

対称核合成核に依るポテンシャル

名大 理 伊藤 正之

1. 序

古典的意味において、ポテンシャル論と調和函数論は同じ内容を意味して来た。これは調和函数を議論するのに、ポテンシャルは避け得ない概念であると同時にその逆も又なりであるからである。そこで Green ポテンシャルが Newton ポテンシャル (又は Logarithmic ポテンシャル) からある操作に依り得られることに注意する時、調和函数論に本質的役割を演ずるものは Newton ポテンシャルであることに気がつくであろう。

3 次元 Euclid 空間において少々考えてみよう。 $N(x) = 1/|x|$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, とおく時、2 変数の函数 $N(x-y)$ を Newton 核と呼び、又 μ の Borel 測度 μ に対し

$$N_\mu(x) = \int N(x-y) d\mu(y) = N * \mu(x).$$

を Newton ポテンシャルと呼ぶ。3 次元 Euclid 空間において、ある領域内で定義された調和函数の性質は Newton 核の掃散、種々の最大値原理の反映と理解される。

この様な考察から、ポテンシャル論の研究課題の 1 つと

して、これらの原理を満足する核を整理することがあげられる。一方シュートンポテンシャルが合成で表わされることに注意して、これの直接の拡張である対称な合成核について、上述の整理を試みる。今後述べる多くの議論は更により設定でのポテンシャル論に拡張されていき、又拡張を暗示しているが、我々はそれには一切ふれないこととする。

2. 核, ポテンシャル, 諸原理,

このノートを通じて、 X を局所コンパクトで、ユシバクトでないアーベル群とし、簡単な為オの可算公理を満すとする。そしてその上の Haar 測度とする。次に度々用いる函数空間を記して置く。

L_{loc} : X 上の実数値局所 Σ -可積分函数全体。

M_K : X 上の実数値、有界且つ台がコンパクトである函数全体。

C_b : X 上の実数値有界連続函数全体に一様収束位相が導入された空間

C_0 : X 上の実数値有限連続且つ ∞ で 0 となる函数全体に一様収束位相が導入された空間。

C_K : X 上の実数値有限連続且つ台がコンパクトである函数全体に帰納的位相が導入された空間。

これらの非負函数全体から成る部分集合を $L_{loc}^+, \dots, C_K^+$ と記す。

μ を X 上の実 Radon 測度としよう。 μ と原点に関して対称な測度を $\tilde{\mu}$ と記す。 $\mu = \tilde{\mu}$ の時、 μ を対称と言う。 μ の直交 $s(\mu)$ 、 μ の週期全体の集合を $p(\mu)$ と記す。 $x \in X$ の点 x_0 が μ の週期であるとは $\mu = \mu * \varepsilon_{x_0}$ となる場合である。 ここで ε_{x_0} は x_0 における単位質量を表す。

X 上の合成核 N とポテンシャル論を前提として、 N の Radon 測度を意味する。 実 Radon 測度 μ に対して、 合成 $N * \mu$ が意味を持つ時、 この合成を μ の N -ポテンシャルと呼ぶ。 更に $N * \mu$ が s に関して絶対連続になる時、 その密度関数を $N\mu$ とかく。 X 上 $\mu = f \otimes \nu$ ($f \in L_{loc}$) 且つ $N * \mu$ が意味を持つ時、 $N\mu = N * f$ とかく。 $f \in M_K$ に対し、 Nf は常に意味を持ち、 Nf は局所所有界である。

注意 1. $f \in L^2(\mathbb{R})$ がコンパクト支持を持つとする。 この時 Nf は意味を持ち、 且つ局所 L^2 である。

ポテンシャル論で最大値に関する原理で重要なものは次の二つである。

C_K -優越原理 (C_K -完全最大値原理) : 合成核 N が C_K -優越原理 (C_K -完全最大値原理) を満足するとは、 2つの函数 $\varphi, \psi \in C_K^+$ に対して、 不等式 $N * \varphi \leq N * \psi + 1$ $(N * \varphi \leq N * \psi + 1)$ が $s(\varphi)$ 上成立すれば、 直ちに X 全体で成立する場合がある。

注意 2. 合成核 N が C_K -優越原理 (又は C_K -完全最大値原

理) を満たすことと次の命題は同値である。

2つの台関数コンパクトな正の Radon 測度 μ, ν に対して、測度としての不等式 $N*\mu \leq N*\nu$ (又は $N*\mu \leq N*\nu + \varepsilon$) が $S(\mu)$ のある近傍で成立すれば、直ちに同不等式が X 全体で成立する。

これらの C_k -型の原理は以下の掃散分布を論じるときに際し、有効である。しかし更に広い設定でのポテンシャル論、及び以下関数空間に於けるポテンシャル論では、その意味が不明瞭である。

M_k -優越原理 (M_k -完全最大値原理) : 合成核 N が M_k -優越原理を満足するとは、 $f, g \in M_k^+$ に対して、 f の核 $k(f) = \{x \in X; f(x) > 0\}$ 上 T (とくに k に関し) 殆んど至る所、不等式 $Nf \leq Ng$ (又は、 $Nf \leq Ng + 1$) が成立すれば、直ちに X 上殆んど至る所同不等式が成立する場合である。

注意3. N が M_k -優越原理 (又は M_k -完全最大値原理) を満たさなければ、次の命題が成立する。

2つの非負、台関数コンパクトな $L^2(\xi)$ に属する関数 f, g に対し、 $k(f)$ 上殆んど至る所、不等式 $Nf \leq Ng$ (又は $Nf \leq Ng + 1$) を満たさなければ、 X 上殆んど至る所、同不等式が成立する。

全く同様であるから、 N が対称の場合に限って証明する。

f, g 上の命題の函数とする。この時 $k(f)$ 上殆んど至る所

$Nf > 0$. 又論 $N \neq 0$ の場合であるが、 f は f の
 $\{x \in K(f); Nf(x) = 0\}$ へ制限した函数とする時 $Nf' = 0$ かつ $K(f')$ 上
 殆んど至る所成立する。 $f'_n = \inf(f, n)$ とおくと $K(f'_n)$ 上殆んど
 至る所 $Nf'_n = 0$, 故に N の M_K -優越原理から $Nf'_n = 0$ を得
 て, $f'_n = 0$ とおける。従って $Nf < Ng$ が殆んど至る所 $K(f)$ 上成
 立して居る場合 $Nf \leq Ng$ が X 上殆んど至る所成立するとい
 う事は十分である。 $g_n = \inf(g, n)$ とおき、次に f_n を f の
 $\{x \in X; Ng_n(x) \geq Nf(x)\}$ への制限とする。この時、直ちに X 上殆
 んど至る所 $Nf_n \leq Ng_n$ が成立する。即ち $Nf_n \leq Ng$. $n \rightarrow \infty$
 として, X 上殆んど至る所 $Nf \leq Ng$ を得る。又論完全
 最大値原理についても同様である。

注意 4. N が M_K -優越原理 (又は M_K -完全最大値原理) を
 満すことと次の命題は同値である。

2つの函数 $f, g \in M_K$ に対し, 不等式 $Nf \leq Ng$ (或 $Nf \leq Ng + 1$)
 かつ $S(f) = S(f \circ S)$ 上殆んど至る所成立すれば, 全空間で殆んど
 至る所成立する。

N が M_K -優越原理 (又は M_K -完全最大値原理) を満せば,
 上の命題が得られることは明らかである。逆を議論してみよ
 う。同様であるから優越原理のみについて調べよう。2つの函
 数 $f, g \in M_K$ に対し, $K(f)$ 上殆んど至る所 $Nf \leq Ng$ であると
 仮定しよう。この時, あるコンパクト集合の増加分列 $(K_n)_{n=1}^\infty$ を

各 K_n 上 $Nf \leq Ng$ 且つ $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(K_n) = \xi(k(f))$ と出来るように選べる。 f_n を f の K_n への制限とする。この時 $S(f_n)$ 上に殆んど至る所 $Nf_n \leq Ng$ 。従って同じ不等式が全空間で殆んど至る所成立する。 $n \rightarrow \infty$ として、 $Nf \leq Ng$ が X 上に殆んど至る所成立することがある。

補題 1. 合成核 N が M_K -優越原理 (又は M_K -完全最大値原理) を満たすことと、任意の正数 ε に対し、 $N + c\varepsilon$ が M_K -優越原理 (又は M_K -完全最大値原理) を満たすことと同値である。

こゝに、 ε は原素に於ける単位質量である、度々 ε は単位核と呼ばれる。

証明. 同様であるから優越原理についてのみ論じる。まず必要条件から始める。2つの函数 $f, g \in M_K$ と正数 c に対し $k(f)$ 上に殆んど至る所 $Nf + cf \leq Ng + cg$ とする。この時、 $k(f)$ 上に殆んど至る所 $N(f-g)^+ + c(f-g)^+ \leq N(f-g)^- + c(f-g)^-$ 。従って $\xi(k(f) \cap k(g)) = 0$ と仮定して十分である。故に $Nf \leq Ng$ が $k(f)$ 上に殆んど至る所成立する。これから同不等式が全空間で殆んど至る所成立する。即ち X 上に殆んど至る所、 $Nf \leq Ng + cg$ 。上の仮定と合わせて、 $N + c\varepsilon$ が M_K -優越原理を満たすことがわかる。

次に十分条件に移そう。注意する証明の中で述べたと同様 $N \neq 0$ である限り、任意の $f \in M_K$ に対し、 $k(f)$ 上に殆んど至る

3 所 $Nf > 0$ になる。同様に、ある函数 $f_1 \in M_K$ が存在して、 $\xi(\{x \in k(f_1); Nf_1(x) = 0\}) \neq 0$ であることが成り立つ。 f_0 と f_1 の $\{x \in k(f_1); Nf_1(x) = 0\}$ への制限とする。この時 $f_0 \neq 0$ かつ $k(f_0)$ 上殆んど至る所 $Nf_0 = 0$ 。任意の $g \in M_K$ に対して、 $k(f_0)$ 上殆んど至る所 $Ng = 0$ とすれば、 X 上殆んど至る所 $Nf_0 = 0$ と成る。しかし、これは $N \neq 0$ に反す。従ってある函数 $g \in M_K$ とある正数 a が存在して、 $\xi(\{x \in k(f_0); Ng(x) \geq a\}) > 0$ である。 f_0 と f_0 の $\{x \in k(f_0); Ng(x) \geq c\}$ への制限とする。この時、 $f_0' \neq 0$ かつ $k(f_0')$ 上殆んど至る所 $Nf_0' = 0$ 。任意に与えられた正数 $\delta > 0$ に対し、正数 c を $0 < c(\text{ess. sup}_{x \in X} f_1(x)) \leq ac$ と成るように選べば、 $k(f_0')$ 上殆んど至る所 $Nf_0' + cf_0' \leq \delta(Ng + cg)$ 。 $N + c \in M_K$ の優越原理から、同式算式は全空間で殆んど至る所成り立つ。 $\delta \rightarrow 0$ とし、 $Nf_0' = 0$ かつ X 上殆んど至る所成り立つ。これは $N \neq 0$ に反す。故に、任意の $f \in M_K$ に対して、 $k(f)$ 上殆んど至る所 $Nf > 0$ 。この注意から、 N は M_K -優越原理を満たすことを示すのに次の命題を示せば十分である。"2 つの函数 $f, g \in M_K$ に対し、 $k(f)$ 上殆んど至る所 $Nf < Ng$ ならば、 X 上殆んど至る所 $Nf \leq Ng$." f_n と $\{x \in X; Ng(x) \geq Nf(x) + \frac{1}{n}\}$ への制限とする。今正数 c_n を $c_n(\text{ess. sup}_{x \in X} f(x)) < \frac{1}{n}$ と成るように選ぶ。この時 $Nf_n + c_n f_n \leq Ng + c_n g$ かつ $k(f_n)$ 上、故に X 上殆んど至る所成り立つ。次に $n \rightarrow \infty$ とし、 X 上殆んど至る所 $Nf \leq Ng$

であることを得る。(証明終).

我々は今2種類の優越原理, 完全最大値の原理を定義(6)が, 二つは同値であることがわかる.

定理1. 合成核 N に対して, C_k -優越原理(又は C_k -完全最大値原理), M_k -優越原理(又は M_k -完全最大値原理)は同値である.

証明. N が M_k -優越原理を満足せば, C_k -優越原理を満足することになることは明らかである. 逆の証明をしよう. 補題1と同様, N が C_k -優越原理を満足せば, 任意の正数 c に対して, $N + cE$ も同じである. 又上の補題から, 任意の正数 c に対して $N + cE$ が M_k -優越原理を満足することを示せば十分である. ある正数 c と2つの函数 $f, g \in M_k^+$ に対して, $S(f)$ 上に殆んど至る所 $Nf + cf \leq Ng + cg$ であると仮定しよう. $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ を相対コンパクト閉集合の減少列で $\bigcap_{n=1}^\infty \omega_n = S(f)$ を満足とす. $\omega_n - S(f)$ の特性函数を x_n とすれば, $Nx_n + cx_n$ は $n \rightarrow \infty$ の時, X 上に殆んど至る所 0 に収束する. $\alpha = \text{ess. sup}_{x \in \omega_1} (Nf(x) + cf(x))$ とおく時, 各 ω_n 上で殆んど至る所,

$$Nf + cf \leq Ng + cg + \frac{\alpha}{c} (Nx_n + cx_n)$$

が成立する. 注意2を用いれば, この不等式は X 上に殆んど至る所成立する. ところで $n \rightarrow \infty$ として, X 上に殆んど至る所,

$Nf + cf \leq Ng + cg$ を得る. 即ち $N + cE$ は M_k -優越原理を満足.

