

非線型格子のつらなり波と ソリトンとの関係

東教大 理 戸田盛和

§1 運動方程式

非線型のバネでつながれた 1 次元の鎖を考える。バネの自然長からの変化を r とし、バネの位置エネルギーを

$$\phi(r) = a(e^{-br} + r) \quad (1)$$

とする。このとき運動方程式は

$$m \ddot{r}_n = a(2e^{-br_n} - e^{-br_{n-1}} - e^{-br_{n+1}}) \quad (2)$$

となる。ここで

$$br_n \rightarrow r_n, \quad \sqrt{\frac{ab}{m}} t \rightarrow t \quad (3)$$

と書き変えると、運動方程式は

$$\ddot{r}_n = 2e^{-r_n} - e^{-r_{n-1}} - e^{-r_{n+1}} \quad (4)$$

となる。今後、この形で考えよう。

$$e^{-r_n-1} = Y_n \quad \text{または} \quad r_n = -\log(1+Y_n) \quad (5)$$

とあくと、運動方程式は

$$-r_n'' = \frac{d^2}{dt^2} \log(1+Y_n) = Y_{n-1} + Y_{n+1} - 2Y_n \quad (6)$$

となる。ここを

$$\int Y_n dt = S_n, \quad r_n = -\log(1+\dot{S}_n) \quad (7)$$

とすれば、運動方程式を一回 t で積分して

$$-r_n' = \frac{d}{dt} \log(1+\dot{S}_n) = S_{n-1} + S_{n+1} - 2S_n \quad (8)$$

となる。ただし右辺に積分定数 $\alpha_n = 0$ とおいた。これは S_n を適当に定義すれば可能である。さらに

$$\int^t S_n dt = \bar{S}_n, \quad r_n = -\log(1+\ddot{\bar{S}}_n), \quad (9)$$

$$\therefore e^{-r_n-1} = \ddot{\bar{S}}_n \quad (9')$$

とすれば

$$-r_n = \log(1+\ddot{\bar{S}}_n) = \bar{S}_{n-1} + \bar{S}_{n+1} - 2\bar{S}_n \quad (10)$$

となる。ここでも積分定数を適当に選んで

$$r_n = 2\bar{S}_n - \bar{S}_{n-1} - \bar{S}_{n+1} \quad (11)$$

に作るようにした。(10)の右の等式は運動方程式と考えることとできる。ただし、このときは(11)に与えられた値を代入される。

§ 2. travelling wave

楕円関数の関数 $\mathcal{J}_0(x)$ は周期1の関数である。これは次の等式を満足する。

$$\frac{\mathcal{J}_0(x+y)\mathcal{J}_0(x-y)}{[\mathcal{J}_0(x)]^2} = C \left\{ 1 + \mu \frac{d^2}{dx^2} \log \mathcal{J}_0(x) \right\} \quad (11)$$

ただし、ここには

$$C = C(y) = \left[\frac{\mathcal{J}_0(y)}{\mathcal{J}_0(0)} \right]^2 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{E}{K} \right) \operatorname{sn}^2(2Ky) \right\} \quad (12)$$

$$\mu = \mu(y) = \frac{\operatorname{sn}^2(2Ky)}{(2K)^2 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{E}{K} \right) \operatorname{sn}^2(2Ky) \right\}} \quad (13)$$

K, E はそれぞれ第1種および第2種の完全楕円積分、 sn は Jacobi の楕円関数である。

(11)と運動方程式(1-10)とを比べると、次のように特解があることがわかる。

$$S_n = \log \left[\mathcal{J}_0 \left(\nu t \mp \frac{n}{\lambda} \right) / C^{n/2} \right] \quad (14)$$

ただし、ここには ν と λ とは $\nu^2 = \mu$ あるいは

$$(2K\nu)^2 = \left\{ \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \frac{2K}{\lambda}} - 1 + \frac{E}{K} \right\}^{-1} \quad (5)$$

によつて関係が与えられる。これは2つの波の分散関係である。

また、この振動によつてバネは伸びているとみられる。

例えば N 個の質点を含む鎖が輪を形成している (周期条件)

