

オイラーの代数学完全入門

九州大学大学院数理学府 M2 石原 優介 (YUSUKE Ishihara)
Graduate school of Mathematics,
Kyushu University.
日本オイラー研究所

1 代数学完全入門について.

1.1 代数学完全入門の変遷.

オイラー全集 I-I "Vollständige Anleitung zur Algebra" 『代数学完全入門』は全 2 巻編成でドイツ語で書かれている. エネストレームナンバーは第 1 巻は E387, 第 2 巻は E388 である. 2 巻とも 1767 年に執筆され 1770 年に刊行されることになるが, この原典版の刊行に先立って 1768 年にロシア語の翻訳版が刊行されている. 『代数学完全入門』は『聖書』, 『ユークリッド原論』に次いで 3 番目によく売れた書物と言われておりその他多くの言語で翻訳されている. 特に, 1774 年にはヨハン・ベルヌーイ III 世によるフランス語訳全 2 巻が刊行され, 第 1 巻を「定解析」として内容は原典の第 1 巻から第 2 巻の第 1 章までとし, 第 2 巻を「不定解析」として内容は原典の第 2 巻の第 2 章と改編してあり, 最後にはラグランジュの長大な付記が掲載してある.

1.2 代数学完全入門の序章.

この代数学完全入門の序章では, オイラーの人間性や学問に対する姿勢, この入門書の制作過程などが記されている.

～ 序章 ～

既に, 2 年前にロシア語への翻訳が刊行されたこの作品を高度な計算技術を愛好する人々に伝える.

世界的に名声のある著者 (オイラー) の意図自体は, 人々が何の手助けもなしに代数学を容易に理解し, 徹底的に習得することのできる教科書をつくることである.

彼の失明は, 彼の中にこのような思考を呼び起こし, そして彼は彼の常に働いて止まない精神に駆り立てられて, 彼の意図を一冊の作品にまとめる事に躊躇はなかった. この目的の為に, 彼は一人の若者を選び, 彼の手伝いの為にベルリンから一緒に連れて来た. 彼はかなり巧に計算をするも, 全く数学の概念がなかった. 彼の仕事は仕立て職人であり, 彼の能力は並みの頭脳に足りるくらいの程度であった. 彼は, 特に留意することもなく, 偉大な先生 (オイラー) が口述し, 書き取るように命じた全ての事柄をよく理解したばかりか, 短期間で引き続き現れる難しい文字計算をすべて詳細に説明し, 彼に与えられたすべての代数学の諸問題を高度な技術をもって解決できる状態に至った.

この事実は, オイラーの口述とこの作品の教授法の評価をますます高めてくれるのである. というのは, この作品を書き取り, 理解し, 詳細に説明したこの若者は, この有名な盲目の先生 (オイラー) 以外の誰からもほんのわずかな支援さえ受けなかったからである.

このような長所の他に, 数学の専門家は対数の理論及び他の計算技術との関連, 並びに 3 次及び 4 次の方程式の解法の為に与えられる方法をもまた喜びをもって読み, 感動を覚えることであろう. デイオファントスの問題を愛好する人々は, 第 2 部の最後の章について喜ぶであろう. その章では, これらの問題の解決のために必要とされるあらゆる技術が解明されている.

オイラーは以前から”他者からの教授なしに一人で学ぶことできる代数学の教科書”を作りたかったという意図が伺え、そのきっかけになったのがオイラーの失明であったことも分かる。また、数学の知識を全く持っていなかった若者がオイラーの口述を書き取るだけに終わらず代数学を理解してしまった事実からオイラーは卓越した説明力、教授力の持ち主であることを物語っている。

1.3 目次からみた全体の内容.

