

Picard群に自明に作用するK3曲面の自己同型

東京電機大学・理工 金銅誠之

§0. はじめに

K3曲面に自己同型として作用する有限群は、Torelli型定理[6]によつて、K3曲面上の到る所消えない holomorphic 2-form に自明に作用する部分群と Picard 群に自明に作用する部分群の extension として記述される。前者の部分群は、Nikulin [3], 向井 [5] によつて完全に分類されている。

ここでは、後者の Picard 群に自明に作用する部分群を問題とする。Nikulin [3] により、この部分群は巡回群と^{こと}なるが、知られており、また Vorontsov [10] による円分体との関連した研究がある。本論では、楕円曲面の理論を用いることで、Picard 群に自明に作用する K3 曲面の分類と、その具体的構成を与えることも目標とする。

§1. K3曲面の自己同型

この節では、K3曲面の自己同型に関する知られている結

果、及び得られた結果を述べる。

定義 2次元コンパクト連結複素多様体 X は次の2条件

(i) $K_X \sim 0$ (K_X : X の標準束), (ii) $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ を満たす時、K3曲面 と呼ばれる。

$H^2(X, \mathbb{Z})$ 上には cup 積 $\langle, \rangle$ により, 2 symmetric bilinear form の構造がはいるが、以後、これを lattice と呼ぶ。 X の Picard 群を S_X で表わすと、条件(ii)より S_X には $(H^2(X, \mathbb{Z}), \langle, \rangle)$ の sublattice の構造がはいる。 S_X を algebraic lattice と呼ぶ。また S_X の $\langle, \rangle$ に関する直交補空間を T_X で表わし、transcendental lattice と呼ぶ。 Torelli 型定理より次の従う:

命題1. X の自己同型群を $\text{Aut}(X)$ と表わすとき、 $\text{Aut}(X)$ の $S_X \oplus T_X$ 上への自然な作用により、 $\text{Aut}(X) \hookrightarrow O(S_X) \times O(T_X)$ と見ることができ。但し $O(S_X), O(T_X)$ は、それぞれ cup 積を保つ $\mathbb{Z}$ -module S_X, T_X の同型全体より成る群とする。

$\text{Ker} \{ \text{Aut}(X) \rightarrow O(T_X) \}$ に含まれる自己同型を symplectic automorphism と呼ぶ。有限 symplectic automorphism group は、Abel 群の場合、Nikulin [3] が、一般の場合、向井氏 [5] が分類を与えている。

以下、 $H_X := \text{Ker} \{ \text{Aut}(X) \rightarrow O(S_X) \}$ を問題とする。

命題 2 ([3]). (i) X が algebraic の場合, H_X は有限巡回群。

(ii) X が non-algebraic の場合, H_X の各元は、無限位数である。

上の命題より有限群の問題にする限り X は algebraic と仮定しよ。

命題 3 ([3]). $m_X := |H_X|$ とする。この時, $\varphi(m_X) \mid \text{rank } T_X$, ここで $\varphi(\cdot)$ は Euler 関数を表す。更に $\mathbb{Q}$ 上の表現 $H_X \rightarrow O(T_X \otimes \mathbb{Q})$ は、巡回群 $\mathbb{Q}/m_X$ の $\mathbb{Q}$ 上の既約表現で、non-trivial な fixed vector をもたないものの直和と同型である。また、 $H_X = \langle g \rangle$, $\omega_X \in X$ 上の non-zero holomorphic 2-form とすると $g^* \omega_X = e_{m_X} \omega_X$, 但し、 e_{m_X} は 1 の原始 m_X 乗根である。

系 4 ([3]). $m_X \leq 66$.

