

フェルミオンを含む系のスペクトル変換

筑波大・物理 井 上 和 彦, 表 実

非線形の場の方程式を持つ場の理論を研究する上で、もとの場の変数から、より簡単な方程式に従う変数あるいは物理的に意味を持つ変数への、変数変換を行う事は、重要である。この意味で、スペクトル変換法（又は逆散乱法）は、そのような変数変換を見つける上で非常に有効な方法である。

このスペクトル変換法を、フェルミ場を含む系に適用する時に、注意すべき事は、場の変数が反交換性を持つ事である。計算を行う上で、この反交換性によって生じる部分的な符号の変化を機械的に処理するために、超空間 (x, t, θ) を導入し、その上でスペクトル変換法の定式化を行い、それを具体的に応用した結果をここで報告する。

§ 超空間上の Lax pair の定式化

まず、ポテンシャル場として、フェルミ場 $\psi_i(x, t)$ に対する Lax pair として、

$$\begin{cases} i\partial_t \Phi(x, t, \theta; \lambda) = M(\psi_i; \theta, \partial_\theta; \lambda) \Phi(x, t, \theta; \lambda), & (1a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\partial_x \Phi(x, t, \theta; \lambda) = L(\psi_i; \theta, \partial_\theta; \lambda) \Phi(x, t, \theta; \lambda), & (1b) \end{cases}$$

を考える。ここで、 θ をグラスマン数で、フェルミ場と反可換であるとする。 ∂_θ は θ についての微分であり、 λ はスペクトルパラメーターである。一般的には、 Φ は n 成分ベクトルであり、 L と M は $n \times n$ 行列であるが、以下の応用では、 $n=2$ で十分である。

さらに、線形補助問題 (1b) の散乱問題を、

$$\begin{cases} i\partial_x T(x, y; \theta, \partial_\theta; \lambda) = L(\psi_i(x); \theta, \partial_\theta, \lambda) T(x, y; \theta, \partial_\theta, \lambda) \\ T(x, x; \theta, \partial_\theta; \lambda) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

なる方程式に従う転送行列 $T(x, y; \theta, \partial_\theta; \lambda)$ を用いて解くわけであるが、これ以上の細い定式化の議論は、文献 1), 2), 3) を御参照されたい。

§ 応用例 I (Classical massive Thirring model)

まず、最初の応用例として、massive Thirring model の古典論を考える。この模型の Lagran -

gian は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i r^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{g}{2} \bar{\psi} r^\mu \psi \cdot \bar{\psi} r_\mu \psi \quad (3)$$

であり, 式(1b)の $L(\psi_i; \theta, \partial_\theta; \lambda)$ は,

$$L = L_1 + L_2 \partial_\theta + \theta L_3 + \theta L_4 \partial_\theta \quad (4)$$

とした時

$$\begin{cases} L_1 = g \bar{\psi} r' \psi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L_1 + L_4 = -m(\lambda^2 - \lambda^{-2})/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ L_2 = \sqrt{\frac{mg}{2}} \begin{pmatrix} -x_+^*, & x_-^* \\ x_-, & x_+ \end{pmatrix}, \quad L_3 = \sqrt{\frac{mg}{2}} \begin{pmatrix} x_+, & -x_-^* \\ x_-, & x_+^* \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (5)$$

である. 但し, $x_\pm = \lambda \psi_1 \pm \lambda^{-1} \psi_2$, $x_\pm^* = \lambda \psi_1^* \pm \lambda^{-1} \psi_2^*$ である.

これに対して, 転送行列 $T(x, y)$ を

$$\begin{cases} T(x, y; \lambda) = \exp(-i L_0 x) U(x, y) \exp(i L_0 y) \\ L_0 = -\frac{m}{2}(\lambda^2 - \lambda^{-2})/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \theta \partial_\theta \end{cases} \quad (6)$$

の形で求めた時に, 散乱データ S は,

$$S = \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} U(x, y) \quad (7)$$

で与えられる. この S を

$$\begin{cases} S = S_1 + S_2 \partial_\theta + \theta S_3 + \theta (S_4 + S_1) \partial_\theta, \\ S_i = \begin{pmatrix} a_i, & b_i \\ c_i, & d_i \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (8)$$

の形で表わすことにすると, $\log a_4(\lambda)$ が, ハミルトニアン, 運動量を含む無限個の保存量の系列を与え, さらに, $a_2(\lambda)$, $b_2(\lambda)$ を用いて, ハミルトニアンを対角化する変数を作ることができるという結論を得た. (文献1), 2), 3))

§ 応用例 II (Classical supersymmetric sine-Gordon model)

次の応用として, 次の Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + 4 \sin^2 \frac{\phi}{2} + i \bar{\psi} \psi \cos \frac{\phi}{2}), \quad (9)$$

で与えられる supersymmetric sine-Gordon model を考える．この時，式 (1b) の L を式 (4) のように表わすと

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = \frac{\pi}{4} \sigma_3 + k_0 \sin \frac{\phi}{2} \sigma_1 + k_1 \cos \frac{\phi}{2} \sigma_2, \\ L_2 = \frac{i}{4\sqrt{2}} (\lambda \psi_1 \sigma_3 - \frac{1}{\lambda} \psi_2 \sigma_1) e^{\frac{i}{4}\phi \sigma_3}, \\ L_3 = \frac{i}{4\sqrt{2}} e^{\frac{i}{4}\phi \sigma_3} (\frac{1}{\lambda} \psi_2 \sigma_3 + \lambda \psi_1 \sigma_1), \\ L_1 + L_4 = k_1 \sigma_2, \end{array} \right. \quad (10)$$

となる．但し， $k_1 = \frac{1}{4} (\lambda^2 - \lambda^{-2})$ ， $k_0 = \frac{1}{4} (\lambda^2 + \lambda^{-2})$ ， $\pi = \phi$ であり， σ_i ($i=1, 2, 3$) は Pauli 行列である．

これに対して，散乱データを，massive Thirring model の場合と同様に求めると，無限個の保存量のうち，フェルミ場の偶数次の積からなるものは $\log(a_1(\lambda)/a_4(\lambda))$ がその系列を与え，フェルミ場の奇数次の積からなる保存量は， $a_2(\lambda)$ がその系列を与える事を示す事ができた．その中で，この模型に特徴的な保存量として，supersymmetry の変換の生成子 Q_i が $a_2(\lambda)$ の展開に現われ，ハミルトニアン P_0 と運動量 P_1 が $\log(a_1(\lambda)/a_4(\lambda))$ に現われ，それらが，

$$\begin{aligned} \{Q_i, Q_j\} &= 2i (r^\mu C)_{ij} P_\mu \\ \{Q_i, P_\mu\} &= \{P_i, P_\mu\} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

を満たすことも，散乱データの Poisson brackets を計算する事により確かめられる．(文献 4))

参考文献

- 1) 物性研究 42, No.3 (1984), 491.
- 2) Prog. Theor. Phys. 72, No. 3 (1984), 641.
- 3) Phys. Lett. 147B, (1984), 317.
- 4) University of Tsukuba preprint, UTHEP-132.