

函数環における予報理論型の問題について

東北大・巻

大野芳希

京都工繊大・工短

数田公三

1. 一次元定常確率過程の予報問題に関連して, 次のことがよく知られている。

1. (Szegő) $0 < p < \infty$, $\mu \in M^+(\mathbb{T})$: 単位円周上の非負測度全体, とする。

$$\inf \int_0^{2\pi} |1 - f|^p d\mu = \exp \int_0^{2\pi} (\log w) \frac{d\theta}{2\pi}$$

ここで $w \frac{d\theta}{2\pi}$ は $d\mu$ の Lebesgue 測度 $d\theta$ に関する絶対連続部分, $\inf$ は

$a_1 e^{i\theta} + a_2 e^{i2\theta} + \dots + a_n e^{in\theta}$ の形の三角多項式全体を動かすときのもの。

2. (Kolmogorov) $0 \leq w \in L^1(\mathbb{T})$ とすると,

$$\inf \int_0^{2\pi} |1 + f + \bar{f}|^2 w \frac{d\theta}{2\pi} = \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{w} \frac{d\theta}{2\pi} \right]^{-1}$$

ただし, $f, \bar{f}$ は 1 の形の三角多項式を動かすものとする。

3. (Helson - Szegő - Sarason). $\mu \in M^+(\mathbb{T})$ に対して

$$p_n(\mu) = \sup \left\{ \left| \int f \bar{g} d\mu \right| : \begin{array}{l} f \in \text{span} \{1, e^{i\theta}, \dots\}, \int |f|^2 d\mu \leq 1 \\ g \in \text{span} \{e^{-in\theta}, e^{-i(n-1)\theta}, \dots\}, \int |g|^2 d\mu \leq 1 \end{array} \right\}$$

とおく。すると

$$(1) \quad p_n(\mu) < 1 \iff d\mu = |a_0 + a_1 e^{i\theta} + \dots + a_{n-1} e^{i(n-1)\theta}|^2 \exp(r + \tilde{s}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

とある, $a_j \in \mathbb{C}$ と $r, s \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ (実数値有界函数) で $\|s\|_\infty < \frac{\pi}{2}$ とするものが存在する。

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(\mu) = 0 \iff d\mu = |p(e^{i\theta})|^2 \exp(u + \tilde{v}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

とある $p(e^{i\theta}) = a_0 + a_1 e^{i\theta} + \dots + a_k e^{ik\theta}$ と, $u, v \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ が存在する。

(上で $\tilde{s}$ は s の共役函数)

さて 1, 2 及び (1) $n=0$ の場合は, 一意表現測度を持つた函数環で全く同じような定理が成り立つことは, よく知られている。(例として Gamelin⁽⁴⁾ の本)。ここでは, (1), (2) が Helson-Szegö, Helson-Sarason の idea に沿い, 何等の議論を適当に修正すると, 成り立つことを述べ, 証明の概略を述べる。

A を compact Hausdorff 空間 X 上の函数環, dm を A のある複素準同型写像 m の一意表現測度とし, m の核を A_0 とする。 A_0 の n 個の元の積から生成されたイデアルを A_0^n と

書く。 A の $L^\infty(dm)$ における w^* 閉包を H^∞ とし、 $H_0^\infty = \{f \in H^\infty : \int f dm = 0\}$ とおく。 $(H_0^\infty)^\circ$ も A_0° と同様に (2) 定義する。 $\pm$ m の Gleason part $G(m)$ が $\{m\}$ のみで成り立つとき、 $H_0^\infty = \bigoplus H^\infty$ とする内部直和 Z (Wermer の embedding function と呼ばれる) が存在する。 $\pm$ したがって、任意の $\mathbb{T}$ 上の可測集合 E に対して、

$$(1) \quad m\{x \in X : Z(x) \in E\} = L(E) \quad (\text{E の正値化測度}) \quad (117, \text{Cor. 1})$$

が成り立つ。 $\pm$ $\mathbb{T}$ 上の可測函数 $u(e^{i\theta})$ に対して、 $Z(x)$ との合成函数 $u(Z)$ を $u(Z)(x) = u(Z(x))$ として定義する。

$\pm$ $v \in M^+(X)$ に対して

$$p_n(v) = \sup \left\{ \left| \int f g dv \right| : f \in A, g \in A_0^\circ, \int |f|^2 dv \leq 1, \int |g|^2 dv \leq 1 \right\}$$

を導入する。

明らかに $1 \geq p_1(v) \geq p_2(v) \geq \dots \geq 0$, $\pm$ Helson-Szegő-Sarason の定理の一般化として次を得る。

定理 1. $G(m) = \{m\}$ とする。

$$(i) \quad p_n(v) \rightarrow 0 \iff \exists c > 0 : dv = c dm \iff p_n(v) = 0 \quad (n=1,2,\dots)$$

$$(ii) \quad p_n(v) < 1 \iff \exists r, s \in L_{\mathbb{R}}^\infty(dm) : dv = \exp(r + i s) dm, \\ \|s\|_\infty < \frac{\pi}{2}$$

ここで s は s の一般化した意味での共役函数。

定理2. $G(m) \neq \{m\}$ とし, Z は Wermer の embedding function とする.