系 4 は、 $\text{rank } T_X \leq \text{rank } H^2(X, \mathbb{Z}) - 1 = 22 - 1 = 21$ に注意すれば、命題 3 より従う。

定理. S_X が unimodular (i.e. $|\text{discr } S_X| = 1$) と仮定する。

この時、

(i) $m_X \mid 66, 44, 42, 36, 28$ or 12 。

(ii) $m = 66, 44, 42, 36, 28$ or 12 とする。この時、 $m_X = m$

を満たす algebraic K3 曲面が同型を除いて一意的存在する。

注意 1. Vorontsov は、[10] の中で、上記定理の (i) 及び、 S_x が non-unimodular の場合の (ii), (iii) にあたる結果を主張している。彼は、円分体 $\mathbb{Q}(m_x)$ の理論を用いている (証明は publish されていない)。

注意 2. 上記定理 (iii) においては、我々は具体的に K3 曲面を構成することと存在を証明している。また、 S_x が non-unimodular の場合も、具体的構成を与えることができる。

§ 2. 例

(I) S_x が unimodular の場合.

以下、 e_ν は 1 の原始 ν 乗根とする。

1°) $m_x = 66$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 - u \prod_{i=1}^{11} (u - e_{11}^i) \\ g: (x, y, u) \longmapsto (e_{66}^2 x, e_{66}^3 y, e_{66}^6 u) \end{cases}$$

$\Delta = u^2 \prod (u - e_{11}^i)^2$ とする。 $\Delta = 0$ i.e. $u = 0, u^{11} = 1$ 上で.

II 型 singular fibre を持つ楕円曲面である。 $u = \infty$ 上では、

$\text{ord}_{u=\infty}(\Delta) = \text{order}_{u=\infty} \left(1/(1/u)^2 \cdot 1/(1/u)^{22} \cdot \prod (1 - e_{11}^i(1/u))^2 \right) = -24 \equiv 0 \pmod{12}$ より、smooth fibre である。構成方法より、

$h^1(\mathcal{O}_X) = 0$ であり、 $c_2(X) = 12 \times e(\Pi) = 24$ である。X は K3 曲面 である。但し、 $e(T)$ は、T 型 singular fibre の topological Euler 数 Σ を表わす。fibre の コホモロジ-類 と、section の コホモロジ-類 が $S_X \in$ 生成し、 X の 交点行列 は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる S_X は、unimodular である。以後、lattice $(\mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) \in U$ と表わす。

$$2^\circ) m_X = 44$$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + x + t^{11} \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_{44}^{22} x, e_{44}^{11} y, e_{44}^2 t) \end{cases}$$

$t = \infty$ 上 Π 型 singular fibre, $t^{22} = -\frac{4}{27}$ 上 I_1 型 singular fibre を持つ。楕円 K3 曲面 X で、 S_X は、section と fibre の コホモロジ-類 で生成される。

$$3^\circ) m_X = 42$$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 - u^5 \prod_{i=1}^7 (u - e_i^7) \\ g: (x, y, u) \mapsto (e_{42}^{10} x, e_{42}^{15} y, e_{42}^6 z) \end{cases}$$

$u = 0$ 上 Π^* 型 singular fibre, $u^7 = 1$ 上 Π 型の singular fibre を持つ楕円 K3 曲面 X で、 S_X は、section, general fibre 及び Π^* 型 singular fibre の components で生成される $S_X \cong U \oplus E_8$ である。但し、 E_8 は、negative definite, rank=8, even, unimodular

lattice τ 、交点行列は、 E_8 型の Dynkin matrix τ である。

$$4^\circ) m_x = 36$$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 - u^5 \prod_{i=1}^6 (u - e_6^i) \\ g: (x, y, u) \mapsto (e_{36}^2 x, e_{36}^3 y, e_{36}^{30} u) \end{cases}$$

$u=0$ 上 II^* 型 singular fibre, $u=\infty, u^6=1$ 上 II 型 singular fibre

を持つ楕円 K3 曲面 τ $S_x \cong U \oplus E_8$ 。

$$5^\circ) m_x = 28$$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + x + t^7 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_{28}^{14} x, e_{28}^7 y, e_{28}^2 t) \end{cases}$$

$t=\infty$ 上 II^* 型 singular fibre, $t^{14} = -\frac{4}{27}$ 上 I_1 型 singular fibre

を持つ楕円 K3 曲面 τ $S_x \cong U \oplus E_8$ 。

$$6^\circ) m_x = 12$$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 - u^5(u-1)(u+1) \\ g: (x, y, u) \mapsto (e_{12}^2 x, e_{12}^3 y, -u) \end{cases}$$

