

退化する非線形楕円型境界値問題 の Hölder 連続な弱解について

熊本大教養 池邊 信範 (Nobunori Ikebe)
有明高専 荒木 眞 (Makoto Araki)
西日本工大 水谷 裕 (Yutaka Mizutani)

§1. 序

Ω は R^n の有界な領域で、境界 $\partial\Omega$ は $C_{2,\alpha}$ クラスであるとする。次の様な $u = (u^1, \dots, u^N) = 0$ で退化する非線形楕円型偏微分方程式の系を考える。

$$(1.1) \quad Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \{a_{ij}(x, u(x)) u_{x_j}(x)\} - |u|^{\tau/2} b_j(x, u(x)) u_{x_j}(x) - b_0(x, u(x)) = 0 \quad (x, u) \in \Omega \times R^N,$$

$$(1.2) \quad \text{境界条件} \quad u|_{\partial\Omega} = \phi,$$

ただし $\tau \geq 0$, 係数 $a_{ij}(x, u)$ ($i, j=1, \dots, n$) は

$$(A_1) \quad a_{ij}(x, u) = a_{ji}(x, u),$$

$$C_0 |u|^\tau |\xi|^2 \leq a_{ij}(x, u) \xi_i \xi_j \leq C_0^{-1} |u|^\tau |\xi|^2 \quad (x, u) \in \bar{\Omega} \times R^N,$$

を満たす。ただし $C_0 > 0$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n$. ここで $u(x) = (u^1(x), \dots, u^N(x))$, $b_0(x, u) = (b_0^1(x, u), \dots, b_0^N(x, u))$, $\phi(x) = (\phi^1(x), \dots, \phi^N(x)) \in R^N$, $a_{ij}(x, u)$, $b_j(x, u) \in R$ である。

$u=0$ で楕円性が退化する形の問題の可解性については、Dubinskii [2], Lions [8] 等多くの結果があるが、特に Hayasida-Yokoi [5] は境界近くで解の Hölder 連続性を、Ural'tseva [12] は (1.1) で $b_0(x, u) \equiv 0$, $b_j(x, u) \equiv 0$ の場合について Hölder 連続な弱解の存在を示した。その後、池邊-小原 [6] は低階の項をもつシングルな方程式を考察し (非負な) Hölder 連続な弱解の存在を示した。荒木は池邊-小原の結果 [6] を連立な方程式の場合に拡張した。水谷 [9] はシングルな方程式を考察し、(必ずしも非負でない) Hölder 連続な弱解の存在を示した。ここでは、系 (1.1), (1.2) につい

て、(必ずしも非負でない) Hölder 連続な弱解の存在を示す。

§2. 条件、定義、定理

境界 $\partial\Omega$ は次の条件を満たすものとする、

$$\text{mes}(K_\rho \setminus \Omega \cap K_\rho) \geq \theta_0 \text{mes } K_\rho$$

ただし、 K_ρ は半径 $\rho (\leq \rho_0)$ 中心を境界 $\partial\Omega$ にもつ開球で $\rho_0, \theta_0 > 0$ (cf. [7], [12], [5]). さらに、係数 $a_{ij}(x, u) \in C_{1,\alpha}(\Omega \times R^N) \cap C_{0,\alpha}(\bar{\Omega} \times R^N)$,

$$b_j(x, u), b_0^l(x, u) \in C_{0,\alpha}(\bar{\Omega} \times R^N), \quad (0 < \alpha < 1, j=1, \dots, n, l=1, \dots, N)$$

$$(A_2) \quad |b_j(x, u)|, |b_0(x, u)| \leq C_1 \quad (x, u) \in \bar{\Omega} \times R^N$$

ただし、 $C_1 > 0$.

$$(A_3) \quad -b_0(x, u)u \leq -C_2|u|^2 + C_3 \quad (x, u) \in \bar{\Omega} \times R^N$$

ただし、 $C_2 > 0, C_3 > 0$.

境界値 $\phi(x)$ の成分 $\phi^l(x) \in C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ は次の条件を満たすとする:

$$(A_4) \quad |\phi^l(x)| \leq M' \quad x \in \partial\Omega$$

ただし、 $M' > 0$ ($l=1, \dots, N$).

[定義] 次の条件を満たすベクトル値関数 $u(x)$ を境界値問題 (1.1), (1.2) の弱解という。

$$(1) \quad |u|^{\tau/2+1}, u^l |u|^{\tau/2} \in W_2^1(\Omega),$$

$$(2) \quad u|_{\partial\Omega} = \phi,$$

$$(3) \quad \text{任意の関数 } \zeta^l(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \quad (l=1, \dots, N) \text{ について}$$

$$(2.1) \quad \int_{\Omega} \left[\frac{a_{ij}(x, u)}{|u(x)|^{\tau/2}} \{ (u^l |u|^{\tau/2}) x_j - \frac{\tau}{(\tau+2)} \frac{u^l}{|u|} (|u|^{\tau/2+1}) x_j \} \zeta^l x_i \right. \\ \left. + b_j(x, u) \{ (u^l |u|^{\tau/2}) x_j - \frac{\tau}{(\tau+2)} \frac{u^l}{|u|} (|u|^{\tau/2+1}) x_j \} \zeta^l \right. \\ \left. + b_0^l(x, u) \zeta^l \right] dx = 0$$