～ 第 一 部 ～ — 第一章 単一量の様々な計算法 —

第一節	一般に数学とは
第二節	記号+ (プラス), - (マイナス) の説明
第三節	単一量の掛け算
第四節	因数からみる整数の本質
第五節	単一量の割り算
第六節	約数からみる整数の諸性質
第七節	一般に分数とは
第八節	分数の諸性質
第九節	分数の足し算と引き算
第十節	分数の掛け算と割り算
第十一節	平方数について
第十二節	平方根, および平方根から生じる非有理数
第十三節	平方根から生じる不可能数, もしくは想像数
第十四節	立方数について
第十五節	立方根, および立方根から生じる非有理数
第十六節	一般に冪乗とは
第十七節	冪乗の計算法について
第十八節	冪乗における根について
第十九節	分数指数による無理数の表現
第二十節	一般に様々な計算法とそれらの関係とは
第二十一節	一般に対数とは
第二十二節	常用の対数表について
第二十三節	対数の表示法について

— 第二章 合成量の様々な計算法 —

第一節	合成量の足し算
第二節	合成量の引き算
第三節	合成量の掛け算
第四節	合成量の割り算
第五節	分数の無限級数展開について
第六節	合成量の平方について
第七節	合成量の開平について
第八節	無理数の計算法について
第九節	合成量の立方と開立について
第十節	合成量の高冪について
第十一節	二項定理の証明における, 文字の交換について
第十二節	非有理な冪の無限級数展開について
第十三節	負冪の無限級数展開について

— 第三章 比率と比例式 —

第一節	算術的比率, または 2 数間の比率について
第二節	比例式について
第三節	等差数列
第四節	等差数列の和
第五節	図形的, または多角形的数
第六節	幾何学的比率
第七節	最大公約数
第八節	幾何学的比例式について
第九節	比例式とその応用の考察

第十節	合成比について
第十一節	等比数列
第十二節	無限十進小数について
第十三節	比計算について

～ 第 二 部 ～

— 第一章 代数方程式とその解法 —

第一節	一般に、代数方程式問題を解くとは
第二節	1 次方程式とその解法
第三節	この場合に相応しい幾つかの問題の解答
第四節	1 次連立方程式の解法
第五節	純 2 次方程式の解法
第六節	混合 2 次方程式の解法
第七節	多角形的数の根の開方
第八節	2 項の平方根の開平
第九節	2 次方程式の本質
第十節	純 3 次方程式の解法
第十一節	3 次方程式の完璧な解法
第十二節	カルダノ、およびフェラリの公式
第十三節	4 次方程式の解法
第十四節	ボムベリの公式～4 次方程式の解法を 3 次方程式の解法にする～
第十五節	4 次方程式の新しい解法
第十六節	近似による方程式の解法

— 第二章 不定解析 —

第一節	1 次不定方程式
第二節	コエキ規則～2 つの方程式から 3 つ以上の未知数を決定する～
第三節	未知数の 1 つが 1 次であるような不定方程式について
第四節	非有理式 $\sqrt{a+bx+cx^2}$ の有理化
第五節	式 $a+bx+cx^2$ が平方にならない場合
第六節	式 ax^2+b が平方となる整数の場合
第七節	式 an^2+1 を整数の平方数にする特別な方法
第八節	非有理式 $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3}$ の有理化
第九節	非有理式 $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}$ の有理化
第十節	非有理式 $\sqrt[3]{a+bx+cx^2+dx^3}$ の有理化
第十一節	式 $ax^2+bxy+cy^2$ の因数における解法
第十二節	式 ax^2+cy^2 の 2 次以上の幕への変換
第十三節	平方数にならないような幾つかの式 ax^4+cy^4 について
第十四節	不定方程式における幾つかの問題の解答
第十五節	3 次不定方程式にそのような問題の解答

このように第 1 巻で、初等数学から高校程度の数学までの方程式を解くために必要な四則演算と冪根を学習させ数学の基礎的な教養を身につける。第 2 巻では 1 次方程式や 2 次方程式といった代数方程式の解法へと発展させ、続いて大学程度の不定解析へと発展していく内容である。現在の指導順序と比べて特に気になった点は、初等数学程度の四則演算であっても一般的な概念として文字の計算が出現する所である。つまり現在のように初頭数学の範囲でまとまった項目の日常生活で扱う計算技術を全て学習した後から抽象数学へと発展するのではなく、一つ一つの概念を学ぶ上で日常生活での具体的な事例を一般化しているということである。

2 オイラーのマイナス×マイナス.

