathfrak{p}$ 固有量子力学系の“積分”ともいえるものである。

以下 $(\Delta - 2 \sum_{\alpha \in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha})\Phi = (v, v)\Phi$ の解を構成する。

$L = \{ \sum_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha : \text{各 } n_\alpha \text{ は非負整数} \}$ とおく。 天下りの形で与えるが 次の報数を考える。

$$\Phi_v(x) = e^{v(x)} \sum_{\lambda \in L} a_\lambda(v) e^{\lambda(x)} \quad (x \in \mathfrak{a} = V).$$

ここに係数 $a_\lambda(v)$ は漸化式

$$a_0(v)=1, \quad \{(\lambda, \lambda)+2(\lambda, v)\} a_\lambda(v) = 2 \sum_{\alpha \in B} g_\alpha^2 a_{\lambda-2\alpha}(v) \quad (\lambda \in L \setminus \{0\})$$

により与えられるものとす。各 $\lambda \in L \setminus \{0\}$ に對し

$$\sigma_\lambda = \{v \in \mathcal{O}_c^* : (\lambda, \lambda) + 2(\lambda, v) = 0\}$$

とおき $\mathcal{O}_c^* = \mathcal{O}_c^* \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in L \setminus \{0\}} \sigma_\lambda \right)$ とおく。 $\mathcal{O}_c^*$ は $\mathcal{O}_c^*$ の連結、稠密な開集合で、 $\mathcal{H} \mathcal{O}_c^*$ を含む。 $v \in \mathcal{O}_c^*$ のとき、 $a_\lambda(v)$ は上の漸化式により一意的に定まる。

Theorem 5. 関数 $\Phi_v(x)$ は $\mathcal{O}_c^* \times \mathcal{O}$ 上に定義・様絶収束し、各 $v \in \mathcal{O}_c^*$ に對し微分方程式

$$(\Delta - 2 \sum_{\alpha \in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha}) \Phi_v = (v, v) \Phi_v$$

を満たす。更に Φ_{sv} ($s \in W$) も又上の解である。

証明 (c.f [4]).

注意 上に与えられた Φ_v は $\dim \mathcal{O} = 1$ のとき、才一種変形 Bessel 関数 I_ν に定数倍を除いて一致する。

命題 6 $\mathcal{O}_- = \{x \in \mathcal{O} : (\alpha, x) < 0 \ (\forall \alpha \in B)\}$ とおくとき、

$$\Phi_v(x) \sim e^{v(x)} \quad x \rightarrow \infty \quad (\mathcal{O}_- \text{ の中で}).$$

次に Φ_v と同列の固有関数を与える。それは次の積分表示で与えられる。 G の元 g の岩沢分解を $g = n \exp H(g) k$ ($n \in N$, $H(g) \in \mathcal{O}$, $k \in K$) と書く。 $s_0 \in W$ の元 z に対して $s_0 R_+ = -R_+$ なる元とし、

$$W_v(x) = e^{(s_0 v)(x)} \int_{\pi} e^{(v+p)(H(s_0^{-1} \exp X))} e^{-i\eta(e^{\text{ad}_X} X)} dX \quad (x \in \mathcal{O}).$$

(dX は $\mathcal{O}$ 上の Lebesgue 測度) と $W_v(x)$ を定義する。

定理 7 上の積分は $\operatorname{Re}(v, \alpha) > 0$ ($\alpha \in B$) で絶対収束し、 v により $\mathcal{O}_c^*$ 上の整関数に解析接続される。 $\lambda \in \mathcal{O}$ の関数として微分方程式 $(\Delta - 2 \sum_{\alpha \in B} g_\alpha^2 e^{2\alpha}) W_\nu = (v, v) W_\nu$ を満たす。

定理 8 $\mathcal{O}_+ = \{ \lambda \in \mathcal{O} : (\alpha, \lambda) > 0 \ (\forall \alpha \in B) \}$ とおく。

$$\text{そこで} \quad \begin{cases} W_\nu(\lambda) \rightarrow 0 & (\lambda \rightarrow \infty \text{ in } \mathcal{O}_+) \\ W_\nu(\lambda) \sim C(\nu) e^{(S_0, \lambda)} & (\lambda \rightarrow \infty \text{ in } \mathcal{O}_-) \end{cases}$$

ここで $C(\nu)$ はいわゆる Harish-Chandra の $\mathbb{C}$ -関数で Γ -関数を用いて具体的に表されるものである。(c.f [3]).