$u=0, \infty$ 上、 II^* 型 singular fibre, $u=\pm 1$ 上 II 型 singular fibre

を持つ楕円 K3 曲面 τ $S_x \cong U \oplus E_8 \oplus E_8$ 。

注意 以上の楕円 K3 曲面はすべて section をもち、 χ の Mordell-Weil rank は 0 である。更に、 χ 上の 非特異 有理曲線は、section (unique) と reducible singular fibre の component に限ることも示すことができる。

(II) S_X が non-unimodular の場合。

この場合、§3 で示すか、 $m_X = 2^k$ ($1 \leq k \leq 4$), 3^ℓ ($1 \leq \ell \leq 3$), 5, 5^2 , 7, 11, 13, 17, 19 が起り得る。

1°) $m_X = 19$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^7 x + 1 \\ \varphi: (x, y, t) \mapsto (e_{19}^7 x, e_{19}^2 y, e_{19}^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 II 型 singular fibre, $t=\infty$ 上 III 型 singular fibre,

$t^{19} = (-\frac{4}{27})^{-1}$ 上 I_1 型 singular fibre をもつ楕円 K3 曲面 Z 。

χ の Mordell-Weil rank = 1, $\text{rk} S_X = 4$ 。

2°) $m_X = 17$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^7 x + t^2 \\ \varphi: (x, y, t) \mapsto (e_{17}^7 x, e_{17}^2 y, e_{17}^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 IV 型, $t=\infty$ 上 III 型, χ の他 17 個の I_1 型 singular fibre E

をもつ楕円 K3 曲面 Z Mordell-Weil rank = 1, $\text{rk} S_X = 6$ 。

$$3^0) \quad m_x = 13$$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^5 x + t \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_{13}^5 x, e_{13} y, e_{13}^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 II 型, $t=\infty$ 上 III* 型, k の他 13 個の I_1 型 singular fibre Σ も楕円 K3 曲面で, Mordell-Weil rank = 1, rk $S_X = 10$.

$$3^0)' \quad m_x = 13$$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t x + t^8 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_{13}^7 x, e_{13}^4 y, e_{13} t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 III 型, $t=\infty$ 上 IV* 型, k の他 13 個の I_1 型 singular fibre Σ も楕円 K3 曲面で, Mordell-Weil rank = 1, rk $S_X = 10$.

$$4^0) \quad m_x = 11$$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^5 x + t^2 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_{11}^5 x, e_{11}^2 y, e_{11} t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 IV 型, $t=\infty$ 上 III* 型, k の他 11 個の I_1 型 singular fibre Σ も楕円 K3 曲面で, Mordell-Weil rank = 1, rk $S_X = 12$.

$$5^0) \quad m_x = 7 \quad \begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^3 x + t^8 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_7^3 x, e_7 y, e_7^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 III* 型, $t=\infty$ 上 IV*, k の他 7 個の I_1 型 singular fibre

Σ を持つ楕円 K3 曲面 Z : Mordell-Weil rank = 1, $\text{rk } S_X = 16$ 。

$$6^\circ) \quad m_X = 5$$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^3 x + t^7 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_5^3 x, e_5^2 y, e_5^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 II^* 型, $t=\infty$ 上 IV^* 型, k の他 5 個の I_1 型 singular fibre

Σ を持つ楕円 K3 曲面 Z : Mordell-Weil rank = 1, $\text{rk } S_X = 1$ 。

$$7^\circ) \quad m_X = 3^2$$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^5 x + t^3 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_9^5 x, e_9^3 y, e_9^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 I_0^* 型, $t=\infty$ 上 III^* 型, k の他 9 個の I_1 型 singular

fibre Σ を持つ楕円 K3 曲面 Z : Mordell-Weil rank = 3, $\text{rk } S_X = 16$ 。

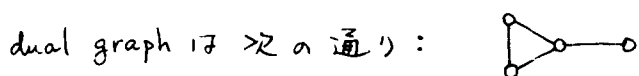
$$8^\circ) \quad m_X = 3^3$$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + u \prod_{v=1}^9 (u - e_{27}^{3v}) \\ g: (x, y, u) \mapsto (e_{27}^2 x, e_{27}^3 y, e_{27}^6 u) \end{cases}$$