2.1 オイラーの説明.

”マイナス×マイナスはなぜプラスになるのか”という疑問に対しては、様々な説明があるが日常生活の現象で表現する説明にはどれもいささか腑に落ちないものである。しかし、我々はそれを公理的な存在のように理解し数学を学んできている。では、オイラーはどのようにマイナス×マイナスを考え、どのような説明を与えているのだろうか。

第1部 第1章 第3節 33.

よって今や、残っている決めなければならない場合は、すなはち、一と一つまり $-a$ と $-b$ が掛けられるときの場合である。ここで、まず始めに、文字だけをみた積は ab となることは明らかである。しかし、それに対して符号+または-が置かれるべきかどうかは確かではないが、符号は+かあるいは-であるに違いないことは確かである。ところが、私は符号を-とすることはできないと主張する。なぜなら、 $-a$ と $+b$ の掛け算で $-ab$ が与えられるので、 $-a$ と $-b$ の掛け算が $-a$ と $+b$ の掛け算が与えるまさにそのものを与えるはずがなく、よってその逆である $+ab$ が出てくるに違いない。これから、-と-の掛け算は+が与えられ、ちょうど+と+の掛け算のような規則が生じる。

オイラーは積 $-a \times -b$ の絶対量は ab であるとしている点から”マイナス×マイナスという値は存在する”と考えていたことが分かる。オイラーはプラス×プラス、プラス×マイナスを日常生活における現象で丁寧に説明している。ところが、マイナス×マイナスとなると何か結果ありきの説明で素直に受け入れることができないのが本意である。すると、この代数学完全入門の英語訳版『Elements of Algebra』では直ぐに注釈を用意し別のマイナス×マイナスの説明を提示している。マイナス×マイナスの説明はオイラーの他にも考えられていたことが分かる。そして現在に至っても、多くの人が様々な説明の仕方を考えている。これは誰もがマイナス×マイナスがどうしてプラスになるのかの説明に十分に納得できてはいないからではないだろうか。それはオイラーの説明に対しても同様である。

3 オイラーの素数.

3.1 オイラーの定義.

オイラーは掛け算の概念を導入する中で、積と因数について説明した後に素数と合成数について次のように語っている。

第1部 第1章 第4節 38.

すべての整数のみを2つ、あるいはより多くの数の掛け算によって生じ得る限りで考察すると、いくつかの数は掛け算によって全く生じないこともあり、よって因数をもたない。一方、その他の数は2つ、あるいはより多くの数の互いの掛け算によって生じることもあり、つまり2つ、あるいはより多くの因数をもつ。したがって、

$$\begin{array}{l} 4 \text{ は } 2 \cdot 2, \quad 6 \text{ は } 2 \cdot 3, \quad 8 \text{ は } 2 \cdot 2 \cdot 2, \\ \text{さらに } 27 \text{ は } 3 \cdot 3 \cdot 3, \quad 10 \text{ は } 2 \cdot 5, \quad \dots \end{array}$$

となる。

第1部 第1章 第4節 39.

反対に、

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$$

のような数は1を利用して、例えば2を $1 \cdot 2$ によって考えるときでなければ、そのような形にならないことが考えることができる。しかし、1と掛けられる数は、その数と変わらないので、1は因数に数えられない。2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... のような幾つかの因数によって表現することのできないこれらのすべての数は、単純数、または素数と呼ばれる。逆に、4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, ... のような幾つかの因数によって表現される残りの数は、合成数と呼ばれる。

オイラーは「2つ以上の因数の積で表現されない数を素数、それ以外を合成数」を定義としている。現在、素数の定義は「1とその数自身しか約数をもたない2以上の自然数」となっているが、ここには素数の見方の違いが現れている。それは「因数から見た素数」と「約数から見た素数」である。例えば数5に関して、現在の定義では5は1と5しか約数を持たないので素数となる。一方、オイラーの素数の定義では「1は因数に数えない」という理由から、5は（自然数の範囲で）因数の積で表現できないので素数となる。これから、素数は割り算の概念を知らずとも掛け算を学ぶ段階で導入できる概念であると考えることができる。

4 オイラーの分数.