(i) $\rho_n(v) \rightarrow 0 \iff \exists u, \tilde{u} \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}), \exists P(z): z \text{ の多項式};$

$$dv = |P(Z)|^2 \exp(u(Z) + \tilde{u}(Z)) dm$$

($\tilde{u}$ は通常の共役函数)

(ii) $\rho_n(v) = 0 \iff \exists P(z): \deg P < n \text{ なる多項式};$

$$dv = |P(Z)|^2 dm$$

(iii) $\rho_n(v) < 1 \iff \exists r, s \in L_{\mathbb{R}}^{\infty}(dm), \|s\|_{\infty} < \frac{\pi}{2}, \exists P(z): \deg P < n \text{ なる多項式}$

$$dv = |P(Z)|^2 \exp(r + \tilde{s}) dm,$$

($\tilde{s}$ は s の一般化の意味の共役函数).

2°. ここでは定理1と定理2(i)の証明の概略を述べる.

まず

Lemma 1. $\rho_n(v) < 1 \implies du \ll dm$.

$\therefore dv = w dm + dv_s$, $dv_s \perp dm$ とする. $dv_s \neq 0$ と仮定する.

すると $\exists E: \text{Borel set } \nu_s(X-E) = 0, m(E) = 0$. $\exists \delta: E$ は F_{δ} -set と (2) と (4). よって Forrelli's lemma (Gamelin [4], Lemma 7.3) に依り,

$\exists f_n \in A: \|f_n\|_{\infty} \leq 1, f_n(x) \rightarrow 0 (x \in E), f_n(x) \rightarrow 1 \text{ m-a.e.}$

$$\text{f, 2} \quad \int |f_n - \chi_{X-E}|^2 dv = \int_{X-E} |f_n - 1|^2 w dm + \int_E |f_n|^2 dv \rightarrow 0.$$

$$\text{f, 2} \quad \|f_n - 1 + \chi_E\|_{L^2(dv)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \varepsilon_n = \int (f_n - 1) dm \text{ とおす,}$$

$$g_n = f_n - 1 - \varepsilon_n \text{ とおく. すると } g_n \in A_0. \text{ 又 } \varepsilon_n \rightarrow 0. \text{ f, 2}$$

$$\|g_n + \chi_E\|_{L^2(dv)} = \|f_n - 1 + \chi_E + \varepsilon_n\|_{L^2(dv)} \leq \|f_n - 1 + \chi_E\|_{L^2(dv)} + \|\varepsilon_n\|_{L^2(dv)} \rightarrow 0.$$

$$\therefore \chi_E \in [A_0]_{L^2(dv)} : A_0 \text{ の } L^2(dv)\text{-closure. したがって, 7.2 の (b) は}$$

$$\chi_{E_n} \in (A_0^k)_{L^2(dv)} \quad (n=1, 2, \dots) \text{ である. 定数 } \chi_{E_n} \in (A_0^k)_{L^2(dv)} \text{ と仮定}$$

$$\text{f, 2, } \exists \text{ non-zero } f_1 \in A_0^k : \|\chi_{E_n} - f_1\|_{L^2(dv)} < \varepsilon. \quad \text{又}$$

$$\int |\chi_{E_n} - \chi_{E_n} f_1|^2 dv + \int |f_1|^2 w dm = \int |\chi_{E_n} - f_1|^2 dv \quad \text{f, 1}$$

$$\|\chi_{E_n} - \chi_{E_n} f_1\|_{L^2(dv)} < \varepsilon. \quad \text{又 } \chi_{E_n} \in [A_0]_{L^2(dv)} \text{ f, 1 } \exists \text{ non-zero } f_2 \in A_0:$$

$$\|\chi_{E_n} - f_2\|_{L^2(dv)} < \varepsilon / \|f_1\|_\infty. \quad \text{f, 2}$$

$$\|\chi_{E_n} - f_1 f_2\|_{L^2(dv)} \leq \|\chi_{E_n} - \chi_{E_n} f_1\|_{L^2(dv)} + \|\chi_{E_n} f_1 - f_1 f_2\|_{L^2(dv)}$$

$$< \varepsilon + \|f_1\|_\infty \|\chi_{E_n} - f_2\|_{L^2(dv)} < 2\varepsilon.$$