同様の議論が完全最大原理に対してもなされる。(証明終)

従って、優越原理、完全最大原理を論じるのに上のよう
に区別をすることは必要はないことを知る。次にこれらと深い関係
がある掃散について論じてみよう。

掃散原理: 合成核 N が掃散原理を満足するとは、任意の
コンパクトな正の Radon 測度 μ と X 内の相対コンパクト
開集合 ω を与えた時、 ω に μ を持ち且つ次の2条件を満足す
る正の Radon 測度 μ' が存在する場合である。

(i) 測度の意味で X 上 $N * \mu \geq N * \mu'$.

(ii) 測度の意味で ω 上 $N * \mu = N * \mu'$.

この時、 μ' を μ の ω への一つの掃散分布と言う。これは必
ずしも唯一つ定まるとは限らない。

補題2. N を優越原理を満す対称な合成核とする。実数値
且つコンパクトな $L^1(E)$ の函数 f とある正数 c に対して、
 $k(f)$ 上殆んど至る所 $Nf + cf = 0$ ならば、 $f = 0$ である。

証明. 首先 $Nf \in L_{loc}$ であることを注意する。 $Nf^+ - Nf^-$
 $= -c(f^+ - f^-)$ に依り、 $k(f^+)$ 上殆んど至る所 $Nf^+ \leq Nf^-$ とす
る。注意3と同様にして、 X 上殆んど至る所 $Nf^+ \leq Nf^-$, 即ち
 $Nf \leq 0$ とする。従って $f \geq 0$ を得る。これから直ちに $f = 0$
となる。

補題3. N, f, c を上と同様とする。 $k(f)$ 上殆んど至る

所 $Nf + cf \geq 0$ ならば, X 上殆んど至る所 $Nf \geq 0$ となる.

証明. 上と同様にして $Nf^+ - Nf^- \geq 0$ が殆んど至る所 f^+ 上成立する. 従って同不等式が X 上殆んど至る所成立する.

補題4. N, c を上と同じとしよう. あるコンパクト集合 K に至る所 M_K 内の函数列 $\{f_n\}$ に対し, $\{Nf_n + cf_n\}$ が K 上有界であれば, $\{f_n\}$ も又有界である.

証明. 仮定によって, ある正定数 A があって, n に関して一律に K 上殆んど至る所 $-A \leq Nf_n + cf_n \leq A$ となる. χ_K を K の特性函数とする時, K 上殆んど至る所

$$-N\left(\frac{A}{c}\chi_K\right) - A\chi_K \leq Nf_n + cf_n \leq N\left(\frac{A}{c}\chi_K\right) + A\chi_K$$

を満す. 補題3を用いて, X 上殆んど至る所,

$$-N\left(\frac{A}{c}\chi_K\right) \leq Nf_n \leq N\left(\frac{A}{c}\chi_K\right)$$

を満す. $N\chi_K$ は局所有限であるから, $\{f_n\}$ が有界であることが知られる.

定理2. 対称正合成核 N に対して, 次の2条件は同値である.

(i) N は優越原理を満す.

(ii) N は掃散原理を満す.

証明. 先ず (i) $\Rightarrow$ (ii) を示そう. ω を X 内の相対コンパクト集合として

$$P(\omega; c) = \{(Nf)_\omega + cf; f \in M_K(\omega)\}.$$

とおく。ただし $c > 0$ 及び $(Nf)_\omega$ は Nf の ω への制限である。

補題 2 より $P(\omega; c)$ は $L^2(\bar{\omega})$ 内で稠密である。故に $f \in M_K^+$ に対して, $\bar{\omega}$ に台を持つ M_K 内の函数列 $(f'_n)_{n=1}^\infty$ が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{\omega}} |Nf'_n + cf'_n - Nf|^2 d\xi = 0$$

と出来る。明らかに, $\bar{\omega}$ 上で殆んど至る所

$$|Nf'_n + cf'_n| \leq \frac{1}{c} (N((Nf)_\omega + |(Nf)_\omega - (Nf'_n)_\omega - cf'_n|) + c((Nf)_\omega + |(Nf)_\omega - (Nf'_n)_\omega - cf'_n|).$$

補題 3 を用いれば, X 上で殆んど至る所

$$|Nf'_n| \leq \frac{1}{c} N((Nf)_\omega + |(Nf)_\omega - (Nf'_n)_\omega - cf'_n|).$$

故に $((Nf'_n)_\omega)$ は $L^2(\bar{\omega})$ 内で有界である。即ち $\{f'_n\}$ も又有界である。従って, ある函数 $f' \in L^2(\xi)$ でその台が $\bar{\omega}$ に含まれるものが存在して, $\bar{\omega}$ 上で殆んど至る所 $Nf' + cf' = Nf$ を満たす。補題 3 同様 $Nf' \leq Nf$ が X 上で成立することを知り $f' \geq 0$ を得, 合わせて $f' \in M_K^+$ もわかる。 c を動かす時, $(f; \xi)$ は有界であり, $c \rightarrow 0$ とする時, $\bar{\omega}$ に台を持つ正の Radon 測度 μ_f が存在し, これが $f\xi$ の ω への掃散分布であることがわかる。これから直ちに一般に正の Radon 測度に対して台がコンパクトなる限り掃散分布の存在を知る。次に (ii) $\Rightarrow$ (i) を示す。 $\varphi, \psi \in C_K^+$ に対して, $S(\varphi)$ 上, $N*\varphi \leq N*\psi$ を仮定する。任意の $x \in C(S(\varphi))$ に対して, $S(\varphi)$ に台を持つ正の Radon 測度 ε'_x が存在して, $\{x \in X; \varphi(x) > 0\}$ 上 $N*\varepsilon_x = N*\varepsilon'_x$, X 上 $N*\varepsilon_x \leq N*\varepsilon'_x$ を満たす。ただし ε_x は

点 x における単位質量を表わす,

$$\begin{aligned} N * \varphi(x) - N * \psi(x) &= \int (\varphi - \psi) d(N * \varepsilon_x) \\ &\leq \int (\varphi - \psi) d(N * \varepsilon'_x) = \int N * (\varphi - \psi) d\varepsilon'_x \leq 0. \end{aligned}$$

即ち X 上 $N * \varphi \leq N * \psi$ を得て, N が優越原理を満すことを得る.

定理 3. N を対称な合成核とする. この時, N に対する優越原理, 完全最大値の原理は同値である.

証明. N に対する完全最大値の原理から優越原理が得られることは明らかであるから, この逆を示す. 上で行った計算と同様にして, 次の命題から N に対する完全最大値の原理が得られる.

"任意の点 $x \in X$ と任意の相対コンパクト開集合 K に対して, 全測度 $\mu(K)$ 以下の ε_x の ω への掃散分布 ε'_x が存在する."

議論の対象が合成核であることを注意する時, 原点 K に対してのみ上の命題を示せばよい. $N \neq 0$ と仮定してよい. ε' を ε の ω への一つの掃散分布とする. この時, $0 < \alpha < 1$ に対して, $N \geq N * (\alpha \varepsilon' * \check{\varepsilon}')$ 及び $N \neq N * (\alpha \varepsilon' * \check{\varepsilon}')$ である. この $\alpha \varepsilon' * \check{\varepsilon}'$ の合成を $(\alpha \varepsilon' * \check{\varepsilon}')^n$ と記す時,

$$0 \leq (N * (\varepsilon - \alpha \varepsilon' * \check{\varepsilon}')) * \sum_{k=0}^n (\alpha \varepsilon' * \check{\varepsilon}')^k = N - N * (\alpha \varepsilon' * \check{\varepsilon}')^{n+1}.$$

ただし $(\alpha \varepsilon' * \check{\varepsilon}')^0 = \varepsilon$. 故に $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha \varepsilon' * \check{\varepsilon}')^k$ が測度として意味を持つ. 而も $\varepsilon' * \check{\varepsilon}'$ が正型であるから $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha \varepsilon' * \check{\varepsilon}')^k$ も又正型な

測度である。等式

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (a\varepsilon' * \check{\varepsilon}')^k \right) * (\varepsilon - a\varepsilon' * \check{\varepsilon}') = \varepsilon$$

に注意して, $\varepsilon - a\varepsilon' * \check{\varepsilon}'$ が正型であることがわかる。これから直ちに $a \int d(\varepsilon' * \check{\varepsilon}') \leq 1$, 即ち $a \left(\int d\varepsilon' \right)^2 \leq 1$ を得る。 $a \rightarrow 1$ として, $\int d\varepsilon' \leq 1$ がわかる。 (証明終)

定理 4. 対称な合成核 N が優越原理を満足すれば, N は正型である。

証明. 任意の正数 c に対して, $N + c\varepsilon$ が正型であることがわかる。 ω を任意の相対コンパクト開集合とする。任意の $f \in M_K$ に対して, 定理 3 と同様に, $\overline{\omega}$ 上に積る M_K の函数 $f'_{c,\omega}$ が唯一つ存在して, 殆んど至る所 X 上

$$(N + c\varepsilon)f'_{c,\omega} \leq Nf \quad \text{かつ} \quad \omega \text{ 上 } (N + c\varepsilon)f'_{c,\omega} = Nf \quad \text{を満す。}$$

函数 $f'_{c,\omega}$ に対して, 得られる上記の函数を $f''_{c,\omega}$, 一般に $f^{(n)}_{c,\omega}$ に対して上記の方法で得られる函数を $f^{(n+1)}_{c,\omega}$ とかく。この時, $s(f) \subset \overline{\omega}$ の限り, $\overline{\omega}$ 上殆んど至る所

$$Nf + cf = cf + c \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}_{c,\omega}$$

が成立する。而も右辺の右は $\overline{\omega}$ に含まれる。上記を得る為には, 先ず $\overline{\omega}$ 上殆んど至る所

$$Nf + cf = cf + c \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}_{c,\omega} + \lim_{n \rightarrow \infty} Nf^{(n)}_{c,\omega}$$

を得。次に $f^{(n)}_{c,\omega}$ が 0 に収束することはわかる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} Nf^{(n)}_{c,\omega} = 0$ を得る。又 $s(f) \subset \overline{\omega}$, $s(g) \subset \overline{\omega}$ なる M_K の函数 f, g に対して

明らかに $\int f'_{c,\omega} f d\xi = \int g'_{c,\omega} f d\xi$ を得る。定理 3.1, $\int f'_{c,\omega} d\xi \leq \int f d\xi$

であるから, $0 \leq (x_\omega)'_{c,\omega} \leq 1$ を得る。 $f \in M_K$ に対して, $f'_{c,\omega}$

$= (f^+)_{c,\omega}' - (f^-)_{c,\omega}'$ とおき、又 $s(f) < \bar{\omega}$ なる函数 $f \in M_K$ に対し

て, $(Nf)_\omega$ を Nf の $\bar{\omega}$ への制限とする。この時,

$$\begin{aligned} \int (Nf + cf) f d\xi &= \frac{1}{c} \int ((Nf)_\omega + cf)((Nf)_\omega + cf - ((Nf)_\omega + cf)'_{c,\omega}) d\xi \\ &= \frac{1}{c} \int |(Nf)_\omega + cf|^2 (1 - (x_\omega)'_{c,\omega}) d\xi + \frac{1}{2c} \int \{((Nf)_\omega(x) + cf(x))x_\omega - (Nf)_\omega - cf\}^2\}'_{c,\omega} d\xi(x) \geq 0. \end{aligned}$$

ω は任意であるから, 全ての $f \in M_K$ に対して

$$\int f + \tilde{f} d(N + c\xi) = \int (Nf + cf) f d\xi \geq 0$$

を得る。 $N + c\xi$ は正型となり証明を終る。

以上の議論から, 対称の合成核の優越原理, 掃散原理を論じる場合, 正型の合成核に限っていいことがわかる。正型と関係して, ある種の函数空間について述べる。

3. ある種の函数空間と優越原理

X 上の実数値局所 ξ -可積分函数から成るヒルベルト空間 $H = H(X; \xi)$ が X 上の平行移動で不変な函数空間であるとは, 次の2条件を満足する場合である。

(H.1) X 内のコンパクト集合 K に対して, K により依存する正定数 $A(K)$ が存在して, 任意の $u \in H$ に対して

$$\int_K |u| d\xi \leq A(K) \|u\|$$

を満す。

(H.2) 任意の x の真点と任意の $u \in H$ に対して, u を x だけ平行移動して得られる函数 $T_x u$ が H に属し, かつ $\|T_x u\| = \|u\|$ を満足する。

上の条件で $\|\cdot\|$ は H 内のノルムを表わす。 $(\cdot, \cdot)$ は H 内の内積とする時, 任意の $f \in M_K$ に対して, 条件 (H.1) より H の元 u_f が唯一つ定まり, 任意の $v \in H$ に対して

$$(u_f, v) = \int v f d\xi$$

を満す。この u_f を f に依る H 内のポテンシャルと呼ぶ。

注意と。 H を X 上の平行移動で不変な函数空間とする。この時次の (i), (ii) が成立する。

(i) 任意の $u \in H$ に対して, 写像 $x \mapsto T_x u \in H$ は強連続である。

(ii) 任意の $u \in H$ と $f \in L^1(\xi)$ に対して, $u * f$ は意味を持ち $u * f \in H$ かつ $\|u * f\| \leq \int |f| d\xi \|u\|$ を満足する。

証明. 真列 $\{x_n\}$ が真真に収束し去とする。この時 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{x_n} u\| = \|u\|$ かつ任意の $f \in M_K$ に対して,

$$(u_f, T_{x_n} u) = \int T_{x_n} u(x) f(x) d\xi(x) \rightarrow \int u(x) f(x) d\xi(x) = (u_f, u).$$

$\{u_f; f \in M_K\}$ は H 内で稠密であるから, $\{T_{x_n} u\}$ は u に強収束する。即ち (i) を得る。

(ii) を示そう。通常 of 極限操作によつて, $f \in M_K$ に対して, $u * f \in H$ かつ $\|u * f\| \leq (\int |f| d\xi) \|u\|$ であることがわかる。

H 上の線型汎函数

$$H \ni v \rightarrow \int (\tau_x u, v) \check{f}(x) d\xi(x)$$

を考えよう。これは

$$|\int (\tau_x u, v) \check{f}(x) d\xi(x)| \leq (\int |f| d\xi) \|u\| \|v\|$$

より、有界である。故に H 内のある函数 u' が存在して

$$(u', v) = \int (\tau_x u, v) \check{f}(x) d\xi(x)$$

を満足する。特に $v = u_g$ ($g \in M_K$) とする時、

$$\begin{aligned} \int u' g d\xi &= (u', u_g) = \int (\tau_x u, u_g) \check{f}(x) d\xi(x) = \iint \tau_x u(y) g(y) \check{f}(x) d\xi(y) d\xi(x) \\ &= \iint \tau_x u(y) f(-x) g(y) d\xi(x) d\xi(y) = \int u * f(y) g(y) d\xi(y). \end{aligned}$$

g は任意であるから、 $u' = u * f$ と得る。 $u * f \in H$ かつ $\|u * f\|$

$\leq (\int |f| d\xi) \|u\|$ を得る。 (証明終)

系. H 上に同じとすると、 $H \cap C_b$ は H 内で稠密である。

なぜなら、上の (i) より $\{u_f * g; f \in M_K, g \in C_K\}$ は H 内で稠密であり、
 $|u_f * g(x)| = |\int \tau_x u_f(y) \check{g}(y) dy| = |(\tau_x u_f, u_{\check{g}})| \leq \|u_f\| \|u_{\check{g}}\|$
 より $u_f * g \in C_b$ である。

X 上の平行移動で不変な函数空間 H が正核を持つとは、任意の $f \in M_K$ に対して、 $u_f \geq 0$ となる場合である。

定理 5.