4.1 オイラーの分数の本質.

オイラーは整数を整数で割るときに商が整数では表せない場合、つまり割り切れない場合に対して「商は整数で表せないにも関わらず商の明白な概念は存在する」といい新しい種類の数を導入した。それが分数である。そして、オイラーは以下の文章で「最も重要な分数の性質」というものについて語っている。

第1部 第1章 第8節 92.

分子と分母に同じ数を掛けても、同じ数で割っても分数の値は変わらないままであるという分数の性質は最も重要であり、分数の全理論の基盤となる。例えば2つの分数の分母を互いに等しい別の形にしなければ、2つの分数を足したり、互いに引いたりすることができない。このことは、次の章で扱うことになる。

オイラーは分数の約分と倍分（正式な数学用語かは定かではない）こそが分数の本質であるとしている。オイラーはこれを基に分数の加減乗除を論理的に、特徴のある説明している。まず、分数の加減法に関しては分母が等しいときと分母が異なる場合に場合分けし、前者の場合は分子間での加減計算をする。分母が異なる場合は、実際にオイラーの一般的な通分の考え方を参照する。

第1部 第1章 第8節 97.

ここまでから、すべては分母が異なる2つの分数を互いに分母が等しい他の分数へ変えることに依存する。一般的な方法でこれを実行するために、分数 $\frac{a}{b}$ と $\frac{c}{d}$ を与える。まず、最初の分数の上下に d を掛けて、 $\frac{ad}{bd}$ が出てくる。この大きさは $\frac{a}{b}$ に等しい。もう一方の分数に最初と同じように上下に b を掛けると、 $\frac{c}{d}$ の代わりに $\frac{bc}{bd}$ が出てきて、ここで分母が等しくなる。そして、これらの和は $\frac{ad+bc}{bd}$ であり、これらの差は $\frac{ad-bc}{bd}$ である。したがって、分数 $\frac{5}{8}$ と $\frac{7}{9}$ が与えられたとき、これらの分数の代わりに $\frac{45}{72}$ と $\frac{56}{72}$ が出てきて、それらの和は $\frac{101}{72}$ 、それらの差は $\frac{11}{72}$ となる。

4.2 分数の乗除法の指導手順.

オイラーは分数の本質を利用して分数の乗除法を次のような4つのステップを踏み説明している。指導にあたってオイラーはそれぞれのポイントとなる考え方を示し、さらに得られた結果から簡単な計算方法を教えてくれている。

== Step 1 分数 $\frac{a}{b}$ と整数 c との掛け算について ==

[ポイント] 分子と整数を掛け、分母は変化させない

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$$

== Step 2 分数 $\frac{a}{b}$ と整数 c との割り算について ==

[ポイント] 分数 $\frac{a}{b}$ を $\frac{ac}{bc}$ に変形し、分子を整数 c で割る

$$\frac{a}{b} \div c = \frac{ac}{bc} \div c = \frac{a}{bc}$$

[簡単な計算方法] 分母 b と整数 c を掛け、分子は変化させない

== Step 3 分数 $\frac{a}{b}$ と分数 $\frac{c}{d}$ との掛け算について ==

[ポイント] $\frac{c}{d}$ は d で割った c と考える

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times c \div d = \frac{ac}{b} \div d = \frac{ac}{bd}$$

[簡単な計算方法] 分子同士と分母同士を別個に掛ける

== Step 4 分数 $\frac{a}{b}$ と分数 $\frac{c}{d}$ との割り算について ==

(i) 分母が等しいとき

[ポイント] 分子においてのみ割り算を実行する

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{b} = a \div c = \frac{a}{c}$$