$u=0, u^9=1$ 上 Z の II 型 singular fibre, $u=\infty$ 上 Z の IV 型 singular

fibre Σ を持つ楕円 K3 曲面 Z : Mordell-Weil rank = 0。 g は、到り所消えたい X 上の holomorphic 2-form に 1 の 27 乗根 (原始) で作用してあり、 $\varphi(3^3) = 18$ より $\text{rk } S_X = 22 - \text{rk } T_X = 22 - 18 = 4$ 。更に、 S_X は、

楕円曲面の unique section と IV 型 singular fibre の component から生成されることがわかる。X 上の smooth rational curves の dual graph は次の通り:



この diagram の symmetry が $\mathbb{Z}/2$ であることから、 g は S_X に自明に作用することが解る。

$$9^\circ) m_X = 3$$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 - u^5(u-1)^5(u+1)^2 \\ g: (x, y, u) \mapsto (u^3x, y, u) \end{cases}$$

$u=0, 1$ 上で II^* 型, $u=-1$ 上で IV 型 singular fibre を持つ楕円 K3 曲面で unique section を持つ。

$$10^\circ) m_X = 5^2$$

この場合、 $\varphi(5^2) = 20$ で、 $\text{rk } S_X = 22 - \text{rk } T_X = 2$ 。§ 3, 補題 9 より S_X の discriminant group は $\mathbb{Z}/5$ or $\mathbb{Z}/5^2$ 。ところが、indefinite symmetric bilinear form の reduction を用いることで $S_X \cong (\mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix})$ or $(\mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix})$ が解り、 S_X が not represent zero (i.e. $\nexists c \in S_X$ with $c^2 = 0$) が直接確かめられる。従って、 $m_X = 5^2$ の自己同型をもつ K3 曲面は、楕円曲面の構造をもたない。この場合、 $\mathbb{P}^2$ の分岐被覆として、例を構成する。

$\mathbb{P}^2 \supset C := \{x_0^6 + x_0 x_1^5 + x_1 x_2^5 = 0\}$ とすると、 C は非特異。

$g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_{25}^5 & \\ & & e_{25}^4 \end{pmatrix}$ は、 C に invariant にもつ transformation。

X を $\mathbb{P}^2$ の C で分岐する二重被覆とすると、 X は K3 曲面で g の lifting が、求めるものである。

§3. Picard 群に自明に作用する自己同型

この節では、二次形式論、楕円曲面論を用いて、Picard 群に自明に作用する自己同型を分類する。前半(I)で S_X が unimodular の場合を、後半(II)で S_X が non-unimodular の場合を扱う。

(I) S_X が unimodular の場合

補題5. $S_X : \text{unimodular} \Rightarrow S_X \cong U, U \oplus E_8 \text{ or } U \oplus E_8 \oplus E_8$,
但し、 $U = (\mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$, E_8 は negative definite unimodular lattice で
交点行列は E_8 型 Dynkin matrix に対応するものとする。

証明. S_X が even (i.e. $\forall x \in S_X, x^2 = \langle x, x \rangle \equiv 0 \pmod{2}$), 且
indefinite (by Hodge index thm) に注意すると、[7] より従う。

補題 6. $S_X : \text{unimodular} \Rightarrow \exists \pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ elliptic pencil
with a section s.t. π は II^* 型 singular fibre だけ $\in$ reducible
singular fibre として持つ。

証明. 補題 5 より. S_X は represent zero. さら $[6]$, §3. Cor. 3
より X は 楕円曲面の構造をもつ. S_X が $U \in$ component として
もつことから. この楕円曲面は section をもつことが解る. 更に.
fibre に 直交する singular fibre の components に対応する 交点行列
(と section) が E_8 or $E_8 \oplus E_8$ であることから. reducible fibre
は II^* 型に限ることが従う。

§1 で述べた定理は. より正確に次の形で述べられる:

定理 7. (i) $S_X \cong U \Rightarrow m_X \mid 66, 44 \text{ or } 12$. 更に $q(m_X) = \text{rk } T_X$
 $= 20$ ならば $m_X = 66$ or 44 .