が成立する。

[定理] 上の条件の下で、境界値問題 (1.1), (1.2) の有界で Hölder 連続な弱解 $u(x)$ が存在する。

この定理を証明するために 問題 (1.1), (1.2) の ε -楕円正規化を行う。

任意の $\varepsilon > 0$ にたいして、次の方程式を考える。

$$(2.2) \quad L_\varepsilon u \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \{a_{ij}^\varepsilon(x, u(x)) u_{x_j}(x)\} - |u(x)|^{\tau/2} b_j(x, u(x)) u_{x_j}(x) - b_0(x, u(x)) = 0 \quad (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^N,$$

$$(2.3) \quad \text{境界条件} \quad u|_{\partial\Omega} = \phi$$

ただし、 $a_{ij}^\varepsilon(x, u) = \varepsilon \delta_{ij} + f_\varepsilon(|u|) a_{ij}(x, u)$ (δ_{ij} : Kronecker's delta), $f_\varepsilon(t)$ は次のような非減少で 2 階連続微分可能な関数である:

$$(2.4) \quad f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > (\varepsilon/2)^{1/\tau} \\ 0 & 0 \leq t < (\varepsilon/4)^{1/\tau} \end{cases}.$$

係数 $a_{ij}^\varepsilon(x, u)$ について、条件 (A_1) , (2.4) より次の評価ができる。

$$(2.5) \quad \frac{2C_0}{3} (\varepsilon + |u|^\tau) |\xi|^2 \leq a_{ij}^\varepsilon(x, u) \xi_i \xi_j \leq C_0^{-1} (\varepsilon + |u|^\tau) |\xi|^2.$$

さて、正規化された問題 (2.2), (2.3) の解 $u_\varepsilon(x)$ について、次の評価が出来る:

解の成分 $u_\varepsilon^l \in C_{2, \alpha}(\bar{\Omega})$ について

$$(2.6) \quad |u_\varepsilon^l(x)| \leq M_1 \quad x \in \bar{\Omega} \quad (l=1, \dots, N),$$

ただし、 $M_1 = \max_{\partial\Omega} \{ \max |\phi|, (C_3 / \min(1, C_2))^{1/2} \}$ (cf. [7] p.421, [11]).

§3. 補助定理

ここでは、解の Hölder 評価 をするために必要な補助定理を述べる (cf. [6], [7], [12]). ある関数 $\varphi(x)$ に対して $A_{k, \rho} \equiv \{x \in K_\rho \cap \Omega : \varphi(x) > k\}$, $B_{k, \rho} \equiv \{x \in K_\rho \cap \Omega : \varphi(x) < k\}$ また K_ρ は $\mathbb{R}^n$ での半径 ρ の開球とする。

補助定理 3.1. ([7]) 関数 $\varphi(x) \in W_2^1(\Omega)$ は、ある正の数 M, C があって次の条件を満たすとする。

$$(3.1) \quad |\varphi(x)| \leq M$$

$$(3.2) \quad \int_{A_{k,\rho}} |\nabla \varphi|^2 \zeta^2 dx \leq C \int_{A_{k,\rho}} \{(\varphi-k)^2 |\nabla \zeta|^2 + \zeta^2\} dx$$

が 任意の開球 $K_\rho \subset \Omega$, 任意の $\zeta(x) \in C_0^\infty(K_\rho)$, 任意の数 k について成り立つ、
ただし、

$$(3.3) \quad k \geq \max_{K_\rho} \varphi - \delta \operatorname{osc}(\varphi, K_\rho), \quad \delta \in (0, 1).$$

さらに

$$(3.4) \quad \operatorname{mes}\{x \in K_{\rho/2} : \varphi(x) \leq \max_{K_\rho} \varphi - \delta \operatorname{osc}(\varphi, K_\rho)\} \geq \gamma \operatorname{mes} K_{\rho/2}, \quad \gamma \in (0, 1)$$

が成り立つとする。このとき、正の数 $s = s(M, C, \delta, \gamma)$ があって、次のいずれかの評価を得る：

$$(3.5) \quad \operatorname{osc}(\varphi, K_{\rho/2}) \leq 2^s \rho$$

または

$$(3.6) \quad \operatorname{osc}(\varphi, K_{\rho/4}) \leq (1-2^{1-s}) \operatorname{osc}(\varphi, K_\rho)$$

ただし、 $K_\rho, K_{\rho/2}, K_{\rho/4}$ は同心開球。

補助定理 3.1' . ([7]) 関数 $\varphi(x) \in W_2^1(\Omega)$ は、ある正の数 M, C があって
次の条件を満たすとする。

$$(3.1)' \quad |\varphi(x)| \leq M$$

$$(3.2)' \quad \int_{B_{k,\rho}} |\nabla \varphi|^2 \zeta^2 dx \leq C \int_{B_{k,\rho}} \{(\varphi-k)^2 |\nabla \zeta|^2 + \zeta^2\} dx$$

が 任意の開球 $K_\rho \subset \Omega$, 任意の $\zeta(x) \in C_0^\infty(K_\rho)$, 任意の数 k について成り立つ、
ただし、

$$(3.3)' \quad k \leq \min_{K_\rho} \varphi + \delta \operatorname{osc}(\varphi, K_\rho), \quad \delta \in (0, 1).$$