(i) 正核を持つ平行移動で不変な函数空間 H に対して、対称かつ正型の合成核 N が唯一に定まって、任意の $f \in M_K$ に対して、 f による H 内のポテンシャル u_f が Nf に等しい。

(ii) 逆に対称かつ正型の合成核 N を与えた時, 正核を持つ平行移動で不変な函数空間 H が唯一决定着, 任意の $f \in M_K$ に対して, f による H 内のポテンシャル u_f が Nf に等しい。

証明. H は正核を持つ X 上の平行移動で不変な函数空間とする. この時, 任意の $f \in M_K$ と $x \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|T_x u_f - u_{T_x f}\|^2 = \|u_f\|^2 - 2(T_x u_f, u_{T_x f}) + \|u_{T_x f}\|^2 \\ &= \|u_{T_x f}\|^2 - \|u_f\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\|u_{T_x f}\|^2 = \sup_{u \in H} \frac{\int u T_x f d\mathbb{E}}{\|u\|^2} = \sup_{u \in H} \frac{(T_x u, u_f)}{\|u\|^2} \leq \sup_{u \in H} \frac{\|T_x u\|^2 \|u_f\|^2}{\|u\|^2}.$$

故に, $T_x u_f = u_{T_x f}$ である. これより, $f, g \in M_K$ に対して

$u_{(f*g)} = u_f * g = u_g * f$ を得る. $\tilde{C}_K = \{\sum_{有限} f_i * g_i; f_i \in M_K, g_i \in M_K\}$ とおくと, $\tilde{C}_K$ は C_K で稠密である. $\tilde{C}_K$ 上の線型汎函数

$$\sum_{有限} f_i * g_i \rightarrow \sum \check{f}_i * \check{g}_i(0)$$

が定義され, H が正核を持つことから, この線型汎函数は正値である. 故にある正の Radon 測度 N が存在して, 任意の f, g

$\in M_K$ に対して, $\int \check{f} * \check{g} dN = N * f * g(0) = u_f * g(0)$ を満たす. これ

より直ちに $u_f = Nf$ を得る. N は対称であることは直ちに明らかであり又

$\int f * \check{f} dN = (u_f, u_f) \geq 0$ より N は正型である.

(ii) を示そう. $H' = \{Nf; f \in M_K\}$ とおこう. N は正型である

ことから $\|Nf\| = (\int Nf(x) f(x) d\mathbb{E}(x))^{1/2}$ 及び $(Nf, Ng) = \int Nf g d\mathbb{E}$ によ

って H' は内積を定義する時, H' は前ヒルベルト空間で

ある。任意のコンパクト集合 K に対し 2 , $K_1 = \{x \in K; Nf(x) > 0\}$,
 $K_2 = \{x \in K; Nf(x) < 0\}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \int_K |Nf| d\xi &= \int_{K_1} Nf d\xi - \int_{K_2} Nf d\xi \leq \|N\chi_{K_1}\| \|Nf\| + \|N\chi_{K_2}\| \|Nf\| \\ &\leq 2 \|N\chi_K\| \|Nf\| = A(K) \|Nf\|. \end{aligned}$$

故に H' を完備化して得られるヒルベルト空間 H は明らかに X 上の平行移動で不変な函数空間である。任意の $f \in M_K$ に対し $Nf = \chi_f$ であることは殆んど明らかであろう。(証明終)

この時、我々は N を H の核、又は H は合成核 N から生成された函数空間と呼び、 $H = H(N)$ とかく。

定理 6. N_1, N_2 は 2 つの対称かつ正型の合成核とする。この時 $H(N_1 + N_2) = \{u_1 + u_2; u_1 \in H(N_1), u_2 \in H(N_2)\}$ である。特に $H(N_1) \cap H(N_2) = \{0\}$ である時は、 $H(N_1 + N_2)$ は $H(N_1)$ と $H(N_2)$ の直和である。

証明. $u \in H(N_1)$ に対し 2 次の線型汎函数を考える。

$$\{N_1 f + N_2 f; f \in M_K\} \ni N_1 f + N_2 f \rightarrow \int u f d\xi.$$

$$|\int u f d\xi| \leq \|u\|_1 \|N_1 f\|_1 \leq \|u\|_1 \|N_1 f + N_2 f\|_{(1,2)}.$$

ただし、 $\|\cdot\|_i$ ($i=1, 2$), $\|\cdot\|_{(1,2)}$ は夫々 $H(N_i)$, $H(N_1 + N_2)$ 内のノルムである。故に上の線型汎函数は $H(N_1 + N_2)$ 上に拡張され、これが有界である。これから直ちに $u \in H(N_1 + N_2)$ がわかり、

$\|u\|_{(1,2)} \leq \|u\|_1$ を得る。同様に 1 と、任意の $u \in H(N_2)$ に対し 2

$u \in H(N_1 + N_2)$ から $\|u\|_{(1,2)} \leq \|u\|_2$ を得る。即ち $\{u_1 + u_2; u_i \in H(N_i)\}$

$\subset H(N_1 + N_2)$, $\{N_1 f + N_2 f \in H(N_1 + N_2); f \in M_K\}$ は $H(N_1 + N_2)$ 内で稠密であるから、任意の $u \in H(N_1 + N_2)$ に対し、ある M_K 内の函数列 $\{f_n\}$ が存在して、 $\{N_1 f_n + N_2 f_n\}$ が u に $H(N_1 + N_2)$ 内で強収束する。任意の n, m に対し

$$\|N_1 f_n + N_2 f_n - N_1 f_m - N_2 f_m\|_{(1,2)}^2 = \|N_1 f_n - N_1 f_m\|_1^2 + \|N_2 f_n - N_2 f_m\|_2^2.$$

故に $\{N_1 f_n\}$, $\{N_2 f_n\}$ はそれぞれ $H(N_1)$, $H(N_2)$ 内で基本列である。従って、ある $u_1 \in H(N_1)$, $u_2 \in H(N_2)$ が存在して、 $n \rightarrow \infty$ 時、 $\{N_1 f_n\}$, $\{N_2 f_n\}$ がそれぞれ u_1 , u_2 に $H(N_1)$, $H(N_2)$ 内で強収束する。 $\{N_1 f_n + N_2 f_n\}$, $\{N_1 f_n\}$, $\{N_2 f_n\}$ はそれぞれ u , u_1 , u_2 に X 上で強収束すると仮定してよいため、 $u = u_1 + u_2$ を得る。我々の定理の後半は上の議論の直接の結果である。 (証明終)

系. N を対称正型の合成核とする。任意の正数 c に対し、 $H(N + cE) \supset L^2(E)$ 。

上の定理と $H(E) = L^2(E)$ から明らかである。

定理 7. N を X 上の対称正合成核としよう。この時次の4条件は同値である。

- (i) N は優越原理を満す。
- (ii) N は完全最大値原理を満す。
- (iii) N を核に持つ平行移動で不変な函数空間 $H = H(N)$ が存在して、Module contraction が H に作用する。
- (iv) N を核に持つ函数空間 H が存在して、全ての Normal

contraction H に作用する。

実数からそれ自身への写像 T が原点を保存し、距離を縮小する時、Normal contraction と呼ぶ。特に $T(a) = |a|$ で定義される Normal contraction を Module contraction と呼ぶ。Normal contraction T が任意の $u \in H$ に対して、 $T \cdot u \in H$ かつ $\|T \cdot u\| \leq \|u\|$ の時、 H に作用すると言う。

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) は既に証明した。(ii) $\Rightarrow$ (i), (iv) $\Rightarrow$ (iii) は明らか。

(ii) $\Rightarrow$ (iv): 定理 4 から N は正型であることを知り、これから直ちに N から生成される平行移動で不変な函数空間 $H = H(N)$ の存在がわかる。

補題 5. H を平行移動で不変な函数空間とし、 T をある Normal contraction とする。任意の $\varphi \in C_K$ に対して、 $T \cdot u_\varphi$ は H に属し、かつ $\|T \cdot u_\varphi\| \leq \|u_\varphi\|$ ならば T は H に作用する。ただし、 u_φ は φ による H 内のポテンシャルである。

補題 5 の証明. まず $\{u_\varphi; \varphi \in C_K\}$ は H 内で稠密であることがわかる。従って $u \in H$ に対して、ある C_K 内の函数列 $\{\varphi_n\}$ が存在して、 $\{u_{\varphi_n}\}$ は u に H 内で強収束する。我々の仮定により $T \cdot u_{\varphi_n} \in H$ かつ $\|T \cdot u_{\varphi_n}\| \leq \|u_{\varphi_n}\|$ を得る。任意のコンパクト集合 K に対して、

$$\int_K |T \cdot u_{\varphi_n} - T \cdot u_{\varphi_m}| d\xi \leq \int_K |u_{\varphi_n} - u_{\varphi_m}| d\xi \leq A(K) \|u_{\varphi_n} - u_{\varphi_m}\|$$

より、 $\{T \cdot u_{\varphi_n}\}$ $\{u_{\varphi_n}\}$ 同様 $T \cdot u$, $u \sim X$ 上強収束する所収束

すると仮定出来る。 $\{T \cdot u_{q_n}\}$ が H 内で有界であることに注意

17. この函数列が H 内で $T \cdot u$ に弱収束することになる。

故に $\|T \cdot u\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T \cdot u_{q_n}\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{q_n}\| = \|u\|$ を得る。 T が H へ作用することになる。

補題6. $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$ を対称かつ正型の合成核の列で、ある合成核 N に強収束すると仮定する。もしある Normal contraction T が $H(N_n)$ に作用するならば、 T は $H(N)$ へも作用する。

補題6の証. 任意の $\varphi \in C_k$ に対して、 $\{T \cdot (N_n * \varphi)\}_{n=1}^{\infty}$ は $T \cdot (N * \varphi)$ へ $n \rightarrow \infty$ の時、弱収束する。又我々の仮定から、任意の n に対して、 $T \cdot (N_n * \varphi) \in H(N_n)$ かつ $\|T \cdot (N_n * \varphi)\|_n \leq \|N_n * \varphi\|_n$ である。さらに、 $\|\cdot\|_n$ は $H(N_n)$ 内のノルムを示す。任意の $f \in M_k$ に対して、

$$\begin{aligned} \left| \int (T \cdot N * \varphi) f d\xi \right| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int (T \cdot (N_n * \varphi)) f d\xi \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T \cdot (N_n * \varphi)\|_n \cdot \|N f\|_n \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|N_n * \varphi\|_n \cdot \|N f\|_n = \|N * \varphi\| \cdot \|N f\|. \end{aligned}$$

さらに $\|\cdot\|$ は $H(N)$ 内のノルムを表わす。我々はこの議論で

$$\|N f\|_n = \left(\int f * \bar{f} dN_n \right)^{1/2}$$

であることを注意する。故に次の線型汎函数

$$\{N f \in H(N); f \in M_k\} \ni N f \rightarrow \int T \cdot (N * \varphi) f d\xi$$

は $H(N)$ まで拡張され、有界である。Rieszの定理から $T \cdot (N * \varphi) \in H(N)$ を得、又上で行った計算から $\|T \cdot (N * \varphi)\| \leq \|N * \varphi\|$ であることが見える。従って補題5から我々の結論を得る。

補題 7. N を優越原理を満足する対称正定成核とし, c をある正数とする. 任意のコンパクトである正の Radon 測度 μ と相対コンパクト閉集合 ω に対して, ω を包み持つ正の Radon 測度 $\mu'_{(c, \omega)}$ が唯一つ存在し, 次の条件を満足する.

(i) 測度の意味で X 上 $N * \mu'_{(c, \omega)} + c \mu'_{(c, \omega)} \leq N * \mu$.

(ii) 測度の意味で ω 上 $N * \mu'_{(c, \omega)} + c \mu'_{(c, \omega)} = N * \mu$.