$$\therefore \chi_E \in (A_0^{k+1})_{L^2(dv)}. \quad \text{f, 2} \quad n=1, 2, \dots \quad \text{f, 2} \quad \text{f, 2}$$

$$p_n(v) \geq \frac{1}{\|\chi_E\|_{L^2(dv)}^2} \int \chi_E \chi_{E_n} dv = 1, \quad \text{f, 1} \quad p_n < 1 \quad \text{f, 2} \quad \text{f, 2}$$

$$\text{Lemma 2. } 0 \leq w \in L^1(dm), \quad p_n(w dm) < 1 \Rightarrow \log w \in L^1(dm).$$

$$\therefore) \text{ Szegő's Th の } \log w \in L^1(dm) \text{ の } \text{f, 1}$$

$$\inf \left\{ \int |1-f|^p w dm : f \in A_0 \right\} = 0, \quad 0 < p < \infty.$$

$$p=qn \geq 1, \quad \exists f_k \in A_0 : \|f_k - 1\|_{L^p(wd\mu)} \rightarrow 0. \quad \times$$

$$\begin{aligned} \int |f_k^n - 1|^2 w d\mu &\leq \left\{ \int |f_k - 1|^4 w d\mu \right\}^{1/2} \left\{ \int |f_k^{n-1} + f_k^{n-2} + \dots + 1|^4 w d\mu \right\}^{1/2} \\ &\leq \|f_k - 1\|_{L^4(wd\mu)}^2 \left\{ \|f_k^{n-1}\|_{L^4(wd\mu)}^4 + \dots + \|1\|_{L^4(wd\mu)}^4 \right\}^{1/2} \\ &\leq \|f_k - 1\|_{L^4(wd\mu)}^2 \left\{ K^4 M^4 + K^4 M^{4n-2} + \dots + K^4 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$\text{further, } K = \left(\int w d\mu \right)^{1/4n}, \quad M = \sup_k \|f_k\|_{L^4(wd\mu)}.$$

$$\therefore 1 \in [A_0^n]_{L^2(wd\mu)}, \quad \therefore p_n = 1, \text{ 矛盾. } \star$$

定理1の証明. 対し $G(\mu) = \{ \mu \} \Leftrightarrow [A_0 H_0^\infty]_* = H_0^\infty : ()_*$ は $\text{weak}^*(\sigma(L^\infty(d\mu), L^1(d\mu)))$ -closure. $\exists \tau \quad p_n(v) < 1$ とする, Lemma 1, 2 より $dv = w d\mu \quad \therefore 0 < w \in L^1(d\mu), \log w \in L^1(d\mu)$ と可なり. $\exists \tau \quad w > 0$ m-a.e. なるから

$$(2) \quad \sigma(L^\infty(d\mu), L^1(d\mu)) = \sigma(L^\infty(dv), L^1(dv)).$$

$$[A_0 H_0^\infty]_* = H_0^\infty \text{ 対し}$$

$$[A_0]_{L^2(d\mu)} = [H_0^\infty]_{L^2(d\mu)} = [A_0 H_0^\infty]_{L^2(d\mu)} = [A_0^2]_{L^2(d\mu)}.$$

$\exists \tau$ 中略 [10] の Lemma 1 (2) より

$$\{A_0^k\}_* = \{[A_0^k]_*\}_{L^2(d\mu)} \cap L^\infty(d\mu) = [A_0^k]_{L^2(d\mu)} \cap L^\infty(d\mu), \quad k=1, 2, \dots$$

$$\therefore H_0^\infty = [A_0]_* = [A_0^2]_* = \dots = [A_0^n]_* = \dots$$

$$(3) \quad H_0^\infty = [A_0]_* = [A_0^2]_* = \dots = [A_0^n]_* = \dots$$

$$\exists \tau (2) \text{ より } H_0^\infty \subset [A_0^n]_{L^2(dv)} \quad (n=1, 2, \dots)$$

さて $dv = w dm$ の w が定数でないとしても、すると m の表現測度から
 一意に決まることより $[A + \bar{A}]_+ = L^0(dm)$ であるから、 $\exists f \in A_0$;
 $\int f w dm \neq 0$. しかし、 $H^0 \subset [A_0] \subset L^0(dm)$ であるから $f \in [A_0] \subset L^0(dm)$

$$\therefore p_n(v) \geq |\int 1 \times f w dm| / (\int 1^2 w dm \int |f|^2 w dm)^{1/2} > 0. \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(v) = 0$$

したがって $c > 0$ $dv = c dm$. したがって $p_n(v) = 0$ ($n=0, 1, 2, \dots$) は成り立たない。

したがって (i) は示された。 したがって $p_n(v) < 1$ となる。 したがって $dv = w dm$;