さらに

$$(3.4)' \quad \operatorname{mes}\{x \in K_{\rho/2} : \varphi(x) \geq \min_{K_\rho} \varphi + \delta \operatorname{osc}(\varphi, K_\rho)\} \geq \gamma \operatorname{mes} K_{\rho/2}, \quad \gamma \in (0, 1)$$

が成り立つとする。このとき、正の数 $s = s(M, C, \delta, \gamma)$ があって、次のいずれかの評価を得る：

$$(3.5)' \quad \operatorname{osc}(\varphi, K_{\rho/2}) \leq 2^s \rho,$$

$$(3.6)' \quad \operatorname{osc}(\varphi, K_{\rho/4}) \leq (1-2^{1-s}) \operatorname{osc}(\varphi, K_\rho),$$

ただし、 $K_\rho, K_{\rho/2}, K_{\rho/4}$ は同心開球。

補助定理 3.2. ([12]) 関数 $\varphi(x) \in W_2^1(\Omega)$ は、ある正の数 M, C があって次の条件を満たすとする。

$$(3.7) \quad |\varphi(x)| \leq M$$

$$(3.8) \quad \int_{B_{k,\rho} \setminus B_{h,\rho}} |\nabla \varphi|^2 \zeta^2 dx \leq C \int_{B_{k,\rho}} \{(\varphi-k)^2 |\nabla \zeta|^2 + \zeta^2\} dx$$

が 任意の開球 $K_\rho \subset \Omega$, 任意の $\zeta(x) \in C_0^\infty(K_\rho)$, 任意の数 k, h について成り立つ、ただし、

$$(3.9) \quad h \in [\min_{K_\rho} \varphi + \frac{\text{osc}(\varphi, K_\rho)}{2^s}, \min_{K_\rho} \varphi + \delta \text{osc}(\varphi, K_\rho)], \quad k \in [h, 2h - \min_{K_\rho} \varphi],$$

$\delta \in (0, 1)$. さらに

$$(3.10) \quad \text{mes}\{x \in K_{\rho/2} : \varphi(x) \geq \min_{K_\rho} \varphi + \delta \text{osc}(\varphi, K_\rho)\} \geq \gamma \text{mes} K_{\rho/2}, \quad \gamma \in (0, 1).$$

このとき正の数 $s = s(M, C, \delta, \gamma)$ を次のいずれかの評価が得られるように取る事が出来る:

$$(3.11) \quad \text{osc}(\varphi, K_{\rho/2}) \leq 2^s \rho,$$

$$(3.12) \quad \text{osc}(\varphi, K_{\rho/4}) \leq (1 - 2^{1-s}) \text{osc}(\varphi, K_\rho).$$

補助定理 3.3. ([7]) $\Omega_{\rho_0} = K_{\rho_0} \cap \Omega$ 上のベクトル値関数 $U(x) = (U^1(x), \dots, U^N(x))$ にたいして、 N_1 個の関数 $W^1(x), \dots, W^{N_1}(x)$ があって次の条件を満たす関数 $\varphi(x) \in \{W^r(x) : r=1, \dots, N_1\}$ が存在するとする: 任意の球 K_ρ ($\rho \leq \rho_0$, K_{ρ_0} と同心) について

$$(3.13) \quad \text{osc}(\varphi, \Omega_\rho) \geq \delta_1 \max_{1 \leq l \leq N} \text{osc}(U^l, \Omega_\rho),$$

と、次のいずれかが成り立つ

$$(3.14) \quad \text{osc}(\varphi, \Omega_{\rho/4}) \leq c_1 \rho^\varepsilon,$$

$$(3.15) \quad \text{osc}(\varphi, \Omega_{\rho/4}) \leq \theta \text{osc}(\varphi, \Omega_\rho),$$

ただし、 $\delta_1, c_1, \varepsilon$ と $\theta < 1$ はある正の数とする。このとき、任意の $\rho \leq \rho_0$ について、次の評価を得る: ある正の数 α, c があって

$$(3.16) \quad \text{osc}(U^l, \Omega_\rho) \leq c \rho_0^{-\alpha} \rho^\alpha \quad (l=1, \dots, N)$$

ただし、 $\alpha = \alpha(N_1, \varepsilon, \theta)$, $c = c(\alpha, N_1, \delta_1, c_1, \rho_0, \varepsilon, \max_{1 \leq r \leq N_1} \text{osc}(W^r, \Omega_{\rho_0}))$.

これらの補助定理の証明は [7] の Chapter 2 の Lemma 4.9, 6.1, 6.2, 7.1 を参照。(cf. [12]).