(iii) ω を包み持つ正の Radon 測度 ν が ω 上測度の意味で $N * \nu + c \nu \geq N * \mu$ を満たせば, 常に X 上 $N * \mu'_{(c, \omega)} + c \mu'_{(c, \omega)} \leq N * \nu + c \nu$.

ε_x に対して上記の方法で定まる Radon 測度を $\varepsilon'_{x, (c, \omega)}$ とする時, 任意の $\varphi \in C_K^+$ に対して, 函数 $x \rightarrow \int \varphi(y) d\varepsilon'_{x, (c, \omega)}(y)$ は ~~Boresl 可測~~ ^{Boresl 可} 測であり, X 上 $\mu'_{(c, \omega)} = \int \varepsilon'_{x, (c, \omega)} d\mu(x)$ と表す.

補題 7 の証. $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ を $\overline{\omega_n} \subset \omega_{n+1}$ を満たかつ $\bigcup_{n=1}^\infty \omega_n = \omega$ とする閉集合列とする. 定理 2 と同様にし, $\overline{\omega_n}$ を包み持つ正の Radon 測度 μ'_n が存在して, $N * \mu'_n + c \mu'_n \leq N * \mu$ が X 上, $N * \mu'_n + c \mu'_n = N * \mu$ が ω_n 上成り立つ. この時, 直ちに $(N * \mu'_n + c \mu'_n)_{n=1}^\infty$ は X 上増加であることがわかる. 同様に, 任意の n に対して, 原集合の近傍 U_n が存在して, $s(\varphi) \subset U_n$ なる C_K^+ の函数 φ に対して, $s(\mu'_n * \varphi)$ 上 $(N + c\varepsilon) * (\mu'_{n+1} * \varphi) \geq (N + c\varepsilon) * (\mu'_n * \varphi)$ と表すように求める. 定理 4 と同様に $\int d\mu'_n \leq \int d\mu$ を得るから, 測度列 $\{\mu'_n\}$ は狭有界であることがわかる. この狭集積点の 1 つを $\mu'_{(c, \omega)}$ とするとき $\mu'_{(c, \omega)}$ が求めるものである. 条件 (i), (ii) を満たすことはほとんど明

らであり, (iii) に対しては, 上と同様にして, X 上 $N*\nu + c\nu$
 $\geq N*\mu'_n + c\mu'_n$ を得る. 即ち, X 上 $N*\mu'_{(c,\omega)} + c\mu'_{(c,\omega)} \leq N*\nu + c\nu$
 を満たす. 次に唯一性について調べよう. $\mu'_{(c,\omega)}$ は条件 (i), (ii), (iii)
 を満たす可測な正の Radon 測度とする. この時直ちに X
 上 $(N+c\varepsilon)*\mu'_{(c,\omega)} = (N+c\varepsilon)*\mu''_{(c,\omega)}$ を得る. N は正型であるから,
 $H(N+c\varepsilon)$ は意味を持ち, しかも $H(N+c\varepsilon) \subset L^2(\xi)$ である. $(\cdot, \cdot)_{(c)}$
 で $H(N+c\varepsilon)$ 内の内積を表わす. 任意の $\varphi \in C_K$ に対して,

$$N*(\mu'_{(c,\omega)} - \mu''_{(c,\omega)}) * \varphi + c(\mu'_{(c,\omega)} - \mu''_{(c,\omega)}) * \varphi \in H(N+c\varepsilon)$$

であり, かつ $u \in L^2(\xi) \subset H(N+c\varepsilon)$ に対して,

$$(u, (N+c\varepsilon)*(\mu'_{(c,\omega)} - \mu''_{(c,\omega)}) * \varphi)_{(c)} = \int u(x) (\mu'_{(c,\omega)} - \mu''_{(c,\omega)}) * \varphi(x) dx = 0.$$

即ち $\mu'_{(c,\omega)} = \mu''_{(c,\omega)}$ となる.

補題 7 の後半の証明を行う. 任意の $\varphi \in C_K^+$ に対して, 函数
 $x \rightarrow \int (N+c\varepsilon)*\varphi d\varepsilon'_{x,(c,\omega)}$ は Borel 可測であることがわかる. 十分
 $a_x = \lim_{y \rightarrow x} \int (N+c\varepsilon)*\varphi d\varepsilon'_{y,(c,\omega)}$ とおこう. この時, x に収束す
 る点列 y_n が存在して, $a_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (N+c\varepsilon)*\varphi d\varepsilon'_{y_n,(c,\omega)}$ と出来
 る. $\{\varepsilon'_{y_n,(c,\omega)}\}$ は狭有界であるから, 必要なら部分列を取ら
 せるとして, この測度列はある測度 $\varepsilon''_{x,(c,\omega)}$ に収束すると仮定
 出来る. 明らかに, X 上 $N*\varepsilon''_{x,(c,\omega)} + c\varepsilon''_{x,(c,\omega)} \leq N*\varepsilon_x$, ω 上
 $N*(\varepsilon''_{x,(c,\omega)}) + c\varepsilon''_{x,(c,\omega)} = N*\varepsilon_x$ となる. 条件 (iii) より X 上
 $N*\varepsilon''_{x,(c,\omega)} + c\varepsilon''_{x,(c,\omega)} \geq N*\varepsilon'_{x,(c,\omega)} + c\varepsilon'_{x,(c,\omega)}$ となる. 故に
 $a_x \geq \int (N+c\varepsilon)*\varphi d\varepsilon'_{x,(c,\omega)}$ となり, 函数 $x \rightarrow \int (N+c\varepsilon)*\varphi d\varepsilon'_{x,(c,\omega)}$

が半連続であることがわかる。従って積分 $\int E'_{x,(c,\omega)} d\mu(x)$ が意味を持ち、 $\overline{\mu}_{(c,\omega)}$ を持つ正の Radon 測度である。条件 (iii)

より, $(N+cE) * \mu'_{(c,\omega)} \leq (N+cE) * \int E'_{x,(c,\omega)} d\mu(x)$ であることがわかる。

一方, 任意の $\overline{\omega} \subset \omega$ なる閉集合 ω' に対し, N の優越原理から,

X 上 $(N+cE) * \mu'_{(c,\omega)} \geq (N+cE) * \int E'_{x,(c,\omega)} d\mu(x)$ であることが

わかり, 次は $E'_{x,(c,\omega)}$ の性質から, $(N+cE) * \mu'_{(c,\omega)} \geq (N+cE) * \int E'_{x,(c,\omega)} d\mu(x)$

を知る。即ち $(N+cE) * \mu'_{(c,\omega)} = (N+cE) * \int E'_{x,(c,\omega)} d\mu(x)$ である。更

に上記と同様にして, $\mu'_{(c,\omega)} = \int E'_{x,(c,\omega)} d\mu(x)$ を知る。(証明終)

我々の定理における (ii) $\Rightarrow$ (iv) の証明を続けよう。 $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n = X$ を満たす相対コンパクト閉集合の増加列とする。 $f \in M_K$

に対し, $f_{(c,\omega_n)}$ を定理 4 で得られる K 函数とする。 $s(f) \subset \omega_n$ であ

る時 $(Nf)_n$ を Nf の ω_n への制限とする。この時

$$\begin{aligned} \|Nf + cf\|_{(c)}^2 &= \int ((Nf)_n + cf) \bar{f} d\xi \\ &= \frac{1}{c} \int ((Nf)_n + cf) ((Nf)_n + cf - ((Nf)_n + cf)'_{(c,\omega_n)}) d\xi \\ &= \frac{1}{c} \int |((Nf)_n + cf)|^2 (1 - (X_{\omega_n})'_{(c,\omega_n)}) d\xi + \frac{1}{2c} \iint ((Nf)_n(x) + cf(x) \\ &\quad - (Nf)_n(y) - cf(y))^2 dE'_{x,(c,\omega_n)}(y) d\xi(x). \end{aligned}$$

ただし $\|\cdot\|_{(c)}$ は函数空間 $H(N+cE)$ のノルムを表わす。故に任意

の Normal contraction T に対して,

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int |T((Nf)_n + cf)|^2 (1 - (X_{\omega_n})'_{(c,\omega_n)}) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \iint (T((Nf)_n + cf)(x) - T((Nf)_n + cf)(y))^2 dE'_{x,(c,\omega_n)}(y) d\xi(x) \right\} \\ &\leq c \|Nf + cf\|_{(c)}^2. \end{aligned}$$

以上により, 任意の $g \in M_K$ に対して

$$\left| \int T \cdot (Nf + cf) g \, d\xi \right| \leq \|Nf + cf\|_{cc} \cdot \|Ng + cg\|_{cc}$$

を得る. 線型汎函数

$$\{Ng + cg; g \in M_K\} \ni Ng + cg \rightarrow \int T \cdot (Nf + cf) g \, d\xi$$

は $H(N + c\varepsilon)$ 上へ拡張され, この線型汎函数のノルムは

$$\|Nf + cf\|_{cc} \text{ より小である. これから, } T \cdot (Nf + cf) \in H(N + c\varepsilon)$$

かつ $\|T \cdot (Nf + cf)\|_{cc} \leq \|Nf + cf\|_{cc}$ を得る. f は M_K 内で任意に動かすことが出来るから, 補題 4 によって, T が $H(N + c\varepsilon)$ へ作用することになる. 次に補題 5 より我々の結論に達する.

最後に (iv) $\Rightarrow$ (i) を示そう. 2つの函数 $f, g \in M_K$ に対して $s(f)$ 上弱んど至る所 $Nf \leq Ng$ と仮定しよう. $|Ng - Nf| \in H(N)$, $\|Nf - Ng\| \leq \|Nf - Ng\|$ かつ $|Ng - Nf| = Ng + Nf - 2\inf(Ng, Nf)$ に依り,

$$(Nf - \inf(Nf, Ng), Ng - \inf(Nf, Ng)) \leq 0$$

を得る. 即ち, $\inf(Nf, Ng) \in H(N)$ で,

$$(Nf - \inf(Nf, Ng), \inf(Nf, Ng)) \geq 0.$$

故に

$$\|Nf - \inf(Nf, Ng)\|^2 \leq 0.$$

即ち $Nf = \inf(Nf, Ng)$ を得て, X 上弱んど至る所 $Nf \leq Ng$ と成る. これは N が優越原理を満すことを意味する. 上記において, $\|\cdot\|, (\cdot, \cdot)$ は夫々 $H(N)$ のノルム, 内積を表わす. 以上

で我々の定理の証明を終る。

最後に、平行移動で不変な函数空間 H へ Module contraction が作用すれば、正核を持つことを注意して置く。この証明は殆んど明らかであろう。

4. 正則合成核と特異合成核

前節で見たとおりに対称かつ正型の合成核を考えることと、平行移動で不変な函数空間を考えることは同値である。我々の次の定義は合成核を、それから生成される函数空間で規制しようとするものである。

正則合成核: 対称かつ正型の合成核 N は $C_K \cap H(N)$ から $H(N)$ 内で稠密になる時、正則と呼ぶ。

特異合成核: 対称かつ正型の合成核 N は $C_0 \cap H(N) = \{0\}$ の時、特異と呼ぶ。

注意6. 正則合成核全体及び特異合成核全体は夫々凸錐を作る。

N_1, N_2 を正則合成核とする。任意の $u \in H(N_1 + N_2)$ に対して、定理5を用いて、ある $u_1 \in H(N_1), u_2 \in H(N_2)$ が存在して、 $u = u_1 + u_2$ と出来る。我々の仮定から $\{q_{i,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset C_K \cap H(N_i) \ (i=1,2)$ が存在して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|q_{i,n} - u_i\|_{(i)} = 0$ と出来る。ただし $\|\cdot\|_{(i)}$ は $H(N_i)$ のノルムを表わす。 $H(N_1 + N_2)$ のノルムを $\|\cdot\|_{1,2}$ で表わす時、定理5で示した如く、 $\|q_{i,n} - u_i\|_{(i)} \leq \|q_{i,n} - u_i\|_{1,2} \ (i=1,2)$ とは

る。これから関数列 $\{q_{1,n} + q_{2,n}\}$ が $u \in H(N_1 + N_2)$ 内で強収束することになる。即ち、 $N_1 + N_2$ も又正則になる。これから直ちに正則合成核全体は凸錐になることがわかる。同様の議論で特異核全体が凸錐になることを知る。

ここで夫々 H は共に漢位相でなければならぬことを注意する。

注意 7. N, N' を夫々正則合成核、特異合成核とする。この時、 $H(N + N') = H(N) \oplus H(N')$ 。

定理 5 により、 $H(N) \cap H(N') = \{0\}$ であることを示せば十分である。まず、任意の $u \in H(N)$, $\varphi \in C_K$ に対して、 $u * \varphi \in C_0 \cap H(N)$ である。なぜなら、任意の正数 δ に対し、ある $u_\delta \in C_K \cap H(N)$ が存在して、 $\|u - u_\delta\| < \delta$ となるように出来る。ただし $\|\cdot\|$ は $H(N)$ のノルムである。 $(\cdot, \cdot)$ で $H(N)$ の内積を表わす時、

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{x \rightarrow \infty}} |u * \varphi(x)| &= \overline{\lim_{x \rightarrow \infty}} |(T_x u, u\varphi)| \leq \overline{\lim_{x \rightarrow \infty}} \{ |(T_x u_\delta, u\varphi)| \\ &+ \|u_\varphi\| \|T_x(u - u_\delta)\| \} \leq \overline{\lim_{x \rightarrow \infty}} \{ |u_\delta * \varphi(x)| + \|u_\varphi\| \|u - u_\delta\| \} \\ &\leq \|u_\varphi\| \delta. \end{aligned}$$

δ は任意であるから、 $u * \varphi \in C_0 \cap H(N)$ である。次に任意の $u \in H(N) \cap H(N')$ と任意の $\varphi \in C_K$ に対して、 $u * \varphi \in H(N) \cap H(N')$ 。故に $u * \varphi = 0$, 即ち $u = 0$ を得る。 (証明終)

定理 8. N を優越原理を満す対称な合成核とする。この時正則合成核 N_0 , 特異合成核 N' が唯一通りに定まると、 $N = N_0 + N'$ となる。更に N_0 は優越原理を満す。

証明. N は正型であるから, $H(N)$ は意味を持つ. $H_0 \subseteq C_0 \cap H(N)$ の $H(N)$ 内での閉包とする. この時, H_0 は $H(N)$ の部分空間であり, 又 X 上の平行移動で不変な函数空間である. 任意の $u \in H_0$ に対して, ある函数列 $\{q_n\} \subset C_0 \cap H(N)$ が存在して, これから $u \in H(N)$ (同じく H_0) 内で強収束するように出来る. $\{q_n\} \in H(N) \cap C_0$ かつ $\|q_n\| \leq \|q_n\|$ である (定理 7 参照). 尤も $\|\cdot\|$ は $H(N)$ のノルムである. 故に $\{q_n\}$ は H_0 内で有界である. 他方 $\{q_n\}$ は殆んど至る所 X 上 u に収束すると仮定出来る. 従って $\{q_n\}$ は X 上殆んど至る所 u に収束する. 即ち $u \in H_0$ かつ $\{q_n\}$ は u に H_0 内で弱収束する. 故に

$$\|u\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|q_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|q_n\| = \|u\|.$$

これは Module contraction が H_0 に作用することを意味する. 定理 7 より, ある優越原理を満す対称な合成核 N_0 が存在して, $H_0 = H(N_0)$. 又 N_0 は明らかに正則である.