$0 < w \in L^1(dm)$, $\log w \in L^1(dm)$. (3) より $p_1(v) = p_k(v)$ となる。 かつ $(k=1, 2, \dots)$

大野 [12] の Theorem 1 により $dv = \exp(r + \tilde{r}) dm$; $r, \tilde{r} \in L^0_{\text{loc}}(dm)$, $\|r\|_{\infty} \leq \frac{\pi}{2}$ と

書ける。 又この性質より $p_1(v) < 1$ であるから $p_n(v) < 1$ となる。 ☆

さて、定理 2 の証明にも最初から (Lemma 1, 2 により) $dv = w dm$,

$0 < w \in L^1(dm)$, $\log w \in L^1(dm)$ としてよい。 $\chi := \tau$

$$\phi = (\log w) \sim \text{とおく。 すると } w = |h|^2, \quad h^2 = \exp(\log w + i(\log w) \sim)$$

$h \in H^2(m)$, 外部正値となるから $w = h^2 e^{-i\phi}$ となる。 したがって

かつ、 p_n の定義の $A_0, A_0^\sim \in H_0^\infty, (H_0^\infty)^\sim$ で置き換えてもよい

ことが容易に分る。 このとき $(H_0^\infty)^\sim = Z^n H^\infty$ であることに注意

すれば

$$p_n(v) = \sup \left\{ \left| \int f h g h Z^n e^{-i\phi} dm \right| : f, g \in H^\infty, \|f\|_{L^2(w dm)} \leq 1, \|g\|_{L^2(w dm)} \leq 1 \right\}$$

又 h : 外部正値であるから $\{f h \cdot g h : f, g \in H^\infty, \|f h\|_{L^2(m)} \leq 1, \|g h\|_{L^2(m)} \leq 1\}$ は

$H^1(dm)$ で dense になる。 かつ、

$$(4) \quad p_n(v) = \sup \left\{ \left| \int f Z^n e^{-i\phi} dm \right| : f \in H^1(dm), \|f\|_{L^1(dm)} \leq 1 \right\}.$$

これは $T: f \rightarrow \int f Z^n e^{-i\phi} dm$ の $H^1(dm)$ 上の operator norm が p_n であることが知られる。 $f \in H^1(dm)$ に対して Hahn-Banach により $T \in L^1(dm)$ 上に $\mathcal{H}^1$ (non-preserving) として $(L^1(dm))' = L^\infty(dm)$ へ、 $\exists f_0 \in L^\infty(dm) : Tf = \int f_0 f dm$ $f \in H^1(dm)$ 。 更に $g_0 = Z^n e^{-i\phi} - f_0$ とおくと、 $g_0 \in L^\infty(dm) \cap A^\perp = H_0^\infty$ 。

$$\forall g \in H_0^\infty \text{ に対して } \int (Z^n e^{-i\phi} - g) f dm = \int Z^n e^{-i\phi} f dm = Tf. \quad f \in H^1(dm)$$

$$p_n(v) = \|Z^n e^{-i\phi} - g_0\|_\infty \leq \|Z^n e^{-i\phi} - g\|_\infty \quad \forall g \in H_0^\infty \quad \text{よって}$$

$f \in H^1(dm), g_0 \neq 0$ に対して $p_n(v) < 1$ となる (これは $\int f g_0 dm = 0$ であるから)。

Lemma 3.

$$\begin{aligned} p_n(v) &= \min_{g \in H_0^\infty} \|Z^n e^{-i\phi} - g\|_\infty = \min_{F \in H^\infty} \|1 - Z^{1-n} e^{i\phi} F\|_\infty \\ &= \min_{F \in H^\infty} \|e^{-i\phi} - Z^{1-n} F\|_\infty. \end{aligned}$$

よって $W = \{0 < w \in L^1(dm) : \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(w dm) = 0\}$ とおくと、 Lemma 3 により

1)

Lemma 4.

$$w \in W \iff \forall \varepsilon > 0, \exists F \in H^\infty \text{ s.t. } \begin{aligned} |\operatorname{Arg}(F h^2 Z^{1-n})| &< \varepsilon \\ |\log |F|| &< \varepsilon \end{aligned}$$

(Arg は偏角のこと)

$$\exists W_0 = \left\{ 0 < w \in L^1(dm) : \forall \varepsilon > 0, \exists r, s \in L^\infty(dm), t \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) \text{ s.t. } \begin{aligned} \log w &= r + \tilde{s} + t(Z), \quad \|r\|_\infty < \varepsilon, \|s\|_\infty < \varepsilon \end{aligned} \right\}$$

を導入すると Helson-Sarason と同様に $1/\gamma$ を得る (Lemma 4 を使う)

Lemma 5. $W_0 \subset W$.