とすると $r_1 = r_{N+1}$ であり、鎖の長さは $(1-11)$ を採用し

$$r_1 + r_2 + \dots + r_N = N \log C \left(\frac{1}{\lambda} \right) \quad (6)$$

を与えられる。したがって

$$\bar{r} = \log C \quad (7)$$

はバネの平均の伸びを与える。

$\mathcal{S}$ 関数の性質により

$$\dot{S}_n = s_n = \nu \frac{\mathcal{S}'_0 \left(\nu t + \frac{n}{\lambda} \right)}{\mathcal{S}_0 \left(\nu t + \frac{n}{\lambda} \right)} = 2K\nu Z \left(2 \left(\nu t + \frac{n}{\lambda} \right) K \right) \quad (8)$$

$$= 2K\nu \int_0^{2 \left(\nu t + \frac{n}{\lambda} \right) K} (dn^2 u + \frac{E}{K}) du \quad (9)$$

したがって (1-7) により、ある u は $(1-9')$ により

$$e^{-r_n} - 1 = \dot{S}_n = (2K\nu)^2 \left[dn^2 \left\{ 2 \left(\nu t + \frac{n}{\lambda} \right) K \right\} - \frac{E}{K} \right] \quad (10)$$

dn は周期 $2K$ の関数であり、 $dn^2 u$ の平均は E/K である。

sn , dn は ν の Jacoby の楕円関数の母数を k と書く。

$0 \leq k \leq 1$ であり、 $dn^2 u = 1 - k^2 sn^2 u$ の関係がある。

3. $k \ll 1$ ならば波は正弦波に近いが, $k \simeq 1$ になると, 波の位相がくる。 (10) はこのように つらなり波 と見え, その波長は λ である。

§3. つらなり波の分解

(2-10) あるいは間接的に (2-4) で与えられた ϕ のつらなり波を考える。この関数は

$$J_0(x) = J_0(x, q) = \phi(q) \prod_{r=1}^{\infty} (1 - 2q^{2r-1} \cos 2\pi x + q^{4r-2}) \quad (1)$$

ただし $\phi(q) = \prod_{r=1}^{\infty} (1 - q^{2r})$ である。すなわちこのように

$$(1 - 2q_1 \cos 2\pi x + q_1^2)(1 - 2q_1 \cos 2\pi(x \pm \frac{1}{2}) + q_1^2) = 1 - 2q_1^2 \cos 4\pi x + q_1^4$$

であるから, $\varphi(q) \equiv q$ だけ関数と 12

$$J_0(2x, q^2) = \varphi(q) \cdot J_0(x, q) J_0(x \pm \frac{1}{2}, q) \quad (2)$$

したがって (右へ伝わる波を記す。左へ進む波も同様)

$$\begin{aligned} S_n &= \log J_0(\nu t - \frac{n}{\lambda}, q) + \text{const} \\ &= \log J_0(\frac{\nu}{2} t - \frac{n}{2\lambda}, \sqrt{q}) + \log J_0(\frac{\nu}{2} t - \frac{n+\lambda}{2\lambda}, \sqrt{q}) \\ &\quad + \text{const} \end{aligned} \quad (3)$$

と書ける。したがって波長 λ のつらなり波は, 波長 2λ のつらなり波と λ だけずらした重ね合わせとして作ることができる。

き、いかにいへば、 $\frac{1}{2}$ より波は、波長が $2(\frac{1}{2}) = 1$ より波に分解される。これを $e^{-\gamma n-1}$ について書くと

$$\begin{aligned} e^{-\gamma n-1} &= (2K(k)\nu)^2 \left[\operatorname{dn}^2\left(2(\nu t - \frac{n}{\lambda})K(k), k\right) - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \\ &= (K(\kappa)\nu)^2 \left[\operatorname{dn}^2\left((\nu t - \frac{n}{\lambda})K(\kappa), \kappa\right) - \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{dn}^2\left((\nu t - \frac{n}{\lambda} - 1)K(\kappa), \kappa\right) - \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} \right] \quad (4) \end{aligned}$$

ここに $\frac{1}{2} \times 1 - 1 = 1$ と母数 k と関係は一般に

$$q = e^{-\pi K(k')/K(k)} \quad (k' = \sqrt{1-k^2}) \quad (5)$$

であるから、上式の母数 k と κ の関係は

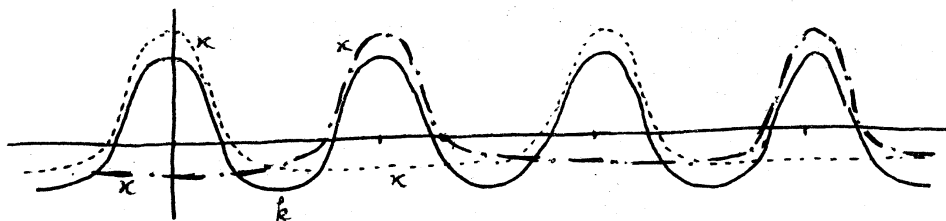
$$\sqrt{q} = e^{-\pi K(\kappa')/K(\kappa)} \quad (\kappa' = \sqrt{1-\kappa^2}) \quad (6)$$