(ii) $S_X \cong U \oplus E_8 \Rightarrow m_X \mid 42, 36 \text{ or } 28$.

(iii) $S_X \cong U \oplus E_8 \oplus E_8 \Rightarrow m_X \mid 12$.

証明. (i), (ii), (iii) も同様であるので. ここでは. 一番.
複雑な (i) の場合と証明する。

補題 6 の elliptic pencil $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ とする. この場合,

$S_X \cong U$ より, π の singular fibre はすべて既約で, I_1 型と II 型のみが現われる。今, r, Δ でそれぞれ I_1 型, II 型の singular fibre の個数を表わすと次が成り立つ:

$$24 = \text{Euler number of } X = \sum_{F: \text{ singular fibre}} \text{euler number of } F.$$

I_1 型, II 型の singular fibre の Euler 数は, それぞれ 1, 2 であるから

$$2\Delta + r = 24$$

を得る。 Δ, r の可能性は次の通り:

Δ	12	Δ	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
r	0	r	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24

一方, $q(m_X) \mid \text{rank } T_X = 20$ より $5 \mid m_X, 8 \mid m_X$ を示せば (A) の前半が証明される。

(A) $m_X \neq 25$: S_X に自明に作用する自己同型は section を保つから, fibre Λ の作用は, 6 or 4 の約数と位数にもつ。従って, $25 \mid m_X$ ならば section に order 25 で作用するが, 上記表より, その様な作用は不可能。 $\therefore m_X$ は 25 で割り切れない。

(B) $5 \mid m_X$ とする。 $g \in H_X$ で $|g| = 5$ とすると, (A) と同様に, g は section に位数 5 で作用し, 上記表より,

$$(\Delta, r) = (12, 0), (7, 10) \text{ or } (2, 20)$$

しか起り得ない。いずれの場合も, g の固定点に, II 型 singular

fibre 上にある。従って, fixed curve があれば, k の Euler 数は, $\mathbb{Z}$ であることに注意し, Lefschetz fixed pt. formula (cf. [9]) を適用すると

$$\begin{aligned} 0 &\leq \# \text{ isolated fixed pts.} + \text{fixed curves の Euler 数} \\ &= \sum \text{trace } g^* | H^i(X, \mathbb{Q}) = 2 + \text{trace } g^* | S_{X \otimes \mathbb{Q}} + \text{trace } g^* | T_{X \otimes \mathbb{Q}} \\ &= 2 + 2 + \frac{(-20)}{4} = -1 \end{aligned}$$

となり矛盾を得る (最後の $\text{trace } g^* | T_{X \otimes \mathbb{Q}} = -5$ は, $g^* | T_{X \otimes \mathbb{Q}}$ が $\mathbb{Z}/5$ の fixed vector をもたない $\mathbb{Q}$ 上の irred. representation の直和となることから従う)。

(C) $8 | m_X$ と仮定する。 $\leftarrow g \in H_X, 181=8 \text{ ではない。}$ もし g が base に位数 2 で作用すると, g^2 は fibre に位数 4 の倍数で作用する。ところが, singular fibre は I_1 型, II 型 だけであるので, この様なことは起らない。よって, g は base に位数 8 または 4 で作用し, 上記表より, $(\Delta, r) = (12, 0), (10, 4), (8, 8), (6, 12), (4, 16), (2, 20) \text{ or } (0, 24)$ が起り得る。

Claim 1 g は base に位数 8 で作用できない。

☺ g が base に位数 8 で作用していると, $(r, \Delta) = (8, 8) \text{ or } (24, 0)$. g^4 は base に位数 2 で作用し, g^4 の invariant は 2 つの fibre は, 共に smooth elliptic curve. g^4 の fixed points は この 2 つの fibre 上にあり, (B) と同様にして, Lefschetz fixed pts. formula より

$$0 \leq \# \text{isolated fixed points of } g^4 + \sum \text{Euler number of fixed curves of } g^4 \\ = 2 + 2 - 20 = -16$$