同じく Helson-Sarason と同様にして

Lemma 6. P : 三角多項式, $w_0 \in W_0$

$$\Rightarrow |P(Z)|^2 w_0 \in W.$$

この逆を示すために:

Lemma 7. $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする. $S \geq 0$ $Z^k S \in H^{\frac{1}{2}}(d\mu)$ ならば

$$\exists P(z): \text{三角多項式}, \deg P \leq k, \text{ s.t. } S = |P(Z)|^2.$$

この $k=0$ の場合は Neubergh-Neuman の $\mathcal{H}$ と $1/\gamma$ の関係 [16].

∴) 本稿の証明は, 以下の Gamelin によるものから見易いので (付録で紹介)

する. まず $S \geq \varepsilon > 0$ と (8). $\log S \in L^1(d\mu)$ ならば

$$S = |g|^2, \quad g \in H' \text{ outer}, \quad g = e^{u+i\tilde{u}} \quad \text{と書ける.}$$

$$u = \begin{cases} u & , u \geq 1 \\ 1 & , u < 1 \end{cases} \quad \text{とおく. すると } f \in H^\infty \text{ ならば}$$

$$\int Z^{k+1} \bar{g} g e^{-2(u+i\tilde{u})} f d\mu = \int Z Z^k S f e^{-2(u+i\tilde{u})} d\mu \quad (*)$$

$$Z^k S f e^{-2(u+i\tilde{u})} \in (H^{\frac{1}{2}} \times H^\infty \times H^\infty) \cap L^\infty \subset H^\infty \quad (*) \text{ により, 上の右辺} = 0.$$

$$\text{又 } g \in H' \text{ outer}, e^{-2(u+i\tilde{u})} \in H^\infty \text{ outer } (*) \text{ により } f g e^{-2(u+i\tilde{u})} \text{ の } \bar{f} \bar{g} \text{ の積分}$$

$$\text{は } f \in H^\infty \text{ と仮定と } H' \text{ の dense 性により, } f = 0$$

$$\int Z^{k+1} \bar{g} h \, d\mu = 0, \quad \forall h \in H^{\infty}.$$

従って $g \in \text{sp} \{1, Z, \dots, Z^k\}$ 上 Lemma 4 より.

すなわち, 一般に ε は, $S_{\varepsilon} = S + \varepsilon$ とおける. $\varepsilon > 0$ として

$$S_{\varepsilon} = |a_0^{\varepsilon} + \dots + a_k^{\varepsilon} Z^k|^2 = S + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0). \quad a_j^{\varepsilon} \text{ がある.}$$

又, この S_{ε} は有界に有るから, $0 < \varepsilon \leq 1$ のとき一様有界. 又

$$a_j^{\varepsilon} = \int (a_0^{\varepsilon} + \dots + a_k^{\varepsilon} Z^k) \bar{Z}^j \, d\mu \quad \text{であるから} \quad a_j^{\varepsilon} \text{ も一様有界}$$

よって, $\varepsilon \rightarrow 0$ として Lemma 8 を得る. $\star$

また Lemma 6 の逆として

Lemma 8. $w \in W \Rightarrow \exists P(z): z$ の多項式. $\exists w_0 \in W_0$ s.t.
 $w = |P(Z)|^2 w_0.$

よって $1 > \varepsilon > 0$ とする. Lemma 4 より, $\exists F \in H^{\infty}, \exists n \in \mathbb{N}$ s.t.

$$|\text{Arg}(F h^2 Z^{1-n})| < \varepsilon, \quad |\log |F|| < \varepsilon.$$

$$\Delta = -\text{Arg}(F h^2 Z^{1-n}), \quad S = F h^2 Z^{1-n} e^{-\Delta + i\Delta} \text{ とおける.}$$

$h^2 \in H^1, \quad e^{-\Delta + i\Delta} \in H^1$ である. (Hilbert 空間). したがって

$$\|\Delta\|_{\infty} < \varepsilon, \quad S \geq 0, \quad S Z^{n-1} \in H^{\frac{1}{2}}. \quad \text{よって, Lemma 7 より}$$

よって

$$S = |a_0 + a_1 Z + \dots + a_{n-1} Z^{n-1}|^2.$$

$P_0(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$ とおくと, $P_0(z) = P(z)Q(z)$; $P(z)$ は $\mathbb{R}$ の多項式で $|z|=1$ 上に根を持つ, $Q(z)$ は $\mathbb{C}$ の多項式で $|z|=1$ 上に根を持たない. と分解する. $\gamma := \gamma$, $r = -\log|F|$, $t = 2\log|Q|$ とおくと

$$|P_0(z)|^2 = |P(z)|^2 |Q(z)|^2 = S = |S| = |Fh|^2 e^{-\delta}$$

$$\therefore w = |h|^2 = |P(z)|^2 |Q(z)|^2 |F|^{-1} e^{\delta} = |P(z)|^2 \exp(r + \delta + \chi(z))$$

$$\|r\|_{\infty} < \varepsilon, \|s\|_{\infty} < \varepsilon, t \in C_{\mathbb{R}}(T).$$

後は ε の $P(z)$ が ε のとり方に無関係に ε とおき換わればよい.