<注意> 補助定理 3.1, 3.1', 3.2 は 条件 (3.4), (3.4)', (3.10) の代りに 中心が $\partial\Omega$ 上にある半径 $\rho (\leq \rho_0)$ の開球 K_ρ を取り

$$\max\{\varphi: \partial\Omega \cap K_\rho\} \leq \max\{\varphi: \Omega \cap K_\rho\} - \delta \operatorname{osc}(\varphi: K_\rho \cap \Omega)$$

$$\text{または、} \min\{\varphi: \partial\Omega \cap K_\rho\} \geq \min\{\varphi: \Omega \cap K_\rho\} + \delta \operatorname{osc}(\varphi: K_\rho \cap \Omega)$$

とおきかえても成り立つ。

§4. 積分不等式

偏微分方程式の系 (2.2) と ベクトル値関数 $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^N)$, $\eta^l(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ のスカラー積をとり、領域 Ω で積分して

$$(4.1) \quad \int_{\Omega} \{a^{\varepsilon}_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} + |u|^{\tau/2} b_j u_{x_j} \eta + b_0 \eta\} dx = 0.$$

ここで、特に $\eta = \{\pm 5Ne^l + \sum_{r=1}^N (\pm e^r)\} \eta$ または $\eta = \pm e^l \eta$ ($\eta(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$) とおけば、次の式を得る:

$$(4.2) \quad \int_{\Omega} \{a^{\varepsilon}_{ij} w_{x_j} \eta_{x_i} + |u|^{\tau/2} b_j w_{x_j} \eta + B_0 \eta\} dx = 0,$$

ただし、 $w = \pm 5Nu^l + \sum_{r=1}^N (\pm u^r)$ (または $\pm u^l$)、また $B_0 = \pm 5Nb_0^l + \sum_{r=1}^N (\pm b_0^r)$ (または $\pm b_0^l$)。さて、ここで $\tau \geq 1$ のとき、次の予備定理を準備する。

補助定理 4.1. $u(x)$ は 条件 (2.6) を満たす問題 (2.2), (2.3) の解とする。また、 $w(x) = \pm 5Nu^l + \sum_{r=1}^N (\pm u^r)$ (または $\pm u^l$) とする。このとき、 $w(x)$ は次の積分不等式を満たす: 任意の $\zeta(x) \in C_0^\infty(K_\rho)$, 任意の 球 $K_\rho \subset \Omega$ にたいして、

(i) $k \geq 0$ のとき

$$(4.3) \quad \min_{A_{k,\rho}} (\varepsilon + |u|^\tau) \int_{w>k} |\nabla w^\tau|^2 \zeta^2 dx \\ \leq C_{(1)} \max_{A_{k,\rho}} (\varepsilon + |u|^\tau) \int_{w>k} [(w^{\tau-k\tau})^2 |\nabla \zeta|^2 + \zeta^2] dx,$$

$$(4.4) \quad \min_B (\varepsilon + |u|^\tau) \int_B |\nabla w^\tau|^2 \zeta^2 dx \\ \leq C_{(2)} \max_{B_{k,\rho}} (\varepsilon + |u|^\tau) \int_{w < k} [(k^\tau - w^\tau)^2 |\nabla \zeta|^2 + \zeta^2] dx,$$

ただし、 $A_{k,\rho} = \{x \in K_\rho : w > k\}$, $B_{k,\rho} = \{x \in K_\rho : w < k\}$, $B = B_{k,\rho}$ ($w > 0$ のとき) または $B = B_{k,\rho} - B_{h,\rho}$ ($0 \leq h \leq k$ のとき)、また $C_{(1)}$, $C_{(2)}$ は $\tau, N, M_1, C_0, C_1, C_2, C_3$ に依存する定数。 (ii) $k < 0$ のとき $w(x)$ は不等式 (4.4) を $B = B_{k,\rho}$ として満たす。

(注意: 冪乗 w^τ , k^τ は $w|w|^{\tau-1}$, $k|k|^{\tau-1}$ の意味である。また $\tau \geq 1$ とする。)

証明. (i) $k \geq 0$ のとき、(4.2) の $\eta(x)$ として

$$\eta(x) = \max\{w^{2\tau-1} - k^{2\tau-1}, 0\} \zeta^2(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$$

とおく。第2章の条件 (2.5), b_j , b_0^l の条件を考慮し、また 不等式: $w^{2\tau-1} - k^{2\tau-1} \leq 2w^{\tau-1}(w^\tau - k^\tau)$ (ただし $w > k \geq 0$) を用いて

$$\int_{w > k} (\varepsilon + |u|^\tau) |\nabla w|^2 w^{2\tau-2} \zeta^2 dx \\ \leq C_4 \int_{w > k} [(\varepsilon + |u|^\tau) (w^\tau - k^\tau)^2 |\nabla \zeta|^2 + \{(w^\tau - k^\tau)^2 + w^{\tau-1}(w^\tau - k^\tau)\} \zeta^2] dx$$

を得る。ここで、 $w(x)$ が有界で $|w| \leq 6N|u|$ であることを考慮すると (4.3) を得る。

$$\text{また、} \quad \eta(x) = k^{2\tau-2} \max\{k - w, 0\} \zeta^2(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$$

において、第2章の条件 (2.5), b_j , b_0^l の条件を考慮し、また 不等式 $k^{\tau-1}(k - w) \leq 2(k^\tau - w^\tau)$ (ただし $w < k$, $k \geq 0$) を用いれば

$$\int_{w < k} (\varepsilon + |u|^\tau) (k^{\tau-1} |\nabla w|)^2 \zeta^2 dx \\ \leq C_5 \int_{w < k} [(\varepsilon + |u|^\tau) (k^\tau - w^\tau)^2 |\nabla \zeta|^2 + k^{2\tau-2} \{(k - w)^2 + (k - w)\} \zeta^2] dx.$$