(ii) 分母が異なるとき

[ポイント] 分母が等しい分数に変形し、分子においてのみ割り算を実行する

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} = ad \div bc = \frac{ad}{bc}$$

[簡単な計算方法] 分数 $\frac{c}{d}$ の分子分母を上下ひっくり返し、分数 $\frac{a}{b}$ に掛ける

オイラーの教授において特に驚いたことは分数と分数の割り算を”逆数をとって掛ける”という小学校で誰もが学ぶ計算方法が存在していたことである。また、分数の計算結果を論理的に、分数の本質を使って求めるだけでなく、その計算結果から誰でも理解できる計算方法を示してくれている指導法からオイラーの教授力の素晴らしさが伝わる。そして、これが現在の数学教育に反映され続けている事実を知ることによって歴史を学ぶ価値を見出すことができる。

4.3 オイラーの無限.

オイラーは次の分数列を提示し”これらの分数は分母が大きくなるにつれてどんどん小さくなっていくが0になることはない”と注意させる。

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \dots$$

そして、分数という概念から”無限”という概念を次のように生み出している。

第1部 第1章 第7節 81.

我々は分母を非常に大きくしているからといって完全に無へと導かれることなく、この分数は常にある一定の量を持つので、上述の分数の列は常に、この先果てし無く、絶えることはないはずである。だから、最終的に分数が0、あるいは無になるべきとき、我々はその分母は無限大であるというようにしている。ここで、”無限”という言葉は”与えられた分数は決して終わることはない”と言うこととちょうど同じである。

第1部 第1章 第7節 82.

確かに基礎付けられたこの概念を表現するために、無限に大きい数を意味するこの記号 ∞ を用いる。それ故、この分数 $\frac{1}{\infty}$ は本当の無であるということが出来る。なぜなら、分子が1であるような分数は、その分母が無限大に増大しない限り、決して無にならないからである。

オイラーは $\frac{1}{\infty} = 0$ を確認すると $\frac{1}{0} = \infty$ を示し、次の”無限大数に関して多くの人が抱く思い違い”について説明している。

第1部 第1章 第7節 84.

ここでは、多くの人が無限大数はさらに大きくすることはできないと主張するので、このかなりの共通した思い違いを立ち除く必要がある。そして、この思い違いには上述のような正当な理由がある訳ではない。 $\frac{1}{0}$ は無限大数を意味し、 $\frac{2}{0}$ がこれの2倍の大きさであるのは問題ない。したがって、無限大数は2倍以上にもなることができることは明らかである。

オイラーは無限と一言にいつても様々な無限があると考えている。現在、無限という概念は極限で表されるが極限の飛ばし方の速度により区別したり、無限個の集合を濃度で区別したりするといった考え方は、オイラーの無限大数の考え方を引き継いでいるのではないだろうか。

5 オイラーの平方根.

5.1 オイラーの計算ミス.

第1部 第1章 第13節 148.

さらに、 $\sqrt{a}$ と $\sqrt{b}$ の掛け算は $\sqrt{ab}$ を与えるので、 $\sqrt{-2}$ と $\sqrt{-3}$ の掛け算は $\sqrt{6}$ を与える。同様に、 $\sqrt{-1}$ と $\sqrt{-4}$ の掛け算は $\sqrt{4}$ 、つまり2を与える。ここから、2つの不可能数を互いに掛けると可能数、つまり現実の数が出てくることが分かる。ところが、 $\sqrt{-3}$ と $\sqrt{5}$ を掛けると $\sqrt{-15}$ が出てくる。つまり、可能数と不可能数を掛けると不可能な数を与える。

代数学完全入門ではオイラーが $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{6}$ の箇所で計算ミスをしているというのは有名な話である。正しくは $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = -\sqrt{6}$ と計算されなければならない。しかし、私はオイラーの平方根の考え方を学びこの見解に否を唱える。

5.2 オイラーの数への認識.

オイラーは平方根をどのように考えていたかを知る為に以下の文章を参照する.

第1部 第1章 第12節 123.