よって ε_1 は $P_1(z)$, ε_2 は $P_2(z)$ の対応した ε としよ. すると,

$$\frac{|P_1(z)|^2}{w} \in L^1(d\mu), \frac{w}{|P_2(z)|^2} \in L^1(d\mu) \text{ である. } \text{よって } 1^\circ \text{ の (1)}$$

を使うと

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left| \frac{P_1(e^{i\theta})}{P_2(e^{i\theta})} \right| \frac{d\theta}{2\pi} &= \int \left| \frac{P_1(z)}{P_2(z)} \right| d\mu = \int \frac{|P_1(z)|}{w^{\frac{1}{2}}} \frac{w^{\frac{1}{2}}}{|P_2(z)|} d\mu \\ &\leq \left(\int \frac{|P_1(z)|^2}{w} d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \frac{w}{|P_2(z)|^2} d\mu \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

したがって P_1, P_2 は多項式であるから, P_1 は P_2 で割り切れる. 同様に P_2 は P_1 で割り切れる. したがって $P_1 = c P_2$, この定数 c は w の表現の $\exp \alpha$ 中の t に掛り込めるから, 上で述べた P は ε に無関係にとれる. ☆

次に W_0 の $\mathbb{R}$ を特徴付けるための準備の Lemma としよ

Lemma 9. $H^\infty + C(Z)$ は $L^\infty(d\mu)$ で closed である.

$$r_n \cap C(Z) = \{f(Z) : f \in C_c(\mathbb{T})\}.$$

証明は Rudin [13] の Theorem 1.2 の証明と同じに ϵ による δ の下界を
 ϵ だけを使って

Lemma 10. $w \in W_0 \iff \exists u, v \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) : w = \exp_0(u(Z) + iv(Z)).$

∴ (⇐) は v を v の Foundation index の Cesàro 平均 v -近似値とすればよい。

$$(\Rightarrow) f = \log w \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}, w \in W_0 \text{ r.t. } \sigma$$

$$f = v_0 + \tilde{f}, \quad v_0, \tilde{f} \in L^{\infty}_K(d\mu) \quad \text{と書ける.} \quad \text{ここで } v_0 \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上の一定関数}$$

72. $f_0 = r_0 + i\lambda_0 \in L^\infty(d\mu)$ とおくと,

$$f_0 - f = \lambda(x_0 + \lambda \tilde{x}_0) \in H', \quad w \in W_0 \text{ (2" n j)}$$

性質 $\alpha, \varepsilon > 0$ に対して $\exists r, s \in L_{\mu}^{\infty}(d\mu), \chi \in C_{\mu}(\mathbb{T})$ s.t.

$$f = v + \tilde{g} + \lambda(Z).$$

 f, z

$$f_0 - \chi(Z) = f_0 - f - i(\Delta + i\tilde{\Delta}) + (r + i\delta)$$

$$f.7 \quad f_0 - t(Z) - (r + \lambda s) = f_0 - f - i(\lambda + i\bar{\lambda}) \in H'. \quad -j \quad f_{\bar{z}}(z) \in C^{\infty}(d_1)$$

7.9.5 右邊 $\subset H^1 \cap C^0(\partial\Omega) = H^0$. $\therefore \text{dist}(f_0, H^0 + C(\bar{\Omega})) \leq \|f_0\|_{H^1(\Omega)} < 2\epsilon$.

Lemma 9.12 $f \in H^0 + C(Z)$ is closed iff $f_0 \in H^0 + C(Z)$.

$$\therefore f = f - f_0 + f_0 \in H' + C(Z).$$

$$\therefore f = g + h, \quad g \in C(Z), \quad h \in H', \quad \int h \, d\mu = 0 \quad \text{and } \mathbb{E} \gamma \neq 0.$$

f は定数値関数: $\operatorname{Im} g = -\operatorname{Im} h$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $\int h d\mu = 0$ かつ $P_2 h = (\operatorname{Im} h)^\vee$

$$\therefore f = \operatorname{Re} g + \operatorname{Re} h = \operatorname{Re} g - (\operatorname{Im} h)^{\sim} = \operatorname{Re} g + (\operatorname{Im} g)^{\sim},$$

$g \in C(\mathbb{Z})$ に対し $\operatorname{Re} g = u(\mathbb{Z})$, $\operatorname{Im} g = v(\mathbb{Z})$ となる $u, v \in C_R(\mathbb{T})$ が存在する。★

定理 2(i) の証明. Lemmas 6, 8, 10 を合わせてよい。★

3° 関連した話.