あるいは

$$\frac{K(k')}{2K(k)} = \frac{K(\kappa')}{K(\kappa)} \quad (7)$$

で与えられる。

2つの場合の非線形な重畳合わせを下に図示する。



これは波形が分解，あるいは逆に合成されることを意味する。しかし，分散関係（ ν と λ と q の関係）は全体として q の波形（波長 λ ，母数 k ）の式（2-5）に ν と λ と q とが現れるので，分解された成分波（波長 2λ ，母数 k ）による分散関係によって ν と λ と q とが現れる。ここに非線型 q の波の分解・合成の特長の一つがみられる。

波長 2λ の成分波は，さらにそれを2個の波長 4λ の波に分解できる。しかし，さらに一般に，3個，4個，... 任意の整数個のつらなり波に分解できる。これは次のように(3)式の拡張によって示される。

$$\mathcal{J}_0(lx, q^l) = \frac{\phi(q^l)}{\{\phi(q)\}^l} \prod_{s=0}^{l-1} \mathcal{J}_0\left(x + \frac{s}{l}, q\right) \quad (8)$$

この式を用いると(1-9')により，(2-10)は

$$e^{-\nu t} - 1 = \left(2K(k) \frac{\nu}{l}\right)^2 \sum_{s=0}^{l-1} \left[dn^2 \left\{ 2\left(\frac{\nu}{l}t - \frac{n}{l\lambda} + \frac{s}{l}\right) K(k) \right\} - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (9)$$

ただし， k は

$$\frac{K(k')}{l K(k)} = \frac{K(k')}{K(k)} \quad (k' = \sqrt{1-k^2}) \quad (10)$$

で k と関係づけられ， ν は λ と(2-5)の分散関係に結びつけられる。この分解は波長 λ のつらなり波を，波長 2λ の波 l 個が入れ替わったものに分解することである。また，この逆の合成をも意味している。

§4. 周期条件 (輪) のソリトン, つらなり波

いままでは, 無限鎖 ($-\infty < n < \infty$) のつらなり波のほうに扱ってきたが, 2つの周期的な波は波長の整数倍の長さの輪 (周期条件) の中のものと考えることができる。そして前節の分解・合成を周期条件のものとすることができる。分解は前節と同じである。

N 個の波長 $n=1, 2, \dots, N$ のらなる平衡を考え, 波長 $n=0$ は $n=N$ と同じであるとする。 $\gamma_{N+1} = \gamma_1$.

2つの輪の中にただ一つの山を (2-10) の形を解を周期条件下のソリトンと見做すことができる。これは,

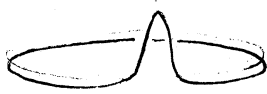
$$e^{-\gamma_n - 1} = (2K(\kappa)\nu_s)^2 \left[dn^2 \left\{ 2(\nu_s t - \frac{n}{N})K(\kappa) \right\} - \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} \right] \quad (\text{母数} = \kappa)$$

の形で与えられる。 κ は母数, ν_s はソリトンに付随する振動数である。

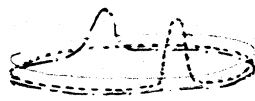
$$(2K(\kappa)\nu_s)^2 = \left\{ \frac{1}{sn^2 \frac{2K(\kappa)}{N}} - 1 + \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} \right\}^{-1} \quad (\text{母数} = \kappa)$$

で与えられる。

このようにソリトンを2個, 2個には $N/2$ ずつ (2) 同様に同じに進むようにおくと, (3-4) の規則により合成される $\lambda = N/2$ のつらなり波の平衡の中にできる。これは式 (3-4) で $\lambda = N/2$, $\nu = 2\nu_s$ とおいて得られる。



ソリトン
(母波長)