で矛盾を得る。

よって 2. g は base に位数 4 で作用しているとしてよい。

(α) $(A, r) = (12, 0), (8, 8), (4, 16), (0, 24)$ の場合. g が

invariant に保つ 2 つの fibre は共に smooth elliptic curve である。

g は non-zero holomorphic form に 1 の原始 8 乗根で作用するので、 g の section (base) 上の fixed pts. の tangent space への作用を考えると、上記の smooth elliptic curve には、位数 8 で作用することになり矛盾を得る。

(β) $(A, r) = (10, 4), (6, 12), (2, 20)$ の場合. $L = g^4$ とおく。
 $L|_{S_x} = 1_{S_x}$, $L|_{T_x} = -1_{T_x}$. Nikulin の定理 ([4], Thm. 4.2.2.) より、 L の fixed pts set は

$$C + E, \quad C \text{ は genus } 10 \text{ の smooth curve, } E \cong \mathbb{P}^1 (\text{section})$$

である。 g は base に位数 4 で作用しているから、 $|g|C| = 4$ が従う。更に g の C 上の fixed points は g の invariant fibre との交点、すなわち、2 つの II 型 singular fibre と C との交点である。この II 型 singular fibre と E は、一点で交わっているから、 C と II 型 singular fibre は 1 点 (重複度をもつ) で交わらなければならない。

実際、そうではないとすると、このII型 singular fibre が、 L の fixed curve にたまってしまふ。以上から g の C 上の fixed points は丁度2個 (g^2 の fixed pts も変らない) で、その ramification index は4であることが従う。 C と g に Hurwitz の公式を適用すると

$$18 = 2g(C) - 2 = 4(2g(C/\langle g \rangle) - 2) + (4-1) \times 2$$

で矛盾を得る。

注意(1) $m_x = 66$ ならば $(A, r) = (12, 0)$ である。実際、 g は base に位数11の倍数で作用するが、上記表より、general fibre は、位数3の自己同型(固定点をもつ)をもたねばならず、 I_1 型 singular fibre は現われない。

(11) $m_x = 44$ ならば $(A, r) = (1, 22)$ である。実際、general fibre は、位数4の固定点をもつ自己同型をもたないから、上記表より、 g は base 上 ^{order}22 で作用し、 $(A, r) = (1, 22)$ or $(0, 24)$ である。この場合、(β) と全く同様の議論で Hurwitz の公式より矛盾を導かれる。もし $(A, r) = (0, 24)$ ならば

また、 $m_x = 42$ ならば $(A, r) = (7, 0)$ 、 $m_x = 36$ ならば $(A, r) = (7, 0)$ 、 $m_x = 28$ ならば $(A, r) = (0, 14)$ 、 $m_x = 12$ ならば $(A, r) = (2, 0)$ が成り立つ。

(II) S_x が non-unimodular な場合:

まず lattice についての準備とする。

$M \in \text{lattice}$ (i.e. non-degenerate symmetric bilinear form) とする。 M が non-degenerate であることから、 M から $M^* := \text{Hom}(M, \mathbb{Z})$ への自然な map は単射となる。 $A_M := M^*/M$ とおくと、 A_M は finite abelian group になる。 M が unimodular であることと $A_M = \{1\}$ であることは同値となる。

S_x, T_x は unimodular lattice $H^2(X, \mathbb{Z})$ の sublattice で互いに直交していることから $A_{S_x} \cong A_{T_x}$ が従う。 次の補題が成り立つ。

補題 8. $g \in H_x$ とすると g^* は A_{T_x} に自明に作用する。

補題 9. ([10], Thm. 4) $A_{S_x} \neq \{1\}$, $m_x = |H_x|$ とする。

(i) $m_x = p^l$ for some prime p .

(ii) A_{S_x} は p -elementary abelian group.

