

Teichmüller空間の de Rham 複体への Fenchel-Nielsen flow の作用

東大理 河澄響矢 (Nariya Kawazumi)

種数 g の compact Riemann 面の moduli 空間 M_g ($g \geq 2$) の実 cohomology 環 $H^*(M_g; \mathbb{R})$ は種数 g の閉曲面 Σ_g を fiber とする fiber 束の実特性類の全体と一致し、重要な対象である。moduli 空間 M_g が、種数 g compact Riemann 面の Teichmüller 空間 T_g を曲面 Σ_g の写像類群 $\mathcal{M}_g$ の自然な作用によって割った商空間であること思い出す:

$$M_g = T_g / \mathcal{M}_g$$

他方、写像類群と算術群の類似性 (及び相違) は Harer 等によって様々に述べられている。この話は、それらや、粗雑な形で推し進めたものである。

C^∞ 多様体 M について、 M 上の C^∞ 微分形式全体の可換複体、即ち M の de Rham 複体を $\Omega^*(M)$ で表すことにする。

算術群 Γ の場合、 Γ を離散部分群として含む半単純 Lie 群 G とその極大 compact 群 K について包含準同型

$$H^*(\Omega^*(G/K)^G) \rightarrow H^*(\Omega^*(G/K)^\Gamma) = H^*(\Gamma \backslash G/K)$$

を考えると、これが * 充分小で同型となり、 $SL(\infty, \mathbb{Z})$,
 $Sp(2\infty, \mathbb{Z})$ などの実 cohomology が求まったのであった。(松島
 村上 [Ma] Borel [B])

これを写像類群 M_g についても考えた。

Dehn-Lickorish により、写像類群 M_g は Dehn twist に
 よって生成されている。Dehn twist を、「角 θ , $\theta \in \mathbb{R}$, で止
 める」ことにより得られる Teichmüller 空間 T_g 上の flow が
 Fenchel-Nielsen flow である。よって Fenchel-Nielsen
 flow 全体の生成する T_g の変換群を FN と書くと、群 FN は
 写像類群 M_g を「離散的に」含む「連続な」群となる。また、
 群 FN は T_g に推移的に作用する。(cf. [AG] pp 138-141. 尚、
 FN それ自身の性質はほとんど不明である。)(種数 1 の場合、
 同様の構成を行うと、 $M_1 = SL(2, \mathbb{Z})$ に対し、 $FN = SL(2, \mathbb{R})$
 となる。) よって、包含準同型

$$H^*(\Omega^*(T_g)^{FN}) \rightarrow H^*(\Omega^*(T_g)^{M_g}) = H^*(M_g)$$

を考えることができる。

結果 $* \leq 3g-5$ について

$$H^*(\Omega^*(T_g)^{FN}) = \Omega^*(T_g)^{FN} = \mathbb{R}[\omega],$$

が成立つ。ここに $\omega \in \Omega^2(T_g)$ は Weil-Petersson Kähler
 形式を表す。 ———

これを既知の結果と組合せて次がえられる。

系 包含準同型

$$H^*(\Omega^*(T_g)^{FN}) \rightarrow H^*(\Omega^*(T_g)^{M_g}) = H^*(M_g)$$

は

安定的に単射である。(森田 [M0])

$* \geq 4$ については安定的にも全射ではない。(森田 [M0])

$* = 0, 1, 2$ については同型である。(Harer [H], Powell [P])

結果 $\Rightarrow$ 系の証明 森田 [M0] により安定的に (i.e. $* \ll g$)

$$\mathbb{R}[e_1, e_2, \dots, e_i, \dots] \subset H^*(M_g; \mathbb{R}), \quad \deg e_i = 2i$$

となることが知られている。知られているように $\frac{1}{2\pi^2}[\omega] =$

e_1 であるから、1行目の結果が分る。 $e_i (i \geq 2) \notin \text{Image}$

であるから2行目が分る。//

したがって、不幸なことであるが、群 FN を使っては、compact Riemann 面の moduli 空間 M_g の安定実 cohomology を決定することはできない、ということが分る。

結果の証明は、閉曲面 Σ_g の pants 分解に伴う Fenchel-Nielsen 座標に関する tensor 計算を用いる。Wolpert [W3] に従い、pants 分解を保ち、向きを逆にする Σ_g の対合、 ρ を用いる。 ρ の作用により、 $\Omega^*(T_g)^{FN}$ は ± 1 固有空間に分解する。これにより $\Omega^*(T_g)^{FN}$ の計算が可能になる。 $* \geq 2$

について、計算は、複雑だが、初等的である。他方 $\kappa=1$ には、測地長函数の Weil-Petersson Hessian の正值性 [W4] を使う。

実際の計算を御覧になりたい方は、preprint を御請求下さい。

い。

REFERENCES

- [Ab] W. Abikoff, "The Real analytic Theory of Teichmüller Space," Lecture Note in Math. 820, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1976.
- [Ah] L. V. Ahlfors, *Some remarks on Teichmüller's space of Riemann surfaces*, Ann. of Math. 74 (1961), 171-191.
- [B] A. Borel, *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 7 (1974), 235-272.
- [G1] W. M. Goldman, *The symplectic nature of fundamental groups of surfaces*, Adv. Math. 54 (1984), 200-225.
- [G2] ———, *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations*, Invent. Math. 85 (1986), 263-302.
- [H] J. L. Harer, *The second homology group of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. 72 (1983), 221-239.
- [K] S. P. Kerckhoff, *The Nielsen realization problem*, Ann. of Math. 117 (1983), 235-265.
- [L] W. B. R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. of Math. 76 (1962), 531-540.
- [Ma] Y. Matsushima, *On Betti numbers of compact, locally symmetric Riemannian manifolds*, Osaka Math. J. 14 (1962), 1-20.
- [Mo] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Invent. Math. 90 (1987), 551-577.
- [P] J. Powell, *Two theorems on the mapping class group of a surface*, Proc. Amer. Math. Soc. 68 (1978), 347-350.
- [W1] S. Wolpert, *The Fenchel-Nielsen deformation*, Ann. of Math. 115 (1982), 501-528.
- [W2] ———, *On the symplectic geometry of deformations of a hyperbolic surface*, Ann. of Math. 117 (1983), 207-234.
- [W3] ———, *On the Weil-Petersson geometry of the moduli space of curves*, Amer. J. Math. 107 (1985), 969-997.
- [W4] ———, *Geodesic length functions and the Nielsen problem*, J. Differential Geom. 25 (1987), 275-296.