前節により、与えられた数の平方根とは、その平方数が与えられた数と等しくなるような数以外の何もでもないことが明らかになる。したがって、4の平方根は2であり、9の平方根は3であり、16の平方根は4であり、...となる。ここで注意すべきは、これらの平方根には符号+及び-が付くはずであるということである。したがって、数25の平方根は+5、及び-5である。なぜなら、-5と-5の掛け算も、+5と+5の掛け算も25になるからである。

第1部 第1章 第12節 130.

我々はそのような非有理式の十分な概念を持ってるので、平方数ではない数の平方根を理解するためにある記号を用いる。その記号はこのような形 $\sqrt{\quad}$ であり、平方根と呼ばれる。したがって、 $\sqrt{12}$ は自分自身との掛け算が12を与える、つまり12の平方根であることを意味する。同様に、 $\sqrt{2}$ は2の平方根を、 $\sqrt{3}$ は3の平方根を、さらに $\sqrt{\frac{2}{3}}$ は $\frac{2}{3}$ の平方根を意味する。そして、一般に $\sqrt{a}$ は数 a の平方根を意味する。したがって、平方数ではない数の平方根をしばしば示さなければならないので、そこでこの記号 $\sqrt{\quad}$ を用いて、その数の前に置く。

第1部 第1章 第13節 150.

ところで、上述の注解により任意の数の平方根は常に2つの値をもち、すなわち負の数と正の数である。したがって、例えば $\sqrt{4}$ は+2と-2であり、一般に a の平方根に関しては $-\sqrt{a}$ と $+\sqrt{a}$ に表現でき、このことは不可能数に関しても成立する。 $-a$ の平方根は $+\sqrt{-a}$ と $-\sqrt{-a}$ であり、その際に $\sqrt{\quad}$ の前に置かれている符号+及び-を記号 $\sqrt{\quad}$ 中の符号と区別しなければならない。

このようにオイラーは平方根について「一般に $\sqrt{a}$ は数 a の平方根を意味する」、「一般に a の平方根に関しては $-\sqrt{a}$ と $+\sqrt{a}$ に表現でき」という説明から現在の考え方とは異なる2価性で定めていることが分かる。

5.3 オイラーの計算ミスの検証.

オイラーの平方根を考えると、例えば $\sqrt{4}$ という数は+2と-2という数を包括している数と考えることができ、集合論のように $\sqrt{4} = \{+2, -2\}$ と表現できる。すると、 $x^2 = -2$ となる x に対して $\sqrt{-2} = \{+x, -x\}$ と表すことができ、 $y^2 = -3$ となる y に対して $\sqrt{-3} = \{+y, -y\}$ と表される。したがって、

$$\begin{aligned} \sqrt{-2} \times \sqrt{-3} &= \{+x, -x\} \times \{+y, -y\} \\ &= \{+xy, -xy\} \\ &= \sqrt{6} \quad (\because (xy)^2 = 6) \end{aligned}$$

が得られるので、 $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{6}$ は正しいと判断する。するとオイラーにとって、符号のない数 a というものは $+a$ と $-a$ の意味を含んだ上での扱いとなる。ここからオイラーは数というものに関して 5 , $+5$, -5 を区別して認識していたと伺える。このように考えることでオイラーは $\sqrt{a}$ と $\sqrt{b}$ の積 $\sqrt{ab}$ や商 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ がすべての数に関して成立できるようにしたかったのではないだろうか。

ところが、次のような一文を発見することでオイラーの理論は破綻する。

第1部 第1章 第13節 146.