次に $C_0 \cap H(N) \subset H_0$ であることがわかる. 万世なら, 任意の $u \in H(N) \cap C_0$ に対して, $u - T_{\lambda_n} \cdot u \in C_0 \cap H(N)$ (定理 7 参照). 尤も T_{λ_n} は実数から閉区間 $[1/n, 1/n]$ への射影である. $\{T_{\lambda_n} \cdot u\}_{n=1}^{\infty}$ は明らかに $H(N)$ 内で有界であり, 又 X 上 ~~殆んど~~ 0 に一様収束する. 従って, この函数列は 0 に弱収束, ~~従って~~ 故に強収束する. 即ち $u \in H_0$ である.

$N' = N - N_0$ が正の Radon 測度であれば, 上のことから, N' は

特異合成核となる。 N' が正であることを示そう。 二つ方向は任意の $f \in M_E^+$ と $\varphi \in C_k^+$ に対して, $(Nf - N_0f) * \varphi \geq 0$ であることを示せば十分である。 $u_1 = (Nf - N_0f) * \varphi^+$, $u_2 = ((Nf - N_0f) * \varphi)^-$ とおく。 $H(N)$ に Module contraction が作用することから $(u_1, u_2) \leq 0$ 。 又 $(\cdot, \cdot)$ は $H(N)$ の内積を表わす。 $0 \leq u_1 \leq N_0 * f * \varphi \in C_0 \cap H(N)$ であるから $u_2 \in C_0 \cap H(N) \subset H_0$ である。 他方明らかに $(Nf - N_0f) * \varphi$ は H_0 の直交余空間に属す。 $((Nf - N_0f) * \varphi, u_2) = 0$ 。 従って $\|u_2\| \leq 0$ 。 即ち $u_2 = 0$ を得る。 よって $(Nf - N_0f) * \varphi \geq 0$ となる。 以上により $N = N_0 + N'$ の分解が成立する。

分解の唯一性はこの注意 7 により明らかである。(証明終)

我々は N_0 , N' を夫々 N の正則成分, 特異成分と呼ぶ。

次にしばらく正則合成核の優越原理を調べる。

注意 8. N を優越原理を満たす対称な合成核とする。 N が正則であることは $H(N) \cap L^2(\xi)$ が $H(N)$ 内で稠密であることは同値である。

N が正則であることは上の命題が成立することは明らかであるから、逆のみを示す。 上の定理の証明にある如く $C_0 \cap H(N)$ が $H(N)$ 内で稠密であれば十分。 $L^2(\xi) \cap H(N) \ni u$ と $\varphi \in C_k^+$ に対して, $u * \varphi \in C_0 \cap H(N)$ であるから, $C_0 \cap H(N)$ は $H(N)$ 内で稠密である。

定理 9. N を対称な合成核とする時、次の 2 条件は同値である。

(i) N は正則で優越原理を満足する。

(ii) ある次のレゾルベント等式を満す対称な合成核の族

$(N_\lambda)_{\lambda>0}$ が存在して、 $\lambda \rightarrow 0$ の時 N_λ は N に漠収束する。

任意の $\lambda > 0, \mu > 0$ に対して

$$N_\lambda - N_\mu = (\mu - \lambda) N_\lambda * N_\mu \quad (\text{レゾルベント等式})$$

証明. 先ず (i) $\Rightarrow$ (ii) を示そう。 λ を任意の正数とする。補題

7 により、任意の相対コンパクト閉集合 ω に対して、 $\bar{\omega}$ に $\bar{\omega}$ を持ち次の3条件を満す正の Radon 測度 $\varepsilon'_\lambda, \omega$ が唯一存在する。(a)

測度の意味で X 上 $(\lambda N + \varepsilon) * \varepsilon'_\lambda, \omega \leq N$. (b) ω 上 $(\lambda N + \varepsilon) * \varepsilon'_\lambda, \omega = N$

(c). $\bar{\omega}$ に台を持つ正の Radon 測度 ν が ω 上 $(\lambda N + \varepsilon) * \nu \leq N$ を満せば直ちに $(\lambda N + \varepsilon) * \varepsilon'_\lambda, \omega \leq (\lambda N + \varepsilon) * \nu$. $\lambda N * \varepsilon'_\lambda, \omega \leq N$ により $\lambda \int d\varepsilon'_\lambda, \omega \leq 1$

を得る。 $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ を $\bigcup_{n=1}^\infty \omega_n = X$ なる相対コンパクト閉集合の増加列とする。この時測度列 $(\varepsilon'_\lambda, \omega_n)$ は漠有界である。必要なら部分列を取るとして、 ε'_λ は漠収束すると仮定出来る。極

限を N_λ とする時、 X 上 $(\lambda N + \varepsilon) * N_\lambda = N$ かつ $\lambda \int dN_\lambda \leq 1$ と得る。

なぜなら、 $\lambda \int d\varepsilon'_\lambda, \omega_n \leq 1$ かつ $\forall \varphi \in C_K$ に対して $N * \varphi \in C_0$. 二のようにして得られる族 $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ がレゾルベント等

式を満すことは直ちに明らかであろう。又 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} N_\lambda = N$ も明らか。

次に (ii) $\Rightarrow$ (i) を示そう。これは次の補題が本質的である。

補題 8. σ を正の Radon 測度で原点に関して対称とする。 N

$= \sum_{n=0}^\infty (\sigma)^n$ が測度として意味を持つものとする。ただし $(\sigma)^0 = \varepsilon$

$(\sigma)^n$ は $\mathcal{N}$ の σ の合成を表わす。この時 $\mathcal{N}$ は優越原理を満す。

先ずこの補題の証明から始めよう。定理 3 と同様にして $\int d\sigma \leq 1$ を得る。もし $\int d\sigma < 1$ ならば、任意の $\varphi \in C_K$ に対して、 $N*\varphi \in L^2(\xi)$ 。

$$N*\varphi*\check{\varphi}(0) = (\varepsilon - \sigma) * (N*\varphi) * (\widetilde{N*\varphi})(0)$$

$$= (1 - \int d\sigma) \int |N*\varphi|^2 d\xi + \frac{1}{2} \iint (N*\varphi(x+y) - N*\varphi(x))^2 d\sigma(y) d\xi(x) \geq 0.$$

故に $\mathcal{N}$ は正型となる。故に $H(\mathcal{N})$ が意味を持つ。 $\|\cdot\|$ で $H(\mathcal{N})$ の

ノルムを表わそう。任意の Normal contraction T に対して、

$$\begin{aligned} & (1 - \int d\sigma) \int |T \cdot N*\varphi|^2 d\xi + \frac{1}{2} \iint (T \cdot N*\varphi(x+y) - T \cdot N*\varphi(x))^2 d\sigma(y) d\xi(x) \\ & \leq \|N*\varphi\|^2. \end{aligned}$$

任意の $\varphi \in C_K$ に対して、上の不等式から

$$\left| \int T \cdot (N*\varphi)(x) \varphi(x) d\xi(x) \right| \leq \|N*\varphi\| \cdot \|N*\varphi\|$$

を得る。線型汎関数

$$\{N*\varphi; \varphi \in C_K\} \ni N*\varphi \rightarrow \int T \cdot (N*\varphi)(x) \varphi(x) d\xi(x)$$

は $H(\mathcal{N})$ で拡張され、そのノルムは $\|N*\varphi\|$ より小さい。従って

この拡張で度々用いた議論を用いて、 $T \cdot (N*\varphi) \in H(\mathcal{N})$ かつ $\|T \cdot (N*\varphi)\| \leq \|N*\varphi\|$ を得る。補題 5 より、 T が $H(\mathcal{N})$ に作用することがわかる。 T は任意であるから、 $\mathcal{N}$ は優越原理を満す。

一般の場合、 $a < 1$ かつ $a \rightarrow 1$ の時 $N_a = \sum_{n=0}^{\infty} (a\sigma)^n$ は $\mathcal{N}$ に強収束する。上の議論から全ての Normal contraction が $H(N_a)$ に作用する。補題 6 より、全ての Normal contraction が $H(\mathcal{N})$ に作用する。

用する。即ち N は優越原理を満す。

よって (ii) $\Rightarrow$ (i) を証明しよう。 $\mu > \lambda$ なる任意の λ, μ に対し、レゾルベント算式より

$$(\varepsilon - (\mu - \lambda)N_\mu) * (\varepsilon + (\mu - \lambda)N_\lambda) = \varepsilon.$$

これから $\sum_{n=0}^{\infty} ((\mu - \lambda)N_\mu)^n$ が意味を持つことがわかる。従って

$$(\mu - \lambda) \int dN_\mu \leq 1. \quad \lambda \rightarrow 0 \text{ とし、} \mu \int dN_\mu \leq 1 \text{ を得る。} \quad \mu > \lambda > 0$$

に対して、 $\int dN_\lambda < +\infty$ 及び上の算式から

$$N_\lambda + \frac{1}{\mu - \lambda} \varepsilon = \frac{1}{\mu - \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} ((\mu - \lambda)N_\mu)^n$$

を得る。上の補題を用い、次に $\mu \rightarrow \infty$ とすることにより、 N_λ

が優越原理を満すことがわかる。次に補題 6 に依り N は優越

原理を満す。即ち $H(N)$ が意味を持つ。任意の $f \in M_K$ に対して

$$N_\lambda f = N(f - \lambda N_\lambda f) \text{ より、} N_\lambda f \in H(N) \text{ かつ } \lambda \rightarrow 0 \text{ の時、}$$

$(N_\lambda f)$ は Nf に $H(N)$ 内で強収束する。他方、 $\lambda > 0$ に対して、

$$\int dN_\lambda < +\infty. \text{ 故に、任意の } \varphi \in C_K \text{ に対して } N_\lambda * \varphi \in C_0. \text{ 従っ}$$

て、 $C_0 \cap H(N)$ は $H(N)$ 内で稠密である。即ち N は正則である。

上の $(N_\lambda)_{\lambda > 0}$ は唯一つである。これを N に関するレゾルベントと言う。

Dirichlet 核： 対称かつ正型の合成核 N は正則かつ N から

生成される函数空間 $H(N)$ に全ての Normal contraction が作用し、

$H(N) \cap C_K$ が C_K 内でも稠密になる時、 N は Dirichlet 核と呼ばれる。

又 $H(N)$ は特殊 Dirichlet 空間と言われる。

負型函数： 以下用いるものが X の共役群 X^* 上の負型函数

であるから $\hat{X}$ 上で定義を与えろ。 $\hat{X}$ 上の複素数値連続函数 ψ が負型であるとは次の条件を満す場合である。

$$(i) \quad \psi(0) \geq 0, \quad \psi(\bar{x}) = \overline{\psi(x)}.$$

(ii) 任意の正整数 n , 任意の n 個の点 $(\hat{x}_i)_{i=1}^n$, 任意の $\sum_{i=1}^n p_i = 0$ なる n 個の複素数 $(p_i)_{i=1}^n$ に対して

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi(\hat{x}_i - \hat{x}_j) p_i \bar{p}_j \leq 0.$$

殆んど明らかに負型函数が実数値であれば非負であることがわかる。我々の議論の対象は実数値の場合に限る。

補題 9. ψ を $\hat{X}$ 上の負型函数とする。この時任意の正整数 n に対して $e^{i\psi}$ は正型である。

証明. 先ず, 任意の正整数 n と $\hat{X}$ 内の任意の n 個の点 $(\hat{x}_i)_{i=1}^n$ に対して正方形行列

$$(\psi(\hat{x}_i) - \overline{\psi(\hat{x}_j)} - \psi(\hat{x}_i - \hat{x}_j))_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$$

は正型である。これは $\hat{x}_{n+1} = \hat{0}$, 又任意の n 個の複素数 $(p_i)_{i=1}^n$ に対して, $-\sum_{i=1}^n p_i = p_{n+1}$ とし, $(\hat{x}_i)_{i=1}^{n+1}$ 及び $(p_i)_{i=1}^{n+1}$ に対して (ii) を計算することから得られる。正型行列 A, B に対して $A \cdot B$ も又正型になることを用いれば $e^{i\psi}$ が正型とあることは見易い。