これより $B = B_{k,\rho}$ ($w > 0$ のとき) または $B = B_{k,\rho} - B_{h,\rho}$ ($0 \leq h \leq k$ のとき) について (4.4) を得る。

(ii) $k < 0$ のときは、(4.2) の $\eta(x)$ として

$$\eta(x) = \max\{k^{2\tau-1} - w^{2\tau-1}, 0\} \zeta^2(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$$

(ただし $k^{2\tau-1} = k|k|^{2\tau-2}$, $w^{2\tau-1} = w|w|^{2\tau-2}$) とおけば、(4.4) が $B = B_{k,\rho}$ にたいして成り立つ。途中 $|k^{2\tau-1} - w^{2\tau-1}| \leq 2|w|^{\tau-1}|k^\tau - w^\tau|$ ($w \leq k \leq 0$) を用いる。

§5. Hölder 評価

補助定理 5.1. $u(x)$ を問題 (2.2), (2.3) の解で、条件 (2.6) を満たすものとする。このとき、 ε に依存しないある正の数 C_6 , $\beta \in (0, \alpha)$ があって

$$(5.1) \quad |u|_{\beta, \bar{\Omega}} \leq C_6$$

が成り立つ。 $|\cdot|_{\beta, \bar{\Omega}}$ は Hölder ノルム。

補助定理 5.1 は 補助定理 3.3 と 次の補助定理を用いて直ちに得られる。

補助定理 5.2. 補助定理 5.1 の仮定の解 $u(x)$ の成分 $u^l(x)$ について、次の関数を考える：

$$(5.2) \quad (\pm u^l)^\tau, \quad \{\pm 5Nu^l + \sum_{r=1}^N (\pm u^r)\}^\tau \quad (l=1, \dots, N)$$

ただし、 $\tau \geq 1$ で、 $(*)^\tau = *|*|^{\tau-1}$ を意味する。このとき、関数 (5.2) の中に補助定理 3.3 の仮定を満たす関数 $\varphi(x)$ が存在する。

証明. 任意に一つの開球 $K_\rho \subset \Omega$ を固定する。関数 $\pm u^l$ のうち K_ρ で値域の半分以上が正の値と成るものを取る。これを、一般性を失うことなく、改めて u^l とかき、 $U^l(x) \equiv (u^l)^\tau$, $W^l(x) \equiv (5Nu^l + \sum_{r=1}^N u^r)^\tau$ ($l=1, \dots, N$) とおく。このとき、 $\bar{\omega}^l = \text{osc}(U^l, K_\rho)$, $\bar{m}^l = \min\{\min_{K_\rho} U^l, 0\}$ とおけば、

$$(5.3) \quad \bar{m}^l + \frac{\bar{\omega}^l}{2} \geq 0$$

が成り立つ。また、同様な関係式が $W^l(x)$ についても成り立つ。次の分類をする：

ただし、番号 l_0 は $\bar{\omega}^{l_0} = \max_{1 \leq l \leq N} \bar{\omega}^l$ となるもの、正の数 q は十分大きい数で証明の途中で決定されるものである。

$$(5.1a) \quad \text{Case I.} \quad |\bar{m}^l| \leq \frac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q} \quad (\text{すべての } l=1, \dots, N \text{ について}),$$

$$(5.1b) \quad \text{さらに} \quad \begin{cases} (i) & |\min_{K_\rho} U^{l_0}| \leq \frac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q} \\ (ii) & \min_{K_\rho} U^{l_0} > \frac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q} \end{cases} \\ \text{Case II.} \quad \bar{m}^l < -\frac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q} \quad (\text{ある } l \text{ について}).$$

Case I (i) の場合は $\varphi(x) = (5Nu^{l_0} + \sum_{r=1}^N u^r)^\tau$ が、Case I (ii) の場合は $\varphi(x) = (u^{l_0})^\tau$ が、Case II の場合は (5.1b) の成りたつ $\varphi(x) = (u^l)^\tau$ が補助定理 5.2 の主張を満たすことを示す。

始めに、Case I (i) の場合を考える。 $w(x) = 5Nu^{l_0} + \sum_{r=1}^N u^r$, $W(x) = (w)^\tau$, $\underline{\omega} = \text{osc}(w, K_\rho)$, $\bar{\omega} = \text{osc}(W, K_\rho)$, $\underline{m}^l = \min\{\min_{K_\rho} u^l, 0\}$, $\underline{\omega}^l = \text{osc}(u^l, K_\rho)$ また $q > \tau$ とする。 $\underline{\omega}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}^{l_0}$, $\underline{m}^l$, $\underline{\omega}^l$, $|u|$, $w(x)$ について、次の関係が成りたつ:

$$\begin{aligned} (1) \quad & |\underline{m}^l| \leq \left(\frac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q}\right)^{1/\tau} & (2) \quad & (\bar{\omega}^{l_0})^{1/\tau} \leq 2\underline{\omega}^{l_0} \\ (3) \quad & \underline{\omega}^l \leq 2(\bar{\omega}^{l_0})^{1/\tau} & (4) \quad & \underline{\omega}^l \leq 4\underline{\omega}^{l_0} \\ (5) \quad & N\underline{\omega}^{l_0} \leq \underline{\omega} & (6) \quad & \underline{\omega} \leq 2(\bar{\omega})^{1/\tau} \\ (7) \quad & |w(x)| \leq 5N|u^{l_0}| + \sum_{r=1}^N |u^r| \leq 6N|u|. \end{aligned}$$