E, F を $L^2(d\mu)$ の subspace とし、 $v \in M^+(X)$ に対して

$$P(E, F; v) = \sup \left\{ \left| \int f \bar{g} dv \right| ; f \in E, g \in F, \|f\|_{L^2(dv)} \leq 1, \|g\|_{L^2(dv)} \leq 1 \right\}$$

と定義する。 $P(E, F; v) < 1$ となる E と F は v に対して positive angle を持つといわれる。これに関連して次の結果が成り立つ。

命題 3. $0 < w \in L^1(d\mu)$, $w^{-1} \in L^1(d\mu)$ とする。 $dv = w d\mu + dv_\perp$ ($0 \leq dv_\perp \perp d\mu$) のとき、

$$P(A, \bar{A}_0; dv) < 1 \iff P(A_0, \bar{A}_0; dv) < 1.$$

$\therefore (\Rightarrow)$ は明か。 $(\Leftarrow)$ となるのは Lemma 1 と (7) に対して $dv_\perp = 0$

を示せばよい。但し $dv = w d\mu$. 以下 Kolmogorov's th (2 f. 1) (14, Th 4.3.1)

$$\inf_{f, g \in A_0} \int |1 + f + \bar{g}|^2 w d\mu = \left(\int w^{-1} d\mu \right)^{-1}$$

これより、容易に

$$(5) \quad \|a\|_{L^2(dv)} \leq C \|a + f + \bar{g}\|_{L^2(dv)}, \quad \forall a \in \mathbb{C}, f, g \in A_0,$$

$\therefore C = \left(\int w^{-1} d\mu \right)^{1/2} \int w d\mu$. したがって Π を $L^2(d\mu)$ から H^2 への projection とすると, [11, Prop. 6] 及びその証明と同様に (2

Lemma 11.

$$P(A_0, \bar{A}_0; dv) < 1 \Leftrightarrow \exists K : \|\Pi u\|_{L^2(dv)} \leq K \|u\|_{L^2(dv)}, \forall u \in A_0 + \bar{A}_0$$

$$P(A, \bar{A}_0; dv) < 1 \Leftrightarrow \exists K' : \|\Pi u\|_{L^2(dv)} \leq K' \|u\|_{L^2(dv)}, \forall u \in A + \bar{A}_0$$

証明 2. 2 Lemma (2.1) $\exists K > 0$ s.t.

$$(6) \quad \|f\|_{L^2(dv)} \leq K \|f + \bar{f}\|_{L^2(dv)} \quad (f, \bar{f} \in A_0)$$

(5) (6) (2.1) $a \in \mathbb{C}, f, \bar{f} \in A_0$ to

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(dv)} &\leq K \|f + \bar{f}\|_{L^2(dv)} \leq K \{ \|a + f + \bar{f}\|_{L^2(dv)} + \|a\|_{L^2(dv)} \} \\ &\leq K \{ \|a + f + \bar{f}\|_{L^2(dv)} + C \|a + f + \bar{f}\|_{L^2(dv)} \} \\ &= K(1+C) \|a + f + \bar{f}\|_{L^2(dv)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \|f + a\|_{L^2(dv)} &\leq \|a\|_{L^2(dv)} + \|f\|_{L^2(dv)} \leq C \|a + f + \bar{f}\|_{L^2(dv)} + K(1+C) \|a + f + \bar{f}\|_{L^2(dv)} \\ &= \{C + K(1+C)\} \|a + f + \bar{f}\|_{L^2(dv)}. \end{aligned}$$

よ, 2

$$\|\Pi u\|_{L^2(dv)} \leq \{C + K(1+C)\} \|u\|_{L^2(dv)}, \forall u \in A + \bar{A}_0.$$

for Lemma 11 (2.1)

$$P(A, \bar{A}_0; dv) < 1. \star$$

命題 4. w, v は命題 7 と同じ条件.

$$P_h(v) < 1 \Leftrightarrow P_1(v) < 1 \Leftrightarrow \exists u, w \in L^\infty_{\text{loc}}(dm), \|w\|_\infty < \frac{\pi}{2} \text{ s.t. } dv = \exp(u + \tilde{w}) dm$$

∴ 定理1より $G(m) \neq \{m\}$ のときも成り立つ。又 $P_n(v) < 1 \Rightarrow P_1(v) < 1$ としても
 命. $\Rightarrow$ $d\nu = |P(Z)| \exp(r+s) d\mu$, $r, s \in L^{\infty}_\mathbb{R}(d\mu)$, $\|s\|_\infty < \frac{\pi}{2}$,
 P : 3次式 かつ $P < n-1$.