証明. $p \mid m_x$ なる prime $p \in \mathbb{Z}$ 一つ固定する。 $g \in H_x$ で $|g| = p$ なるものを選ぶ。 $\forall x^* \in T_x^*$ に対し

$$x^* + g^*(x^*) + \cdots + (g^{p-1})^*(x^*)$$

は $T_x \otimes \mathbb{Q}$ の中の g^* -invariant vector。 g^* は $T_x \otimes \mathbb{Q}$ 上、non-trivial な vector をもたないから (命題 3 参照)。

$x^* + g^*(x^*) + \cdots + (g^{p-1})^*(x^*) = 0$ 。他方、補題 8 より、 g^* は、 A_{T_x} に自明に作用しているから、

$$x^* + g^*(x^*) + \cdots + (g^{p-1})^*(x^*) \equiv px^* \pmod{T_x}。$$

以上より

$$px^* \equiv 0 \pmod{T_x}。$$

よって、 A_{T_x} は p -elementary であり、 $m_x = p^l$ とわかる。

補題 10. ([10], Thm. 4)、 $l(T_x)$ は、 $\delta, 2$ 、 A_{T_x} の minimal generator の個数 を表わす。このとき

$$l(T_x) \leq \frac{\text{rank } T_x}{\varphi(m_x)}$$

が成り立つ。

系 11. $A_{S_x} \cong A_{T_x} + \{1\} \Rightarrow m_x = 2^k (1 \leq k \leq 4), 3^l (1 \leq l \leq 3), 5, 5^2, 7, 11, 13, 17 \text{ or } 19$ 。

証明. 補題 9, 及び $\varphi(m_x) \mid \text{rank } T_x$, $\text{rank } T_x \leq 21$ より、 m_x は上のいずれか。もしくは $m_x = 2^5$ が従う。 $m_x = 2^5$ とすると、 $\varphi(m_x) = 2^4$ より、 $\text{rank } T_x = 16$ 。補題 10 より、 $l(T_x) = 1$ 。このとき、 $\text{rank } S_x = 6$, $l(S_x) = 1$, S_x : 2-elementary lattice (i.e. A_{S_x} : 2-elementary) である。この時、Nikulin の定理 ([4], Thm. 4.3.2)、 $\text{rank } S_x + l(S_x) \equiv 0 \pmod{2}$ に反する。

§ 4. 一意性について

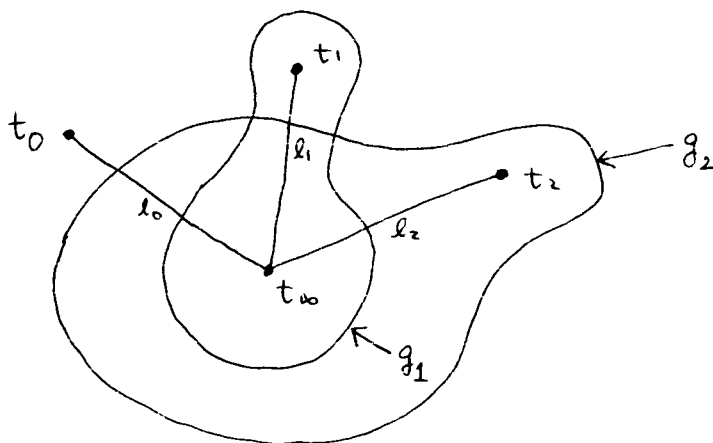
以下、 S_X は unimodular と仮定する。このとき、 $H^2(X, \mathbb{Z})$ は S_X と T_X の直和になる。まず次を示す。

補題 12. $X, Y \in$ algebraic K3 surfaces で $|H_X| = |H_Y| = m$, 且 $g(m) = \text{rank } T_X (= \text{rank } T_Y)$ とする。 $H_X = \langle g \rangle$, $H_Y = \langle h \rangle$ とする。このとき、cup 積を保つ $\mathbb{Z}$ -module の同型 $\psi: H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(Y, \mathbb{Z})$ で次を満たすものが存在する:

- ① $\psi(S_X) = S_Y$, $\psi(T_X) = T_Y$,
- ② ψ は effective divisor の class を保つ,
- ③ $\psi \circ g^* = h^* \circ \psi$.