定理 10. 合成核 N が Dirichlet 核である為の必要かつ十分な条件は逆数が $\hat{X}$ 上局所可積分である実数値負型函数 ψ が存在して, N の Fourier 変換 $\hat{N}$ が $\frac{1}{\psi}$ とあることである。

証明. 先ず $N \in \text{Dirichlet 核}$ とする. $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ は N に属するレゾルベントとする時, $\hat{X}$ 上至る所 $\hat{N}_\lambda(x) > 0$ であることがわかる. レゾルベント方程式に依り, 任意の $\lambda > 0, \mu > 0$ に対して $\{\hat{x} \in \hat{X}; \hat{N}_\lambda(\hat{x}) = 0\} = \{\hat{x} \in \hat{X}; \hat{N}_\mu(\hat{x}) = 0\}$ であり, 又任意の $\varphi \in C_K^+$ に対して $\lambda \rightarrow \infty$ の時 $\lambda N * N_\lambda * \varphi$ は $N * \varphi$ へ各コンパクト集合上で一様収束する. $C_K \cap H(N)$ は C_K 内で稠密であるから, $\lambda \rightarrow \infty$ の時 (λN_λ) は ε に漠収束する. 更に $\int dN_\lambda \leq 1$ であることに注意すれば, $\lambda \rightarrow \infty$ の時 $\lambda \hat{N}_\lambda$ は 1 へ収束することになる. ことから, $\hat{X}$ 上至る所 $\hat{N}_\lambda(x) > 0$ であることがわかる. 再びレゾルベント方程式に着目する時, 任意の $\lambda > 0$ に対して $\frac{1}{\lambda N + \varepsilon}$ は意味を持ち $(1 - \lambda \hat{N}_\lambda)$ に等しい. これから直ちに $\frac{1}{N}$ が意味を持ち, $\frac{1 - \lambda \hat{N}_\lambda}{\lambda \hat{N}_\lambda} = 1$. 即ち $\frac{1}{N}$ は実数値連続関数である. 他方 $\frac{1}{N + \frac{1}{\lambda}} = \lambda(1 - \lambda \hat{N}_\lambda)$ は $\hat{X}$ 上の実数値負型関数であり, 更に $\lambda \rightarrow \infty$ の時, ことは $\frac{1}{N}$ へ各コンパクト集合上で一様収束するから, $\psi = \frac{1}{N}$ は負型関数である. 次一般化された Fourier 変換の意味で $\hat{N} = \frac{1}{\psi}$ であるから $\frac{1}{\psi}$ は局所可積分である.

逆を証明しよう. 任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\frac{1}{\psi + \lambda} = \int_0^\infty e^{-\psi t} e^{-\lambda t} dt$$

が成立するから, 補題 9 を用いて $\frac{1}{\psi + \lambda}$ は正型である. 従ってある正の Radon 測度 N_λ が存在して, $\hat{N}_\lambda = \frac{1}{\psi + \lambda}$ を満たす. $\psi(0) \geq 0$

により $\lambda \int dN_\lambda \leq 1$. 任意の正数 λ, μ に対して

$$\frac{1}{\psi + \lambda} - \frac{1}{\psi + \mu} = \frac{\mu - \lambda}{(\psi + \lambda)(\psi + \mu)}$$

により, 族 $(N_\lambda)_{\lambda > 0}$ は $\mathcal{L}$ -ゾルベントになる. 尚も $\lambda \rightarrow 0$ の時 N_λ が N に漠収束することは明らかであらう. 故に定理 9 より N は正則かつ優越原理を満足する. 任意の $x \in X$ に対して $N \neq N * \varepsilon_x$ は殆んど明らかである. 従って次の 2 つの補題が成立すれば我々の定理の証明は終る.

補題 10. μ を X 上の真 Radon 測度とし, 任意の $\varphi \in C_K$ に対して $\mu * \varphi$ は有界とする. 次に σ を全測度 1 なる X 上の正の Radon 測度とし, $\mu = \mu * \sigma$ であるとする. この時 $p(\mu) \supset s(\sigma)$ である.

補題 10 の証. 任意の $\varphi \in C_K$ に対して $\mu * \varphi$ の連続全体が $s(\sigma)$ を含むことを言えば十分である. 明らかに $\mu * \varphi$ は X 上 ~~連続~~ 一様連続である. x_0 を $s(\sigma)$ の任意の点とし, $a_{x_0} = \sup_{x \in X} (\mu * \varphi(x) - \mu * \varphi * \varepsilon_{x_0}(x))$ とおく. この時ある実数列 $\{x_n\} \subset X$ で $\mu * \varphi(x_n) - \mu * \varphi * \varepsilon_{x_0}(x_n)$ が増加して a_{x_0} に収束するものが取れる. $f_n(x) = \mu * \varphi(x_n - x) - \mu * \varphi * \varepsilon_{x_0}(x_n - x)$ とおくと, $f_n = f_n * \sigma$ かつ $\{f_n\}$ は正規族である. $\{f_n\}$ 内で広義一様する部分列を取り, その極限を f とすれば, $f(0) = a_{x_0}$ かつ $f = f * \sigma$ を満たす. $f \leq a_{x_0}$ であるから, $f(x) = a_{x_0}$ が任意の $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} s((\sigma)^n)$ について成立する. $a_{x_0} \neq 0$ とする. この時 $a_{x_0} > 0$ として一般性を失わない. 任意の n に対して, ある正整数 $k(n)$ が定まり, 任意の $k \geq k(n)$ に対して

12.

$$\mu * \varphi(x_k - nx_0) - \mu * \varphi(x_k - (n+1)x_0) \geq \frac{1}{2} a_{x_0}$$

と仮定する。ただし $\mu * \varphi * \varepsilon_{x_0}(x_k - nx_0) = \mu * \varphi(x_k - (n+1)x_0)$ である。

と仮定する。従って、注意の n に対して、 $k \geq \max(k(1), \dots, k(n))$

とすれば、

$$\mu * \varphi(x_k) - \mu * \varphi(x_k - nx_0) \geq \frac{1}{2} n a_{x_0}$$

を得る。これは $\mu * \varphi$ が有界であることに反する。故に $a_{x_0} = 0$ 。

同様にして $\lim_{x \in X} (\mu * \varphi(x) - \mu * \varphi * \varepsilon_{x_0}(x)) = 0$ と得る。 (証明終)

補題 11. N を正則かつ優越原理を満足する ~~核~~ 核とする。

この時、次の 2 命題は同値である。

(i) N は Dirichlet 核である。

(ii) $p(N) = \{0\}$ である。

補題 11 の証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) は殆んど明らかであるから (ii) $\Rightarrow$ (i) を示す。

N は 0 でない。 V を原素に關して対称な原素のコンパクト

近傍とする。又 $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ を原素に關して対称な相対コンパクト

閉集合の増加列で $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n = X$ かつ $\omega_1 \cap V$ を満すものとする。

N の掃散原理から $\overline{\omega_n \cap CV}$ に μ を持つ原素に關して対称な正の

Radon 測度 ε'_n が存在して、次の 3 条件を満足する。(a) X 上 N

$\geq N * \varepsilon'_n$ (b) $\omega_n \cap CV$ 上 $N = N * \varepsilon'_n$. (c) $\int d\varepsilon'_n \leq 1$. 条件 (c) より

$(\varepsilon'_n)_{n=1}^{\infty}$ の部分列である正の Radon 測度 ε'_ν に弱収束するものがある。

。 $\int d\varepsilon'_n \leq 1$ かつ任意の $\varphi \in C_k$ に対して $N * \varphi \in C_0$ より、 X

上 $N \geq N * E_V$ かつ C_V 上 $N = N * E_V$ を満たす。先ず $\int dE_V < 1$ ならば $N \neq N * E_V$ であることがわかる。又 $\int dE_V = 1$ の時も、上の補題及び $p(N) = \{0\}$ より $N * E_V \neq N$ が知られる。又任意の $\varphi \in C_k$ に対して、 $N * (E - E_V) * \varphi$ は $H(N)$ に属す。これから $C_k \cap H(N)$ が C_k 内で稠密であることがわかる。(証明終)

上の補題から次の概念が導入されるのは自然である。

凝 Dirichlet 核：対称な合成核 N が凝 Dirichlet 核であるとはある X のコンパクト部分群 X_N とある X/X_N 上の Dirichlet 核 $\tilde{N}$ が存在して、 N は $\tilde{N}$ の X への自然な延長である。

補題 11 と同様に次の定理を得る。

定理 11. $N \stackrel{(*)}{\downarrow}$ を対称な合成核とする。この時次の命題は同値である。

(i) N は正則で優越原理を満足する。

(ii) N は凝 Dirichlet 核である。

証明. 先ず (i) $\Rightarrow$ (ii) を示そう。 $p(N) = X_N$ とおく時、 X_N は明らかに X の閉部分群であり、又任意の $\varphi \in C_k$ に対して、 $N * \varphi \in C_0$ であることから、 X_N はコンパクトである。明らかに X/X_N 上に対称な合成核 $\tilde{N}$ が存在して、 N が $\tilde{N}$ の X への自然な延長となるように出来る。全ての Normal contraction が $H(N)$ に作用することより、同じことが $H(N)$ についても成立する。 $p(\tilde{N}) = \{0\}$ より $\tilde{N}$ は X/X_N 上の Dirichlet 核である。

次に (ii) $\Rightarrow$ (i) を示そう。仮定によりあるコンパクト部分群 X_N と X_{X_N} 上の Dirichlet 核 $\tilde{N}$ が存在して、 N が $\tilde{N}$ の X への自然な延長と取るように取れる。 $\tilde{N}$ に関するレゾルベント $(\tilde{N}_\lambda)_{\lambda>0}$ が存在する。次に $(\tilde{N}_\lambda)_{\lambda>0}$ の各元を X へ自然に延長して、 N に関するレゾルベントの存在を知る。(証明終)

注意 9. X のコンパクト部分群が 1 のみ以外ない場合、Dirichlet 核と凝 Dirichlet 核とは一致する。

補題 12. 凝 Dirichlet 核 N の値は X の閉部分群である。

証明. 定理 9 及び定理 11 より、 N に関するレゾルベント $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ が存在する。度々用いた議論から、任意の $\lambda > 0$ に対して

$$N + \frac{1}{\lambda} \varepsilon = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda N_\lambda)^n$$

である。故に $S(N + \frac{1}{\lambda} \varepsilon)$ は X の閉部分群である。他方 N は正型かつ $N \neq 0$ に依り、 $S(N) \ni 0$ 。故に $S(N)$ は X の閉部分群である。

上の議論で、任意の λ に対して、レゾルベント算式から $S(N) = S(N_\lambda)$ を得る。

定理 12. N を対称な合成核とす。この時次の 2 命題は同値である。

- (i) N は優越原理を満足する。
- (ii) $N = N_0 + N'$ 。ただし N_0 は凝 Dirichlet 核、 N' は優越原理を満足する特異合成核で $p(N') \subset S(N_0)$ 。

先ず次の補題から証明する。

補題 13. N を優越原理を満す対称な合成核とし, N_0, N' を夫々 N の正則成分, 拮異成分とする. この時, 任意の正数 ε に対し, $N + \varepsilon E$ の正則成分, 拮異成分は夫々 $N_0 + \varepsilon E, N'$ である.

$N_0 + \varepsilon E$ が正則であるから, この証明は明らか.

始めに簡単であるかう (ii) $\Rightarrow$ (i) を示そう. $(N_\lambda)_{\lambda > 0}$ を N_0 に関連するゾルベントとする. (ii) の仮定のもとに, 任意の $\lambda > 0$ に対し $\text{Module contraction}$ が $H(N_\lambda + N')$ に作用することを見せば十分である (補題 6 参照). 補題 1 及び上の補題から, $N_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma)^n$ の場合を見せば十分である. 尤も, σ は原典に關して対称な正の Radon 測度で, $\int d\sigma < 1$ を満す. $\|\cdot\|, \|\cdot\|_{(0)}, \|\cdot\|_{(1)}$ を夫々 $H(N), H(N_0), H(N')$ のノルムを表わすとする. 補題 5 により, 任意の $\varphi \in C_K$ に対し, $|N * \varphi| \in H(N)$ かつ $\| |N * \varphi| \| \leq \| N * \varphi \|$ を見せば十分である. $u = |N * \varphi| - |N' * \varphi|$ とおく時, $|u| \leq |N_0 * \varphi| \in C_0 \cap L^2(\xi)$ で, 任意の x, y に対し

$$|u(x) - u(y)| \leq |N_0 * \varphi(x) - N_0 * \varphi(y)| + 2 |N' * \varphi(x) - N' * \varphi(y)|.$$

更に

$$\begin{aligned} (\varepsilon - \sigma) * u * \check{u}(0) &= (1 - \int d\sigma) \int |u|^2 d\xi + \frac{1}{2} \iint |u(x+y) - u(y)|^2 d\sigma(y) d\xi(x) \\ &\leq (1 - \int d\sigma) \int |u|^2 d\xi + \frac{1}{2} \iint (|N_0 * \varphi(x+y) - N_0 * \varphi(x)| + 2 |N' * \varphi(x+y) - N' * \varphi(x)|)^2 d\sigma(y) d\xi(x), \\ \text{?} = \text{?} \quad \int |N' * \varphi(x+y) - N' * \varphi(x)| d\sigma(y) &= 0 \text{ であるから,} \end{aligned}$$

$$(\varepsilon - \sigma) * u * \check{u}(0) \leq (1 - \int d\sigma) \int |N_0 * \varphi|^2 d\xi + \frac{1}{2} \iint |N_0 * \varphi(x+y) - N_0 * \varphi(x)|^2 d\sigma(y) d\xi(x)$$