我々が $\sqrt{-3}$ のような不可能数について、まず知るべきことは $\sqrt{-3}$ と $\sqrt{-3}$ を掛けるときに生じる平方数、つまり積にあり、これは -3 を与える。同様に、 $\sqrt{-1}$ と $\sqrt{-1}$ の掛け算は -1 となる。そして一般に、 $\sqrt{-a}$ と $\sqrt{-a}$ の掛け算、つまり $\sqrt{-a}$ の平方数は $-a$ を与える。

オイラーの $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ の理論では、 $\sqrt{-3} \times \sqrt{-3} = \sqrt{9} = 3$ となるはずである。しかし、私の結論は $\sqrt{-3} \times \sqrt{-3} = -3$ を主張する。この矛盾に対しては次のように考えることができるのではないだろうか。それでは、 $x^2 = -3$ となる x をとると、

$$\begin{aligned} \sqrt{-3} \times \sqrt{-3} &= \{+x, -x\} \times \{+x, -x\} \\ &= \{+x \times +x, -x \times -x\} \\ &= \{+x^2\} \\ &= -3 \end{aligned}$$

このように $\sqrt{-3} \times \sqrt{-3}$ という場合は「同じ数を掛けるべきとき」という意味合いと理解すべきである。すると、 $\{+x, -x\} \times \{+x, -x\}$ の掛け算で出現するのは4パターンの積ではなく同じ数の積である $\{+x \times +x, -x \times -x\}$ となる。したがって、この場合でもオイラーの $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ の理論は崩れていないと判断する。

6 オイラーの数を学んで。

オイラーの数への認識を学んだ上で、再びオイラーのマイナス×マイナスを考察してみようと思う。まず、 $a \times b = ab$ を考える。このとき、オイラーの数より、 $a = \{+a, -a\}$, $b = \{+b, -b\}$, $ab = \{+ab, -ab\}$ というように考えることができる。したがって、

$$\begin{aligned} a \times b &= \{+a, -a\} \times \{+b, -b\} \\ &= \{+a \times +b, +a \times -b, -a \times +b, -a \times -b\} \\ &= \{+ab, -ab\} \\ &= ab \end{aligned}$$

という計算ができる。そうすると、オイラーの「文字だけをみた積は ab となる」や「それに対して符号は＋か、－であるに違いない」という説明と関連性がみえてくる。オイラーが既にこの概念を形成していたとすると、あとは4つの掛け算のパターンを $+ab$ か $-ab$

に対応させようとするであろう。そして、オイラーは $+a \times +b = +ab$, $+a \times -b = -ab$, $-a \times +b = -ab$, $-a \times -b = +ab$ とした後で各々の掛け算に対する理由を考えたのではないのであろうか。というのは、オイラーは各々の掛け算の答えを日常生活に例えていた。もし日常生活から構築された概念であるならば、マイナス×マイナスを何かしらの日常現象で説明したり、または“マイナス×マイナスは存在しない”という説明をしてもよかったのではないだろうか。ところが、オイラーの説明では“マイナス×マイナスは存在する”という前提とした、特に日常生活を顧みることのない説明を堂々としている。

そこでオイラーの数の認識からして、4つの掛け算の理由が“あと付け”なものであったとしたら説明がつくのではないだろうか。つまり、オイラー自身には以前から数の概念が存在していて、それをもって日常生活を観察し、対応できる現象ならばそのように説明しているのではないだろうか。するとオイラーの概念形成は“日常生活から生まれた概念ではなく自らが創造した概念で、日常生活を振り返り対応させている”ということになる。これは、数学という学問は個人が造り出した概念の上に成立する学問であるということの意味するのではないだろうか。そして、数学は常に抽象的であることが当然で、時にその一部が日常現象に対応することができるのではないのであろうか。この領域をオイラーは「数を扱う計算技術」としている。私はこの領域は「算数」と呼ばれるものではないかと考える。また、数学特有の“普遍性”はその個人の概念に影響され共感した多くの人々（例えば異を信じる者がいたとしても大勢の共有者の前では消滅してしまうのであろう。）が学問として受け入れ、それで形成された社会で我々が生きているからであると考え。オイラーの数から学べること、それは「数学は創造された学問」であるということである。

文献

- [1] L.Euler, “Vollständige Anleitung zur Algebra”, L.Euler Opera Omnia Series I-I, 1911.
- [2] Euler, “Elements of Algebra”, Springer-Verlag, 1972.