従って $\frac{1}{|P(Z)|^2} \exp(-cr+s) \in L^1(d\mu)$. 又 $r, s \in L^\infty$ より

$\exp(r+s) \in L^1(d\mu)$. 故に $\frac{1}{|P(Z)|^2} \in L^{\frac{1}{2}}(d\mu)$. よって

$\frac{1}{P(Z)} \in L^1(d\mu)$. 1. a(1)より $\frac{1}{P(e^{i\theta})} \in L^1(\mathbb{T})$ より $P(\neq)$ は

$|z|=1$ 上に零点を持たない。故に $\log |P(Z)|^2 \in L^\infty_\mathbb{R}$, 7より

これは上の r に割り当てられ, 7より 定理(iii) $n=1$ の場合に より

$P(v) < 1$. ★

4°. 今7の証明の適用で主として具体的な例として 2次元定常破砕過程を
 挙げておこう。よく知られている例 2つある。

(Ω, Σ, P) を破砕空間といふ, $X_{nh} (n, h \in \mathbb{Z})$ を 2次元定常破砕
 過程とすると, $\mu \in M^+(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$ かつ

$$(X_{nh}, X_{00}) = \iint e^{-in\theta} e^{-ih\phi} d\mu$$

これより $X_{nh} \longleftrightarrow e^{-in\theta} e^{-ih\phi} \rightarrow \{X_{nh} : n, h \in \mathbb{Z}\} \subset L^2(dP)$ と
 $L^2(d\mu)$ の isometry を与える。

(i) α : 変換群として $A_\alpha(G) \in \{e^{-in\theta} e^{-ih\phi} : n, h \geq 0\}$ 7より

これは uniform algebra と呼ばれ $G = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ の Haar measure $\frac{d\theta}{2\pi} \times \frac{d\phi}{2\pi}$ かつ

nonzero complex homomorphism を定めた。この場合 Gleason part は
 証明 2 であるが、証明 1 の適用でよい。

(ii) $A(G) \subset \{e^{i n \theta} e^{i m \phi} : (n, m) \in \{n > 0\} \cup \{(0, k) : k \geq 0\}\}$
 である uniform algebra である。この場合 $\mathbb{D}$ 上の nonzero
 complex homomorphism を定め、この Gleason part は non-
 trivial である。この場合 Warner の embedding function は $e^{i \phi}$ であり
 $A_0^u = e^{i n \phi} A(G)$ である。証明 2 等も適用でよい。

参考文献

- [1] A. Devinatz, Toeplitz operators on H^2 , T.A.M.S. 112 (1964), 304-317.
- [2] ———, Conjugate function theorems for Dirichlet algebras,
 Rev. Univ. Mat. Argentina, 23 (1966/67), 3-30.
- [3] T.W. Gamelin, H^p spaces and extremal functions in H^1 , TAMS,
124 (1966), 158-167.
- [4] ———, Uniform algebras, Prentice Hall, 1969.
- [5] H. Helson, Méthodes complexes et méthodes de Hilbert en
 analyse de Fourier, Orsay, 1967.
- [6] H. Helson and D. Sarason, Past and Future, Math. Scand.
21 (1967), 5-16.
- [7] H. Helson and G. Szegő, A problem in prediction theory, Ann.
 Mat. Pura Appl. II (1960), 107-138.

- [8] I. I. Hirschmann, Jr and R. Rochberg, Conjugate function theory in weak* Dirichlet algebras, *J. Functional Anal.* 16 (1974), 359-371.
- [9] S. Merrill, III, Gleason part and ϵ problem in prediction theory, *Math. Z.* 122 (1972), 221-229.
- [10] T. Nakazi, Invariant subspaces of weak* Dirichlet algebras, *Pacific J. Math.* 69 (1977), 151-167.
- [11] Y. Ohno, Remarks on Helson-Szegő problems, *Tsukuba Math. J.* 14 (1966), 54-59.
- [12] ———, Helson-Szegő-Sarason theorem for Dirichlet algebras, to appear in *T. M. J.* 31 (1979).
- [13] W. Rudin, Spaces of type $H^{\infty} + C$, *Ann. Inst. Fourier*, 25 (1975), 95-125.
- [14] D. Sarason, An addendum to "Past and Future", *Math. Scand.* 20 (1972), 82-84.
- [15] T. P. Srinivasan and J. K. Wang, Weak* Dirichlet algebras, *Function algebras* (Tulane, 1965), Scott Foresman, 1966, 216-249.
- [16] K. Yabate, A note on extremum problems on abstract Hardy spaces, *Mich. Math. J.* 23 (1976), 54-57.
- [17] ———, On bounded functions in the abstract Hardy space theory II, *Tsukuba Math. J.* 26 (1974), 513-523.