(注) $W_\nu(\lambda)$ は $\dim \mathcal{O} = 1$ のとき 2 種変形 Bessel 関数に定数倍を除いて一致する。又上で与えた重 ν , W_ν は $\delta(D(G/K))$ の同時固有関数でもあり $W_\nu \in \overline{\mathbb{Q}}_{SV} (S \in W)$ の一次結合として exact に表わすことも可能である。

Calogero 系の固有値問題

Calogero 系のハミルトン $= \mathcal{H} \in \mathbb{H}_\mathbb{C}$ に対し、 $\mathbb{H}_\mathbb{C} \ni \mathcal{H} = E \mathcal{H}$, 即ち

$$(-\frac{1}{2}\Delta + \sum_{\alpha \in R_+} g_\alpha \alpha^2) \mathcal{H} = E \mathcal{H}$$

の exact な解を構成する。ここは g_α は (2) で与えられた定数。

$V_+ = \mathcal{O}_+$ を定理 8 で与えられた Weyl 領域とし 我々は V_+ での微分方程式の解を決定し V 全体には Weyl 群不変性を満たすように延長する。 V_+ での次の関数を考える。

$$\pi(x) = \prod_{\alpha \in R_+} \alpha(x)^{m_\alpha}.$$

このとき次の補題が基本的である。

補題 9 C を実数とする。このとき

$$\Delta \pi^C = \pi^C \sum_{\alpha \in R_+} (m_\alpha(m_\alpha + 2m_{2\alpha})C^2 - m_\alpha C)(\alpha, \alpha) \alpha^{-2}$$

但 $m_{2\alpha} = 0$ ($2\alpha \notin R$) とする。

証明. 直接 $\Delta \pi^C$ を計算するに依る。

$$\Delta \pi^C = \pi^C \sum_{\alpha \in R_+} (m_\alpha^2 C^2 - m_\alpha C)(\alpha, \alpha) \alpha^{-2} + C^2 \pi^C \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} m_\alpha m_\beta (\alpha, \beta) \alpha^{-1} \beta^{-1}.$$

$$I = \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} m_\alpha m_\beta (\alpha, \beta) \alpha^{-1} \beta^{-1} \quad \text{と置く。} \quad R \text{ が被約ルート系の場合}$$

に $I = 0$ である。 I は W -不変であることが容易にわかる。

$\pi_0 = \pi \sum_{\alpha \in R_+} \alpha$ と置く。 R が被約より π_0 は W -skew-invariant. 従って

$\pi_0 I$ は W -skew-invariant な多項式。 所が $\pi_0 I$ の次数は π_0 の次数より小。 $\pi_0 I$ は π_0 で割り切れるはずだが。 これは $I = 0$ に限る。

R が被約でないとき、 $R = (BC)_\ell$ 型であることと被約ルートの系における結果から やはり補題を得る。

上の補題より $\Psi = \pi^C \Psi$ により内積 Ψ を導入すれば

$$\left(\Delta - \sum_{\alpha \in R_+} (m_\alpha(m_\alpha + 2m_{2\alpha})C^2 - m_\alpha C)(\alpha, \alpha) \alpha^{-2} \right) \Psi = -2E\Psi$$

は Ψ に因する微分方程式

$$L_C \Psi + 2E\Psi = 0$$

になる。 ここに L_C は次で与えられる V 上の微分作用素。

$$L_C = \Delta + 2C \sum_{\alpha \in R_+} m_\alpha \alpha^{-1} H_\alpha$$

但し H_α は $\alpha \in V$ の定める一階の微分作用素 (即ち $(H_\alpha f)(x) = \frac{d}{dt} f(x+td)|_0$)。

注意 $C^\infty(\mathbb{R})^K$ は $\mathbb{R}$ 上の K -不変 C^∞ -関数の空間、 $\Delta_{\mathbb{R}} \in \text{Kill}$ -ing 形式に因する $\mathbb{R}$ の Laplace-Beltrami 作用素とする。 この

とき $(\Delta_{\mathfrak{p}} f)_a = L_{\frac{1}{2}} f_a$ が 任意の $f \in C^{\infty}(\mathfrak{p})^K$ に 対し 成立つ。但し f_a は f の a への制限とする。これにより $C = \frac{1}{2}$ のときは $\mathfrak{p}$ 上の K -不変関数で $\Delta_{\mathfrak{p}}$ の固有関数であるものと Calogero 型の固有関数が対応する。 $\Delta_{\mathfrak{p}}$ の $L^2(\mathfrak{p})^K$ に おける スペクトル分解は カルタニ運動群の表現論を用いてよく知られている。ここでは C が一般の場合に $L_c \psi + 2E\psi = 0$ の解を 変数分離法により求める。