を得る。 $(\varepsilon - \sigma) * N_0 = \varepsilon$ に注意し、更に線型汎函数

$$\{N_0 * \psi; \psi \in \mathcal{C}_K\} \ni N_0 * \psi \rightarrow \int u \psi d\varepsilon$$

を考へ、今迄度々用ひた議論と同様にして、 $u \in H(N_0)$ かつ $\|u\|_{(0)}$

$\leq \|N_0 * \varphi\|_{(0)}$ を得る。一方 N' の優越原理から $|N' * \varphi| \in H(N')$ かつ

$\| |N' * \varphi| \|_{(1)} \leq \|N' * \varphi\|_{(1)}$ 。従つて $|N * \varphi| = (|N * \varphi| - |N' * \varphi|) + |N' * \varphi|$

は $H(N)$ に属し、かつ

$$\| |N * \varphi| \| \leq \| (|N * \varphi| - |N' * \varphi|) \| + \| |N' * \varphi| \|$$

$$= \| (|N * \varphi| - |N' * \varphi|) \|_{(0)} + \| |N' * \varphi| \|_{(1)} \leq \|N_0 * \varphi\|_{(0)} + \|N' * \varphi\|_{(1)}$$

$$= \|N * \varphi\|.$$

従つて (ii) $\Rightarrow$ (i) の証明を終る。

次に (i) $\Rightarrow$ (ii) を証明しよう。定理 9 より $N = N_0 + N'$ に一意に分解される。ここで N_0 は凝 Dirichlet 核 $\overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ あり、 N' は特異合成核である。最初に $p(N') \supset s(N_0)$ を示そう。勿論 $N_0 \neq 0$ として十分である。

$(\omega_n)_{n=1}^\infty$ を $\bigcup_{n=1}^\infty \omega_n = X$ なる厚集に属して対称な

相対コンパクト開集合の増加列とする。任意の $\lambda > 0$ に対して、 $\overline{\omega_n}$ は台を持ち、全測度 $\leq \frac{1}{\lambda}$ なる厚集に属して対称な正の Radon 測度 $\varepsilon'_{\lambda,n}$ が唯一に存在して、次の 3 条件を満たす。(a)

X 上 $(\lambda N + \varepsilon) * \varepsilon'_{\lambda,n} \leq N$ 。(b) ω_n 上 $(\lambda N + \varepsilon) * \varepsilon'_{\lambda,n} = N$ 。(c) ~~$\varepsilon'_{\lambda,n} \leq N$~~

$\overline{\omega_n}$ は台を持ち、正の Radon 測度 ν に對して、 ω_n 上 $(\lambda N + \varepsilon) * \nu \geq N$

ならば直ちに X 上 $(\lambda N + \varepsilon) * \nu \geq (\lambda N + \varepsilon) * \varepsilon'_{\lambda,n}$ 。任意の φ に對して

$(\lambda N + \varepsilon) * \varepsilon'_{\lambda,n} * \varphi$ は $n \rightarrow \infty$ の時 $N * \varphi \in H(\lambda N + \varepsilon)$ 内で強収束

する。上の補題を用いて $(\lambda N_0 + \varepsilon) * \varepsilon'_{\lambda, n} * \varphi$, $\lambda N' * \varepsilon'_{\lambda, n} * \varphi$ は夫々 $n \rightarrow \infty$ の時 $N_0 * \varphi$, $N' * \varphi \in H(\lambda N + \varepsilon)$ 内で強収束する。これから直ちに測度列 $(\varepsilon'_{\lambda, n})_{n=1}^{\infty}$ は N_{λ} に弱収束することになる。 $T \in \mathcal{L}(H)$ $(N_{\lambda})_{\lambda > 0}$ は N_0 に關する L^{∞} ルベニトである。 $N_0 \neq 0$ により $N_{\lambda} \neq 0$, N' が Σ -型であるのより、任意の $\varphi \in C_K^+$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} N' * (\varepsilon - \lambda \varepsilon'_{\lambda, n}) * \varphi * \check{\varphi}(0) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} N' * ((\lambda \int d\varepsilon'_{\lambda, n}) \varepsilon - \lambda \varepsilon'_{\lambda, n}) * \varphi * \check{\varphi}(0) \\ &\geq N' * ((\lambda \int dN_{\lambda}) \varepsilon - \lambda N_{\lambda}) * \varphi * \check{\varphi}(0) \geq 0. \end{aligned}$$

従って、任意の $\psi \in C_K^+$ に対して

$$N' * ((\lambda \int dN_{\lambda}) \varepsilon - \lambda N_{\lambda}) * \varphi * \psi(0) = 0$$

即ち $N' * ((\lambda \int dN_{\lambda}) \varepsilon - \lambda N_{\lambda}) * \varphi = 0$. $N_{\lambda} \neq 0$ 及び補題 10 により

$p(N' * \varphi) \supset s(N_{\lambda})$. φ の任意性より $p(N') \supset s(N_{\lambda}) = s(N_0)$.

次に N' が優越原理を満足することを示そう。この為には次の 2 つの場合に分けて議論する。

[1]. $s(N_0)$ がコンパクトな場合.

この時 $u \in H(N)$ が $H(N')$ に属するための必要かつ十分条件は $p(u) \supset s(N_0)$ であることとなる。 C_K の元との合成を考えると u は連続かつ有界となる。 $u \in H(N')$ ならば、任意の $\varphi \in C_K$ に対して、 $p(N * \varphi) \supset s(N_0)$ により $p(u) \supset s(N_0)$ である。逆に $p(u) \supset s(N_0)$ ならば、ある $u_1 \in H(N_0)$, $u_2 \in H(N')$ が存在して、 $u = u_1 + u_2$ と表れる。任意の $\varphi \in C_K$ に対して、 $p(u * \varphi) \supset s(N_0)$, $p(u_2 * \varphi) \supset s(N_0)$ 且つ $\lim_{x \rightarrow \infty} u_1 * \varphi(x) = 0$. 従って

$u_1 = 0$. 即ち $u \in H(N')$. 以上に依り, 任意の $u \in H(N')$ に対し
 $|u| \in H(N')$ を知る. $\| |u| \|_{(1)} = \|u\| \leq \|u\| = \|u\|_{(1)}$ を得るから,
 $H(N')$ へ Module contraction が作用する. 即ち N' は優越原理を
 満足する.

[2] $S(N_0)$ が Σ - パクトの場合.

一般に成り立つ次の補題から示す.

補題 14. N を優越原理を満す対称 r_i 合成核とする. この時
 任意の正数 c に対し $N + c\xi$ は完全最大値原理を満足する.

補題 14. の証明. N に対しする優越原理, 完全最大値は同値である
 を先に注意する. 補題 1 により $N - c\xi$ が正かつ正型
 の場合を示せば十分である. $c \geq 1$ c は正数. 分散に関する定
 理と同様に ω に対し Σ - パクト開集合 ω に対し ω
 ω に台を持つ $g_\omega \in M_K^+$ で次の 2 条件を満すものが唯一つ存在
 する. (a) X 上殆んど至る所 $Ng_\omega \leq 1$. (b) ω 上殆んど至る所
 $Ng_\omega = 1$. さて, $\varphi, \psi \in C_K^+$ に対し $S(\varphi)$ 上 $N*\varphi \leq N*\psi$ とする.
 $\omega = \{x \in X; \varphi(x) > 0\}$ に対し g_ω を作る. この時.

$$\begin{aligned} \int \varphi d\xi &= \int Ng_\omega \varphi d\xi = \int N*\varphi g_\omega d\xi \leq \int N*\psi g_\omega d\xi \\ &= \int Ng_\omega \psi d\xi \leq \int \psi d\xi. \end{aligned}$$

さて, 次に $N + c\xi$ が完全最大値原理を満すことを示そう.

$\varphi, \psi \in C_K^+$ に対し $(N + c\xi)*\varphi \leq (N + c\xi)*\psi + 1$ が $S(\varphi)$ 上成
 立 1 ξ とする. $(N + c\xi)*\varphi = N*\varphi + c \int \varphi d\xi$ であるから, c

$\int \psi d\xi + 1 \geq \int \varphi d\xi$ ならば, N の完全最大値の原理から,
 $(N + c\xi) * \varphi \leq (N + c\xi) * \psi + 1$ が全空間で成立する。従って, $\int \varphi d\xi$
 $> \int \psi d\xi + 1$ の時, 仮定の不平等式より $N * \varphi < N * \psi$ が $S(\varphi)$
 上成立する。これより $\int \varphi d\xi \leq \int \psi d\xi$ を得る。矛盾を導く。
 又 $N + c\xi$ の特異成分は明らかに $N' + c\xi$ である。(証明終)

補題 15. N を優越原理を満たす対称正合成核とする。その正
 則成分 N_0 の台がコンパクトであるとは定する。この時次の命
 題が成立する。

$\varphi, \psi \in C_k^+$ に対して, $N * \varphi \leq N' * \psi$ が $S(\varphi)$ 上成立すれば, 同不
 等式が X 上成立する。ここで N' は N の特異成分である。

補題 15 の証. ある $\varphi, \psi (\neq 0) \in C_k^+$ が存在して, 次の性質を
 持つてゐるとしよう。 $N * \varphi \leq N' * \psi$ が $S(\varphi)$ 上成立し, $N' * \psi$
 $- N * \varphi$ が負の値を取る実数がある。上の補題から $N' * \psi$ は至
 所 > 0 と仮定出来る。上の性質からある正数 $a > 1$ と X 内の
 ある実数 x_0 が存在して

$$N' * \psi(x_0) - a N * \varphi(x_0) = \min_{x \in X} (N' * \psi(x) - a N * \varphi(x)) < 0$$

と出来る。仮定から, $S(N_0 * \varphi)$ はコンパクトであり, 又 N の優
 越原理から, $N * \varphi \leq N * \psi < a N * \psi$ が全空間で成立するから,

$$\omega = \{x \in X; a N' * \psi(x) > N * \varphi(x)\}$$

とおき, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n = \omega$ なる相対コンパクト閉集合列 $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ を取る。

$\varepsilon'_{0,n}$ を (N に因する) ε_{x_0} の ω_n への掃散分布とする。この時

$$\int (N' * \psi - aN * \varphi) d(\varepsilon_{x_0} - \varepsilon'_{0,n}) \leq N' * \psi(x_0) - aN * \varphi(x_0) < 0.$$

一方, (ω) が $\omega = \omega'$ であるから, 上で述べた議論と同様

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (N' * \psi - N' * \varphi) d(\varepsilon_{x_0} - \varepsilon'_{0,n}) = 0.$$

又 $\omega \supset s(\varphi)$ により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int N_0 * \varphi d(\varepsilon_{x_0} - \varepsilon'_{0,n}) = 0.$$

これから矛盾が導かれ, 我々の結論を得る. (証明終)

さて, 我々の定理にもどそう. 多論 N_0 が Dirichlet 核, $N' \neq 0$ の場合を示せば十分である. N' の優越原理は次の命題を示せば十分である.

$f, g, \varphi \in \mathcal{C}_k^+$ に対して, $s(f * \varphi) \supset N' * (f * \varphi) < N' * (g * \varphi)$ ならば, X 上至る所 $N' * (f * \varphi) \leq N' * (g * \varphi)$ である.

まず, 任意の原点の相対コンパクト近傍 V に対して,

$$N' * \varphi * \check{\varphi}(0) = \sup_{x \in V} N' * \varphi * \check{\varphi}(x)$$

である. 同様に, $N' * \varphi * \check{\varphi}(0) > \sup_{x \in V} N' * \varphi * \check{\varphi}(x)$ とする原点の相対コンパクト近傍 V が存在し得る. T を実数から,

閉区間 $[0, \sup_{x \in V} N' * \varphi * \check{\varphi}(x)]$ への射影とする時, $(V$ 上 $N' * \varphi * \check{\varphi}$
 $= T \cdot (N' * \varphi * \check{\varphi})$ を得る. 且つ $N' * \varphi * \check{\varphi} - T \cdot (N' * \varphi * \check{\varphi}) \in H(N_0)$.

$$\begin{aligned} \|T \cdot (N' * \varphi * \check{\varphi})\|^2 &= \|N' * \varphi * \check{\varphi} - (N' * \varphi * \check{\varphi} - T \cdot (N' * \varphi * \check{\varphi}))\|^2 \\ &= \|N' * \varphi * \check{\varphi}\|^2 + \|N' * \varphi * \check{\varphi} - T \cdot (N' * \varphi * \check{\varphi})\|^2 < \|N' * \varphi * \check{\varphi}\|^2 \end{aligned}$$

となり, N が優越原理を満たすことになる.

$$\text{次に } \inf_{x \in s(f * \varphi)} (N' * (g * \varphi)(x) - N' * (f * \varphi)(x)) = 0, \quad \max((N' * f * \check{f}(0))^{\frac{1}{2}},$$

$(N' * g * \check{g}(0))^{\frac{1}{2}} = 0$ とおく。又 $N' * \varphi * \check{\varphi}(0) = 1$ と仮定出来る。

正整数 n を $\frac{1}{n} \max_{x \in X} N_0 * (f * \varphi)(x) < a$ と出来るように取り、次に

正数 η を $6\theta n \eta < a - \frac{1}{n} (\max_{x \in X} N_0 * (f * \varphi)(x))$ と出来るように取る。

上で得た結果及び $s(N_0 * (f * \varphi))$ がユニバースタルであることに注意して、

$x_0 \in X$ を $N' * \varphi * \check{\varphi}(0) - N' * \varphi * \check{\varphi}(x_0) < \eta^2$ かつ $s(N_0 * (f * \varphi))$