(1), (2), (5) より、

$$(8) \quad |u| \leq \sum_{r=1}^N |u^r| \leq \sum_{r=1}^N (u^r - \underline{m}^r) + \sum_{r=1}^N |\underline{m}^r| + 5N(u^{l_0} - \underline{m}^{l_0}) \\ \leq w(x) + \left(\frac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q}\right)^{1/\tau} \cdot 7N \leq w(x) + \left(\frac{1}{2^q}\right)^{1/\tau} \cdot 14\underline{\omega}.$$

(2), (5), (6) より、

$$(5.4) \quad \bar{\omega} \geq (N/4)^\tau \bar{\omega}^{l_0}$$

つまり、補助定理 3.3 の仮定 (3.13) が $\delta_1 = (N/4)^\tau$ として成りたっている。

$$k \geq k^0 = \max_{K_\rho} W - \frac{\bar{\omega}}{4} = \min_{K_\rho} W + \frac{3\bar{\omega}}{4} \quad \text{また } A_{k, \rho} \equiv \{x \in K_\rho : W(x) > k\} \text{ とする.}$$

(8) より、

$$(5.5) \quad \max_{A_{k, \rho}} |u| \leq \max_{K_\rho} w + 14 \cdot \left(\frac{1}{2^q}\right)^{1/\tau} \underline{\omega} \leq \min_{K_\rho} w + 8\underline{\omega} \quad (q > \tau).$$

(9) $W > k > k^0$ のとき $k^{1/\tau} > \min_{K_\rho} w(x) + \frac{3\omega}{4}$ が成りたつ。(注 $\tau \geq 1$)

(7), (9) より

$$(5.6) \quad \min_{A_{k,\rho}} |u| \geq \frac{1}{6N} \min_{A_{k,\rho}} w \geq \frac{k^{1/\tau}}{6N} \geq \frac{1}{6N} \left(\min_{K_\rho} w + \frac{3\omega}{4} \right) \geq \frac{\omega}{24N}.$$

よって、(5.5), (5.6) より、

$$(5.7) \quad \max_{A_{k,\rho}} |u| \leq 192N \min_{A_{k,\rho}} |u|.$$

(5.7) を不等式 (4.3) に用いて、 $\varphi = W(x)$ にたいして 補助定理 3.1 の (3.2) が $C = (192N)^\tau C_{(1)}$ として $k \geq k^0 \equiv \max_{K_\rho} W - \bar{\omega}/4$ のとき成りたつ。

$$s+1 \leq q, \quad \frac{\bar{\omega}}{2^{s+1}} \leq h \leq k \leq 3h \text{ また } B_{k,\rho} = \{x \in K_\rho : W < k\} \text{ とする.}$$

(8), (6) より

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \max_{B_{k,\rho}} |u| &\leq \max_{B_{k,\rho}} w + 14 \left(\frac{1}{2^q} \right)^{1/\tau} \bar{\omega} \leq k^{1/\tau} + 14 \left(\frac{1}{2^q} \right)^{1/\tau} \bar{\omega} \\ &\leq k^{1/\tau} + 14 \left(\frac{1}{2^q} \right)^{1/\tau} 2^{s+1} (\bar{\omega})^{1/\tau} \leq 29k^{1/\tau} \quad (q \geq s+1). \end{aligned}$$

(7) より

$$(5.9) \quad \min_{B_{k,\rho} \setminus B_{h,\rho}} |u| \geq \frac{1}{6N} \min_{B_{k,\rho} \setminus B_{h,\rho}} w \geq \frac{1}{6N} \cdot h^{1/\tau} \geq \frac{1}{18N} k^{1/\tau} \quad (\tau \geq 1).$$

よって、(5.8), (5.9) より

$$(5.10) \quad \max_{B_{k,\rho}} |u| \leq 522N \min_{B_{k,\rho} \setminus B_{h,\rho}} |u|.$$

(5.10) を不等式 (4.4) に用いて、 $\varphi = W(x)$ について 補助定理 3.2 の (3.8) が $C = (522N)^\tau C_{(2)}$ として、 $h \geq \bar{\omega}/2^{s+1}$, $k \in [h, 3h]$ のとき成りたつ。

ところで、次のいずれかが成りたつ。

$$(a) \quad \text{mes}\{x \in K_{\rho/2} : W(x) \leq k^0\} \geq \frac{1}{2} \text{mes } K_{\rho/2},$$

$$(b) \quad \text{mes}\{x \in K_{\rho/2} : W(x) \geq k^0\} \geq \frac{1}{2} \text{mes } K_{\rho/2}.$$

(a) が成りたつ場合は $\varphi = W(x)$ について 補助定理 3.1 の仮定 (3.3), (3.4) が $k^0 \equiv \max_{K_\rho} W - \bar{\omega}/4$, $\delta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ として満たされる。(b) が成りたつ場合は $\varphi = W(x)$ について 補助定理 3.2 の仮定 (3.9), (3.10) が $\delta = 3/4$, $\gamma = 1/2$ として満たされる。したがって、 $\varphi = W(x)$ について 補助定理 3.1 と 補助定理 3.2 が 補助定理 3.3 の仮定 (3.14) または (3.15) を保証する。