証明. § 3, (I) の最後の注意より、 X, Y には、共に、同じ型の singular fibres を持つ楕円曲面の構造が入る。 S_X, S_Y はそれぞれ、この elliptic pencil の section と singular fibre の components, 及び general fibre の class で生成されている。更に X, Y 上の非特異有理曲線は、これらに限られることも解り。③ を満たす同型 $S_X \xrightarrow{\sim} S_Y$ が存在する。 g, h は、この elliptic pencil の作用の仕方から、 T_X, T_Y の base の singular fibre の vanishing cycles を用いて記述できる。十分である。今、 $S_X \cong U \oplus E_+ \oplus E_-$, $T_X \cong U \oplus U$, $m_X = 12$ の場合と、

証明する。 $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{C}$ の elliptic pencil とし、 t_0, t_∞ 上で II^* 型 singular fibres, t_1, t_2 上で II 型 singular fibres とする。今、 t_∞ から t_i への path l_i ($i=0, 1, 2$) とし、下図の様な closed path g_i ($i=1, 2$) を考える:



今、 π の general fibre F の $H^1(F, \mathbb{Z})$ の base $\in \{\gamma_1, \gamma_2\}$ とする。 t_1, t_2 (resp. t_0, t_∞) の周りで π の monodromy が $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$) であることを注意すると g_1 に沿って γ_2 が動かすと、closed 2-cycle ができる。これを G_1 で表す。同様に、 $(-g_1)$ に沿って γ_1 が、 g_2 に沿って γ_2 が、 $(-g_2)$ に沿って γ_1 が動かして、できる closed 2-cycles $\in$ 。それぞれ、 G_2, G_3, G_4 で表す。但し $(-g_i)$ は、 g_i の逆向きである。 $\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ の交点行列は、

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となり、これを T_X の base とする。

一意性の証明

補題12と同じ記号の下で考える。必要ならば、 ℓ^k を考え直すことで、 g, ℓ は non-zero holomorphic 2-forms ω_X, ω_Y にそれぞれ $e^{\frac{2\pi i}{T^2}}$ で作用しているとしてよい。 ω_X, ω_Y が、 g^*, ℓ^* の固有 vector (一次元固有空間) であるから、 $\Psi^* \omega_X = \lambda \omega_Y$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ が直り立つ。Torelli 型定理より、 Ψ は同型写像 $Y \xrightarrow{\sim} X$ より引き起こされている。

注意 S_X が non-unimodular の場合、§2, (II), $3^\circ, 3'^\circ$ の様に、与える singular fibre を持つ楕円曲面で、同じ位数の、自己同型をもつ K3 曲面が存在し、上の方法は直接適用はできない。Vorontsov [10] の結果 (§1, 注意1 参照) を認めれば、 S_X が non-unimodular の場合も、§2 の例に限ることが解る。

最後に、 $m_X = 66$ の K3 曲面は、私以外にも、independent に、Dolgachev 氏、塩田徹治氏、斎藤恭司氏が構成していることを注意しておく。

参考文献

- [1] K. Kodaira , On compact analytic surfaces, II-III, Ann. of Math., 77 (1963), 563-626 ; 78 (1963), 1-40.
- [2] S. Kondō , On automorphisms of algebraic K3 surfaces which act trivially on Picard groups, Proc. Japan Acad. Vol.62, Ser.A (1986), 356-359 .
- [3] V.V. Nikulin , Finite automorphism groups of Kähler surfaces of type K3 , Proc. Moscow Math. Soc. 38 (1979), 75-137.
- [4] V.V. Nikulin , On the quotient groups of the automorphism group of hyperbolic forms by the subgroups generated by 2-reflections, J Soviet Math. 22 (1983), 1401-1476.
- [5] S. Mukai , preprint (1985)
- [6] I. Piatetskii-Shapiro , I.R. Shafarevich , A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3 , Math. USSR-Izv. 35 (1971), 530-572.
- [7] J.P. Serre , A course in arithmetics , Springer .
- [8] K. Shiga , One attempt to the K3 modular function II, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa , Cl. Sci, (4), 8, no.1, 157-182 (1981)
- [9] K. Ueno , A remark on automorphisms of Enriques surfaces , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo , vol.23, no.1 (1976), 149-165 .
- [10] S.P. Vorontsov , Automorphisms of even lattices that arise in connection with automorphisms of alg. K3 surfaces, Vestnik Mosk. Univ. Matematika , 38, 19-21 (1983).