$r = (x, x)^{\frac{1}{2}} \quad (x \in V)$ とおき $\psi(x) = f(r)P(x)$ (但し $P(x)$ は V 上の k 次斉次多項式) の形の解を求めよう。 f 及び P は 次の微分方程式の解でなければならぬ。

$$(*) \quad f''(r) + (2cM + l + 1 + 2k)r^{-1}f' + 2Ef = 0 \quad (\text{但し } M = \sum_{\alpha \in R_+} m_{\alpha}).$$

$$(**) \quad L_c P = 0$$

(*) は Bessel の微分方程式で、零解でない正則な解は

$$f_{k,E}(r) = r^{-(a+k)} J_{a+k}(\sqrt{2E}r) \quad (a = cM + \frac{1}{2} - 1)$$

で与えられる。

$$V_k = \{P: k\text{-次斉次多項式} \text{ かつ } L_c P = 0\} \text{ とおく。}$$

V_k の元は W -不変 (但し $m_{\alpha}C \notin -N$ のとき) であることが示される。そこで I^k で、 W -不変 k -次斉次多項式の空間を表わすとき $L_c(I^k) \subset I^{k-2}$ が成立ち、従って $\dim I^k > \dim I^{k-2}$ なる k に 対しては $\dim V_k > 0$ である。そのような k は W -不変多項式環のポアソニカル級数を用いて決定可能である。

半単純対称空間に付随した力学系.

最後に 半単純対称空間に付随した力学系について簡単に述べる。定義3で与えられたハミルトン H_S と又 半単純対称空間の Laplace-Beltrami 作用素と 密接に関連している。

補題 10. $\mathcal{O}_0^+ \in \mathcal{O}_0$ の 1 つの Weyl 領域とする。 $\mathcal{O}_0^+$ 上の関数 δ と

$$\delta(x) = \prod_{\alpha \in R_+} (\text{sh } \alpha(x))^{m_\alpha^+} \prod_{\alpha \in R_+} (\text{ch } \alpha(x))^{m_\alpha^-}$$

で与える。このとき $C \in \mathbb{R}$ 実定数として

$$\begin{aligned} \delta^{-C} \Delta \delta^C &= 4C^2 (\rho_0, \rho_0) \\ &+ \sum_{\alpha \in R_+} (\alpha, \alpha) \left\{ \frac{m_\alpha^+ (m_\alpha^+ + 2m_{2\alpha}^+) C^2 - m_\alpha^+ C}{\text{sh}^2 \alpha} - \frac{m_\alpha^- (m_\alpha^- + 2m_{2\alpha}^-) C^2 - m_\alpha^- C}{\text{ch}^2 \alpha} \right\} \end{aligned}$$

が成立つ。ここで $\rho_0 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} (m_\alpha^+ + m_\alpha^-) \alpha$ とおく。

証明. 補題 9. と類似の方法による。又 $(m_\alpha^+ - m_\alpha^-) m_{2\alpha}^- = 0$ なる関係を用いる。

この補題を用いれば $H_S \Phi = E \Phi$ は

$$\{\Delta - \delta^{-C} \Delta \delta^C - 4C^2 (\rho_0, \rho_0)\} \Phi = -2E \Phi$$

と変形される。所以半単純対称空間 G/H の Laplace-Beltrami 作用素の分解 $G = K A_0 H$ に因する動径部分 $\in L_{1/2}$ と書くとき

$$\delta^{-1/2} L_{1/2} \delta^{1/2} = \Delta - \delta^{-1/2} \Delta \delta^{1/2}$$

が成立する。従って $C=1/2$ の場合 固有値問題 $H_S \Phi = E \Phi$ は半単純対称空間の Laplace-Beltrami 作用素の固有値問題に帰着される。大島-関口-松本氏等によって発展を遂げつつある 半単純対称空間上の調和解析の諸結果が ここに於て重要な役

割を果すであろう。尚、対応する古典系について考察すること
とは興味深い問題であると思われる。

文献

- [1] F. Calogero, J.M.P., 12 (1971).
- [2] Harish-Chandra, Amer. J. Math., 80, (1958).
- [3] M. Hashizume, Japan. J. Math., 5, (1979).
- [4] M. Hashizume, Preprint.
- [5] B. Kostant, Advance in Math., 34, (1979).
- [6] J. Moser, Advance in Math., 16, (1975).
- [7] M. Olshametsky - A. Perelomov, Invent. Math., 37, (1976).
- [8] T. Oshima - J. Sekiguchi, Invent. Math., 57, (1980).