合成

→



$\lambda = N/2$
(母波長)
子波

これは p.6 の図と同様に示すことができる。

一般化 (3-8~10) によれば、同期条件のもとに与えられた波 (normal mode) は、その中の波の数を N のソリトンに分解できるわけである。また、波の数を l の倍増ならば、 l 個の子波に分解できるわけである。

§5. 無限空間のソリトンに対する分解

(3-8~10) において $l \rightarrow \infty$ になる場合、あるいは周期的な輪において $N \rightarrow \infty$ になる場合、子波はすべてソリトンの集まりで表わされることになる。はじめから無限個に分解するには、次の公式が便利である。

$$J_0(x) = J_0(0) e^{-\frac{\pi K x^2}{K'}} \prod_{y=-\infty}^{\infty} \frac{\cosh\left\{\frac{\pi K}{K'}(x-y)\right\}}{\cosh\left(\frac{\pi K}{K'} y\right)} \quad (1)$$

波長 λ の子波においては $x = vt - \frac{1}{2}\lambda$ とおき、

$$S_n = \log J_0(x) + \text{const} \quad \text{から} \quad e^{-r_n} - 1 = s_n = \ddot{S}_n \quad \text{とすれば}$$

$$e^{-r_n} - 1 = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \beta^2 \operatorname{sech}^2(\beta t - \alpha n - \alpha \lambda y) - 2\beta v \quad (2)$$

にんし

$$\alpha = \frac{\pi K}{K' \lambda}, \quad \beta = \alpha \lambda v \quad (3)$$

を得る。波の速度，分散関係は (5-3) で与えられる。

(2) 式の右辺 Σ の中の sech^2 の項は n が ∞ (無限空間) のソリトンとして知られたものである。第2項の $-2\beta v$ は (1) 式の $e^{-\pi K x^2 / K'}$ から来るものである。これは周期条件の下で考えた ϕ_{10} の図のソリトンのように，ある n は ϕ_0 の図のように n につれて $e^{-\gamma n} - 1 < 0$ の部分，すなわち谷の部分をもつ。この谷の深さは周期 N を大きくするにつれて浅くなる。 $y = -\infty$ から ∞ まで和をとる y になる極限 (周期条件で $N \rightarrow \infty$ に相当) でも有限の奇数を残すことになるのである。

§6. ソリトン

周期条件下のソリトンについて $N \gg 1$ の極限を考えよう。前節 (5-3) からわかるように $N = \lambda \gg 1$ とすると $\alpha \rightarrow 0$ となり，同時に $v \rightarrow 0$ ， $\beta \rightarrow 0$ にもなる。これを正ける4山はソリトンは消えてしまふから，母関数 1 に近づける必要がある。このとき $K/K' \rightarrow \infty$ となる。(5-3) の α は有限におこえらる。この極限では (5-1) はある 1112

$$\mathcal{J}_0(x) \simeq 2\sqrt{K/K'} e^{-\frac{\pi K}{K'}(\frac{1}{4} + x^2)} \cosh\left(\frac{\pi K}{K'} x\right) \quad (1)$$

と(2)より、これは $\beta = \frac{\pi K}{K'} v$ = 有限の極限と(2)

$$e^{-r_n} - 1 \cong \beta^2 \operatorname{sech}^2(\alpha n - \beta t) - 2v\beta \quad \left(-\frac{N}{2} \leq n < \frac{N}{2}\right) \quad (2)$$

を得る。ただし2の極限($k \rightarrow 1$, $K' \rightarrow \pi/2$)では

$$\beta \cong 2Kv \cong \sinh \alpha, \quad \text{速度} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad v = \beta/\alpha N \quad (3)$$

が成り立つ。(2)の第2項は $N \rightarrow \infty$ で0になるが N が有限の場合に残り残ることを示さなければならない。

$e^{-r_n} - 1 > 0$ の山の部分は鎖の縮みと $e^{-r_n} - 1 < 0$ の部分は伸びを与える。(2)の第2項は伸びを与えるものである。

全体として伸びを求めてみると $N \gg 1$ の場合と(2)

$$\sum_{n=1}^N r_n = 2N\alpha \left\{ \left(\frac{\sinh \alpha}{\alpha} \right)^2 - 1 \right\} > 0$$

これは常に正である、ソリトンは山の部分が圧縮を与える

にも拘らず、そのすく部分で無限小ではあるが $O(1/N)$ 、

無視できるから伸びを与える。全体としてソリトンは伸びを与えるものであることがわかった。