の $s(\tau_{x_0} N_0 * (f * \varphi)) = \phi$ と出来るように取る。この時、任意の正

整数 m に対して、 N' の正型を用い、

$$|N' * \varphi * \check{\varphi}(mx_0) - N' * \varphi * \check{\varphi}((m-1)x_0)|$$

$$\leq \sqrt{2} (N' * \varphi * \check{\varphi}(0))^{\frac{1}{2}} (N' * \varphi * \check{\varphi}(0) - N' * \varphi * \check{\varphi}(x_0))^{\frac{1}{2}} < 2\eta$$

を得る。同様にして、任意の $x \in X$ に対して、

$$|N' * (f * \varphi)(mx_0 + x) - N' * (f * \varphi)(x)|^2$$

$$\leq (N' * f * \check{f}(0)) (N' * \varphi * \check{\varphi}(0) - N' * \varphi * \check{\varphi}(mx_0)) < 4m\theta^2 \eta^2 < (2m\theta\eta)^2$$

同様の方法で、任意の $x \in X$ に対して

$$|N' * (g * \varphi)(mx_0 + x) - N' * (g * \varphi)(x)| < 2m\theta\eta$$

を得る。任意の $x \in \bigcup_{m=0}^{\infty} s(\tau_{mx_0} (f * \varphi))$ に対して、 $x = mx_0 + y$

と可なり。ここで $0 \leq m \leq n-1$, $y \in s(f * \varphi)$ 。故に

$$N' * (g * \varphi)(x) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} N_0 * (\tau_{kx_0} (f * \varphi))(x) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} N' * (\tau_{kx_0} (f * \varphi))(x)$$

$$\geq N' * (g * \varphi)(x) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} N' * (f * \varphi)(x + kx_0) - \frac{1}{n} \max_{z \in X} N_0 * (f * \varphi)(z)$$

$$\geq N' * (g * \varphi)(y) - N' * (f * \varphi)(y) - 2\theta m \eta - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2\theta(m+k)\eta - \frac{1}{n} \max_{z \in X} N_0 * (f * \varphi)(z)$$

$$\geq N' * (g * \varphi)(y) - N' * (f * \varphi)(y) - 6\theta n \eta - \frac{1}{n} \max_{z \in X} N_0 * (f * \varphi)(z)$$

$$\geq N' * (g * \varphi)(y) - N' * (f * \varphi)(y) - a \geq 0.$$

上の補題を用いて, X 上至る所

$$\begin{aligned} N' * (f * \varphi)(x) &\geq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} N' * (\tau_k \chi_0(f * \varphi))(x) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} N' * (\tau_k \chi_0(f * \varphi))(x) \\ &\geq N' * (f * \varphi)(x) - \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \delta \eta = N' * (f * \varphi)(x) - 2(n-1)\delta \eta. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ で $\eta \downarrow 0$ とし, $N' * (f * \varphi) \geq N' * (f * \varphi)$ が X 上成立する.

(証明終)

系. N_0, N' を夫々正則合成核, 特異合成核とする. $S(N_0) = X$ かつ $N_0 + N'$ が優越原理を満せば, N' は常に定数である.

証明は殆んど明らか.

又 $S(N_0) \neq X$ の時 定数でない特異合成核 N' で, $N_0 + N'$ が優越原理を満すものが存在する. 結論的に, 次の問題が解ければ, 対称正合成核の優越原理は Dirichlet 核で全て整理出来る.

問題. 優越原理を満し, 週期を持たない特異合成核が存在するか? 又存在する時, Dirichlet 核から特徴付けられるか?

次の問題と 1 とは Dirichlet 核を全て決定する問題になる.

例えば X が n 次元ユークリッド空間の時, 負型函数 α Levy-Khinchine 分解から, Dirichlet 核 N は次のように特徴付けられる.

任意の $\varphi \in C_K$ に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} N * \varphi(x) = 0$ とする $0 \neq N$ の合成核で, ある非負定数 c , 実定数係数の 2 階階円型, 自己共役の微分作用素 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $\int_{|x|>0} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^2} d\mu(x) < +\infty$ なる μ なる $R^n - \{0\}$ 上の正の Radon 測度 σ が存在して,

$$(c\varepsilon - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} - pf.(\sigma)) * N = \varepsilon$$

を満す。ただし $Pf. (10)$ は σ の有限積分部分である。

又 Σ はコンパクトアーベリ群上の Dirichlet 核に σ による特徴付けが得られている (C. Berg)。

5. Haar 測度に関する絶対連続な Dirichlet 核.

前節で対称な合成核に対する優越原理, 掃散の研究には, はる Dirichlet 核で十分であろうとの結論に達した。この何年間の間に主に日本のポテンシャルリストの研究の傾向として, 核を下半連続又は広義連続として, 連続性の原理を基礎におくのが通常であるように思われる。この妥当性の一つの根拠を示そう。

定理 13. N を X 上の Dirichlet 核とし, σ に関する絶対連続と仮定する。この時, N の σ に関する密度函数 G を次のように送べる。 G は X 上の下半連続函数で, G を函数合成核とし, 通常連続性の原理を満足する。

函数合成核 G が通常連続性の原理を満すとは, 台がコンパクトである Σ の Radon 測度 μ に対して, $G_\mu(x) = \int G(x-y)d\mu(y)$ の $s(\mu)$ への制限が, その函数として連続なら, G_μ は X 上連続となる場合である。

定理 13 の証明に用いる次の補題から示そう。

補題 16. N を X 上の Dirichlet 核とし, σ に関する絶対連続とする。その一つの密度函数を G としよう。この時, 任意の

正数 a に対し, $\inf(G, a) \in H(N)$ かつ任意の $u \geq 0 \in H(N)$ に対し
 $(\inf(G, a), u) \geq 0$, $\|\inf(G, a)\|^2 \leq a$. 又 $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ は
 $H(N)$ の内積, ノルムを表わす.

補題 16 の証. 任意の $f \in M_K^+$ に対し, $\inf(G * f, a) \in H(N)$ 且
 全ての $\text{Normal contraction}$ が $H(N)$ に作用する ことより得られる.
 度々用いた議論から, 任意の正数 c と任意の相対コンパクト
 閉集合 ω に対し, 次の (i), (ii) を満たす $g_\omega \in M_K^+$ だけ存在す
 る. (i) X 上強収束する所 $Ng_\omega + cg_\omega \leq \inf(Nf, a)$. (ii) ω 上強
 収束する所 $Ng_\omega + cg_\omega = \inf(Nf, a)$. $\omega \uparrow X$ の時, $Ng_\omega + cg_\omega$
 は $\inf(Nf, a) \in H(N+ce)$ 内で強収束する. 従って, $u \geq 0$
 $\in H(N) \subset H(N+ce)$ に対し,

$$\begin{aligned} (\inf(Nf, a), u)_{ce} &= \lim_{\omega \uparrow X} (Ng_\omega + cg_\omega, u)_{ce} \\ &= \lim_{\omega \uparrow X} \int u g_\omega d\mathcal{E} \geq 0. \end{aligned}$$

更に c は任意であるから, $(\inf(Nf, a), u) \geq 0$ を得る. 従っ
 て, $(\inf(Nf, a), Nf) \geq \|\inf(Nf, a)\|^2$. 即ち $\|\inf(Nf, a)\|^2$
 $\leq a \int f d\mathcal{E}$ を得る. $\Rightarrow$ $\int f_n d\mathcal{E} = 1$ かつ $s(f_n) \downarrow \{0\}$ ($n \rightarrow \infty$)
 なる M_K 内の函数列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ を送る時, $\inf(Nf_n, a)$ は X 上強収束
 する所 $\inf(G, a)$ に収束する故, $\inf(G, a) \in H(N)$ かつ $(\inf(Nf_n, a))$
 は $n \rightarrow \infty$ の時, $\inf(G, a) \in H(N)$ 内で弱収束する. 即ち $\|\inf(G, a)\|^2 \leq a$
 を得る.

(証明終)

補題 17. N, G, a は全て上の補題と同じとする. この時

任意の $f \in M_K$ に対して, $\{ \inf(G, n) * f \}_{n=1}^{\infty}$ は $Nf \cap H(N)$ 内で強収束する。

補題 16 より強収束が明らかであろう。

定理 13 の証. ξ に関する N の 1 つの密度函数を G' とする。

2 つの正整数 m, n に対して

$$G_{m,n}(x) = (\inf(G', m), \inf(G', n))$$

とおく, この時, $G_{m,n}$ は有限連続である。補題 16 より, $m' \geq m$

かつ $n' \geq n$ に対して, $G_{m',n'} \geq G_{m,n}$. $G_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_{m,n}(x)$,

$G(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} G_m(x)$ とおく. この時, G_m は下半連続, 故に G が下半

連続となる。次に任意の $f \in M_K$ に対して,

$$\begin{aligned} \int G_m(x) f(x) d\xi(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf(G', m), \inf(G', n) * f) \\ &= (\inf(G', m), Nf) = \int \inf(G', n) f d\xi. \end{aligned}$$

故に $G_m = \inf(G', n)$ が X 上で殆んど至る所成立, 即ち X 上で殆んど

至る所 $G = G'$ を得る. G は又 N の密度函数であることがわかる。

補題 18. G に関する証明におけるものとする。台がコンパクト

かつ正の Radon 測度 μ に対して, $\iint G(x-y) d\mu(y) d\mu(x) < +\infty$ とする。この時,

$G_\mu \in H(N)$ かつ $G_\mu \leq \max_{x \in S(\mu)} G_\mu(x)$ 。

線型汎函数 $\{Nf; f \in M_K\}$ から $Nf \rightarrow \int G_\mu f d\xi$ を考える時, 度

を用いた議論から, $G_\mu \in H(N)$ を得る. $(G_{n,n}\mu, G_\mu) = \int G_{n,n}\mu d\mu$

により, $\|G_\mu\|^2 = \int G_\mu d\mu$ を得る。 $\inf(G_\mu, \max_{x \in S(\mu)} G_\mu(x)) = G_\mu$ を

得ることは殆んど明らかであろう。

さて我々の定理の証明を続けよう。台 $\mathbb{R}^n$ コンパクトの正の Radon 測度 μ に対して, G_μ の $S(\mu)$ への制限が $\mathbb{R}^n$ の函数として有限連続とする。 $G_\mu \in H(N)$ 以上の補題から得られる。任意の n に対して, $G_{n,n}\mu \in H(N)$ かつ任意の $u \geq 0 \in H(N)$ に対して, $(G_{n,n}\mu, u) \geq 0$. $G_{n,n}\mu$ は有界連続かつ $n \uparrow \infty$ の時, 各点で $G_{n,n}\mu \uparrow G_\mu$ を得る。 $G_{n,n}\mu$ は $n \rightarrow \infty$ の時 $G_\mu \wedge S(\mu)$ 上へ一様収束する。 $a_n = \max_{x \in S(\mu)} (G_\mu(x) - G_{n,n}\mu(x))$ とおくと, 完全最大値原理から, X 上 $G_\mu \leq G_{n,n}\mu + a_n$ が成立する。即ち $(G_{n,n}\mu)$ は X 上 G_μ へ一様収束する。故に G_μ は X 上有限連続である。

(証明終)

連続性の原理を論じる際, これまで通常, 広義連続核が対象であった。上の定理で G は広義連続ではないかとの疑問が起る。しかしこれは一般には正しくない。

例. $n (\geq 3)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において, μ は台がコンパクト, $\int d\mu = 1$ なる正の Radon 測度で, その Newton ポテンシャルが有界かつ $\mathbb{R}^n$ 全体では連続でないものとする。

次に G とその Fourier 変換が $\frac{1}{1+|\lambda|^2}$ となる広義連続函数とする。

3. $G * (\mu + \tilde{\mu})$ は $\mathbb{R}^n$ 全体では広義連続ではない。この時,

$\sum_{n=0}^{\infty} (G)^{n+1} * (\tilde{\mu})^n$ は Dirichlet 核で, 広義連続でない。ただし $\tilde{\mu}$

$= \frac{1}{2}(\mu + \tilde{\mu})$. 広義連続でないことは殆んど明らかであるから

$\sum_{n=0}^{\infty} (G)^{n+1} * (\tilde{f})^n$ は Dirichlet 核であることを示そう。これは

$$\sum_{n=0}^{\infty} (G)^{n+1} * (\tilde{f})^n(x) = \frac{1}{|x|^2 + 1 - \widehat{f}(x)}$$

より得られる。

□

参考文献

- [1]. N. Aronszajn, K. Smith: Characterisations of positive reproducing kernels, Amer. J. Math., t. 79, 1957, p. 611 - 622.
- [2]. C. Berg: Suites définies négatives et espaces de Dirichlet sur la sphère, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, p. 778 - 780.
- [3]. A. Beurling, J. Deny: Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 45, 1959, p. 208 - 215.
- [4]. G. Choquet, J. Deny: Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 799 - 801.
- [5]. — : Aspects linéaires de la théorie du potentiel III, ibid, p. 4260 - 4262.
- [6]. J. Deny: Théorie de la capacité dans l'espace fonctionnel, Sémin. Brelot-Choquet-Deny (Théorie du potentiel), 1964/65, n° 1, 13p.
- [7]. — : Principe complet du maximum et contractions, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. 15, 1965, p. 259 - 271.
- [8]. — : Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel, C. I. M. E., 1969, (Potential theory).
- [9]. C. Herz: Théorie élémentaire des distributions de Beurling, Pub. Sémin. Math. d'Orsay, 1964/65.
- [10]. Kh. Harzallah: Fonctions opérant sur les fonctions définie-négatives, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. 17, 1967, p. 443 - 468.
- [11]. M. Itô: Sur la régularité des noyaux de Dirichlet, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, p. 867 - 868.
- [12]. — : Sur les principes divers du maximum et le type positif, Nagoya Math. J., t. 44, (to appear).
- [13]. — : Les noyaux de convolution réguliers et les noyaux de convolution singuliers, ibid.
- [14]. — : Les noyaux réguliers et noyaux singuliers II, (to appear).