次に、Case I(ii) の場合を $\varphi=U^{l_0}(x)$ について考察する。このとき、補助定理 3.3 の仮定 (3.13) が $\delta_1=1$ として満たされている。 $U=(U^1(x), \dots, U^N(x))$, $A_{k,\rho}=\{x \in K_\rho : U^{l_0} > k\}$, $B_{k,\rho}=\{x \in K_\rho : U^{l_0} < k\}$ とする。次の評価が成り立つ。

$$(5.11) \quad \max_{K_\rho} |U| \leq \min_{K_\rho} |U| + N\bar{\omega}^{l_0}.$$

$$k \geq k'_0 \equiv \max_{K_\rho} U^{l_0} - \frac{\bar{\omega}^{l_0}}{4} = \min_{K_\rho} U^{l_0} + \frac{3}{4}\bar{\omega}^{l_0} > 0 \text{ のとき、}$$

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \min_{A_{k,\rho}} |U| &\geq \frac{1}{2} \left(\min_{A_{k,\rho}} |U| + \min_{A_{k,\rho}} |U^{l_0}| \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\min_{K_\rho} |U| + \frac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q} \right). \end{aligned}$$

よって、(5.11), (5.12) より

$$(5.13) \quad \max_{A_{k,\rho}} |U| \leq 2^{q+1} N \min_{A_{k,\rho}} |U| \text{ または } \max_{A_{k,\rho}} |u|^\tau \leq 2^{q+1} N^{2+\tau/2} \min_{A_{k,\rho}} |u|^\tau.$$

$$k \leq k'_0 \equiv \min_{K_\rho} U^{l_0} + \frac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^{q+1}} \text{ のとき、}$$

$$(5.14) \quad \min_{B_{k,\rho}} |U| \geq \frac{1}{2} \left(\min_{B_{k,\rho}} |U| + \min_{B_{k,\rho}} |U^{l_0}| \right) \geq \frac{1}{2} \left(\min_{K_\rho} |U| + \frac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^q} \right).$$

よって、(5.11), (5.14) より

$$(5.15) \quad \max_{B_{k,\rho}} |U| \leq 2^{q+1} N \min_{B_{k,\rho}} |U| \text{ または } \max_{B_{k,\rho}} |u|^\tau \leq 2^{q+1} N^{2+\tau/2} \min_{B_{k,\rho}} |u|^\tau.$$

(5.13) (または (5.15)) を不等式 (4.4) に用いると、 $\varphi=U^{l_0}(x)$ にたいして補助定理 3.1 の (3.2) (または 補助定理 3.1' の (3.2)') が $C=2^{q+1}N^{2+\tau/2}\max\{C_{(1)}, C_{(2)}\}$ として $k \geq k'_0 \equiv \max_{K_\rho} U^{l_0} - \bar{\omega}^{l_0}/4$ (または $k \leq k'_0 \equiv \min_{K_\rho} U^{l_0} + \bar{\omega}^{l_0}/2^{q+1}$) のとき成り立つ。さらに、次のいずれかが成り立つ。

$$(a') \quad \text{mes}\{x \in K_{\rho/2} : U^{l_0}(x) \leq k'_0\} \geq \frac{1}{2} \text{mes } K_{\rho/2},$$

$$(b') \quad \text{mes}\{x \in K_{\rho/2} : U^{l_0}(x) \geq k'_0\} \geq \frac{1}{2} \text{mes } K_{\rho/2}.$$

よって、 $\varphi=U^{l_0}(x)$ について、補助定理 3.1 が $\delta=1/4, \gamma=1/2$ として、または 補助定理 3.1' が $\delta=1/2^{q+1}, \gamma=1/2$ として成り立つ。したがって、補助定理 3.1 または 補助定理 3.1' が 補助定理 3.3 の (3.14) または (3.15) を保証する。

最後に、Case II の場合を (5.1b) が成り立つ $\varphi=U^l(x)$ について考察する。この場合 (5.3) と (5.1b) より、つぎの評価を得る。

$$(5.16) \quad \bar{\omega}^l \geq \frac{\bar{\omega}^{l_0}}{2^{q-1}}.$$

つまり、補助定理 3.3 の (5.13) が $\delta_1 = 2^{-q+1}$ として成りたっている。 $\varphi = U^l(x)$ について 補助定理 3.3 の (3.14) または (3.15) が 成りたつことが Case I (ii) の場合と同様に示される。これで、補助定理 5.2 の証明が終る。

補助定理 3.3 を適用して $U^l(x)$ ($l=1, \dots, N$) の内部評価を得る。また、第3章の<注意>を考慮すると $U^l(x)$ の境界の近傍での評価を得る。つまり、 $\beta \in (0, 1)$ があって

$$(5.17) \quad |U^l|_{\beta\tau, \bar{\Omega}} \leq C_7 \text{ または } |u^l|_{\beta, \bar{\Omega}} \leq C_8,$$

ただし C_7, C_8 は ε に無関係なある正の数。これで、補助定理 5.1 が $\tau \geq 1$ のとき証明された。 $(0 \leq \tau < 1)$ のときは $\eta(x) = \max\{w(x) - k, 0\} \zeta^2(x)$ または $\eta(x) = \max\{k - w(x), 0\} \zeta^2(x)$ とおけば、上と同様に評価 (5.17) を得る。)

§6. 定理の証明

$u_\varepsilon^l(x) \in C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ は条件 (2.6) を満たす問題 (2.2), (2.3) の解とする。

(5.1) より、

$$(6.1) \quad |u_\varepsilon^l|_{\beta, \bar{\Omega}} \leq C_6 \quad (l=1, \dots, N)$$

ただし、 C_6 は ε に無関係な正の数。 $u_\varepsilon^l - \phi^l \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ であるから、

$$\int_{\Omega} [a_{ij}^\varepsilon(x, u_\varepsilon) u_\varepsilon^l x_j (u_\varepsilon^l x_i - \phi^l x_i) + \{b_j(x, u_\varepsilon) |u_\varepsilon|^{\tau/2} u_\varepsilon^l x_j + b_0^l(x, u_\varepsilon)\} (u_\varepsilon^l - \phi^l)] dx = 0.$$

条件 (A_1) , (A_2) より

$$(6.2) \quad \int_{\Omega} (\varepsilon + |u_\varepsilon|^\tau) \sum_{i=1}^N |\nabla u_\varepsilon^l|^2 dx \leq C_9,$$

ただし、 C_9 は ε に無関係な正の数。

次の関数を考える：

$$(6.3) \quad V_\varepsilon(x) \equiv |u_\varepsilon|^{\tau/2+1}, \quad V_\varepsilon^l(x) \equiv u_\varepsilon^l |u_\varepsilon|^{\tau/2} \quad (l=1, \dots, N).$$

これについて、(6.2) より、次の評価を得る：

$$(6.4) \quad \int_{\Omega} \{ |V_{\varepsilon x_j}|^2 + \sum_{i=1}^N |V_\varepsilon^l x_j|^2 \} dx \leq C_{10} \quad (j=1, \dots, n)$$

ただし、 C_{10} は ε に無関係な正の数。評価 (6.1), (6.4) より $\{u_\varepsilon^l\}$ の部分列 $\{u_{\varepsilon_p}^l\}$ があって、

$$(6.5) \quad u_{\varepsilon_p}^l \rightarrow u^l \quad \text{in } C_{0,\beta}(\bar{\Omega}) \quad (l=1, \dots, N),$$

$$(6.6) \quad (V_{\varepsilon_p})_{x_j} \rightarrow V_{x_j} \quad \text{weakly in } L_2(\Omega),$$

$$(6.7) \quad (V_{\varepsilon_p}^l)_{x_j} \rightarrow V_{x_j}^l \quad \text{weakly in } L_2(\Omega),$$

が成り立つ、ただし、 $u^l(x) \in C_{0,\beta}(\bar{\Omega})$ また $V(x), V^l(x) \in W_2^1(\Omega)$ 。したがって、関数 $u^l(x) \in C_{0,\beta}(\bar{\Omega})$ は弱解の定義式 (2.1) を満たす。ただし、 $(u^l | |u|^{\tau/2})_{x_j}$, $(|u|^{\tau/2+1})_{x_j}$ は、それぞれ $V_{x_j}^l(x)$, $V_{x_j}(x)$ と解釈する。これで定理の証明を終る。

参考文献

- [1] Araki, M.; On the Hölder continuous non-negative weak solutions of the Dirichlet problem for a degenerate quasi-linear elliptic system, (to appear in Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Math.).
- [2] Dubinskii, Ju. A.; Some integral inequalities and the solvability of degenerate quasilinear elliptic systems of differential equations, Mat. Sb., 64(106):3 (1964), 458-480
- [3] Gilberg, D. and Trudinger, N. S.; Elliptic partial differential equations of second order, 2nd ed, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983.
- [4] Furusho, Y.; Existence of positive entire solutions for weakly coupled semilinear elliptic systems, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 120A (1992), 79-91.
- [5] Hayasida, K. and Yokoi, Y.; On the Hölder continuity at the boundary of weak solutions of the Dirichlet problem

- for degenerate quasilinear elliptic equations,
Math. Japonica, 31, No 4 (1986), 561-606.
- [6] Ikebe, N. and Ohara, Y.; On the non-negative weak solutions of the Dirichlet problem for degenerate quasi-linear elliptic equations, Funkcial. Ekvac., 24 (1981), 103-111.
- [7] Ladyzhenskaya, O. A. and Ural'tseva, N. N.; Linear and quasi-linear differential equations of elliptic type, (translation in English), Academic Press, New York, 1968.
- [8] Lions, J. L.; Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod gauthier Vallars, 1969.
- [9] Mizutani, Y.; On the Hölder continuous solutions of the Dirichlet problem for degenerate quasi-linear elliptic equations, (to appear in Funkcial. Ekvac.).
- [10] Ohara, Y. and Ikebe, N.; On the Hölder continuity of the solutions for degenerate elliptic equations, Funkcial. Ekvac., 26 (1983), 339-347.
- [11] Serrin, J.; The problem of Dirichlet for quasilinear differential equations with many independent variables, Philos. Trans. Roy. Soc. London, A264 (1969), 413-496.
- [12] Ural'tseva, N. N.; Degenerate quasilinear elliptic systems, Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov, 7 (1968), 184-222.