

Steenrod 代数と Λ -代数.

西田 吾郎 (京大, 理).

Steenrod 作用素と Dyer-Lashof 作用素は, 共に対称群のコホモロジー群を基にして定義されるが, それらの環構造を定める Adem の関係式はみかけ上は異なっている. 一方 Dyer-Lashof 代数と Λ -代数は本質的に同一の Adem 関係式をもつことから Singer 等により知られている. 本論の目標は, 対称群のコホモロジーのある種の局所化と不変式論を用いることにより, Steenrod 代数と Dyer-Lashof 代数(従って Λ -代数)を統一的に定義できることを示すことである. 本論では mod 2 の理論をあつかう. 以後コホモロジーの係数は常に標数 2 の素体 $\mathbb{F}_2$ と約束する.

§ 1. 対称群のコホモロジーと不変式.

$\mathbb{F}_2$ 上の n 次元ベクトル空間 $\mathbb{Z}_2^n$ の線型変換群, Affine 変換群, および集合としての置換群をそれぞれ $GL_n(\mathbb{F}_2)$, $Aff(\mathbb{Z}_2^n)$ および $\Sigma_{\mathbb{Z}_2^n}$ と表す. また $GL_n(\mathbb{F}_2)$ の上半三角行列全体のなす部分群を U_n とする. このとき 群拡大

$$\mathbb{Z}_2^n \longrightarrow Aff(\mathbb{Z}_2^n) \xrightarrow{\pi} GL_n(\mathbb{F}_2)$$

から誘導される次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{Z}_2^n & \longrightarrow & \pi^{-1}(U_n) & \longrightarrow & U_n \\
 \parallel & & \cap & & \cap \\
 \mathbb{Z}_2^n & \longrightarrow & \text{Aff}(\mathbb{Z}_2^n) & \longrightarrow & \text{GL}_n(\mathbb{F}_2)
 \end{array}$$

U_n は $\text{GL}_n(\mathbb{F}_2)$ の 2-Sylow 部分群であり, $[\Sigma_{2^n}, \text{Aff}(\mathbb{Z}_2^n)]$ は奇数だから, $\pi^{-1}(U_n)$ は Σ_{2^n} の 2-Sylow 部分群である.

従って $\pi^{-1}(U_n)$ を $\Sigma_{2^n, 2}$ と表わすとき, 次の包含写像

$$\mathbb{Z}_2^n \xrightarrow{d} \Sigma_{2^n, 2} \xrightarrow{i} \Sigma_{2^n}$$

が得られ, $N_{\Sigma_{2^n}}(\mathbb{Z}_2^n)/\mathbb{Z}_2^n \cong \text{GL}_n(\mathbb{F}_2)$, $N_{\Sigma_{2^n, 2}}(\mathbb{Z}_2^n)/\mathbb{Z}_2^n \cong U$ となる. 但し $N_{\Sigma_{2^n, 2}}(\mathbb{Z}_2^n)$ は正規化部分群である. 従って次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccc}
 H^*(B\Sigma_{2^n}) & \xrightarrow{i^*} & H^*(B\Sigma_{2^n, 2}) & \xrightarrow{d^*} & H^*(B\mathbb{Z}_2^n) \\
 \downarrow d^* & & \downarrow d^* & & \parallel \\
 \mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_n]^{\text{GL}_n} & \subset & \mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_n]^{U_n} & \subset & \mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_n].
 \end{array}$$

ここで, 不変式の環はよく知られてゐるように $\mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_n]^{\text{GL}_n} \cong \mathbb{Z}_2[g_{n,0}, \dots, g_{n,n-1}]$, 但し $g_{n,i}$ は Dickson 不変式で $|g_{n,i}| = 2^n - 2^i$ である. 一方 H. Mui によつてある種の U_n -不変式 v_i ($|v_i| = 2^i$) が定義され, $\mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_n]^{U_n} \cong \mathbb{Z}_2[v_1, \dots, v_n]$ とすることが知られてゐる.

注意 1. 対称群 Σ_{2^n} の 2^n -次元の標準的置換表現を V とすると, $V/\mathbb{Z}_2^n$ は $\mathbb{Z}_2^n$ の regular 表現である. V の全 Stiefel

Whitney 類は

$$w(V) = 1 + \beta_{n,n-1} + \cdots + \beta_{n,0}$$

で与えられる. 特に $V-1$ の Euler 類は $e(V-1) = \beta_{n,0}$,

従って $\beta_{n,0} = \prod e(\eta_i) = \prod (t_1, \dots, t_n \text{ の } 1\text{-次式})$ である. 但し

η_i は $\mathbb{Z}_2^n$ のすべての非自明な 1-dim 表現を動く.

注意 2. $\Sigma_{2^n, 2} = \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2 \wr \cdots \wr \mathbb{Z}_2$ に対しては

$$\begin{aligned} V|_{\Sigma_{2^n, 2}} - 1 &= \zeta_1 + E(\zeta_2 + E(\cdots + E(\zeta_n) \cdots)) \\ &= \zeta_1 + E(\zeta_2) + E^2(\zeta_3) + \cdots + E^{n-1}(\zeta_n) \end{aligned}$$

が成り立つ. 但し ζ_i は i 番目の $\mathbb{Z}_2$ の 1-dim 非自明表現で,

$E(\)$ は表現の extended power である. このとき不変式

v_i は Euler 類 $e(E^{i-1}(\zeta_i))$ で与えられる. 特に $v_1 \cdots v_n = \beta_{n,0}$

である.

定理 1. 図式 (*) を $\beta_{n,0}$ によって局所化するとき, 次の可換図式と同型が得られる.

$$\begin{array}{ccccc} H^*(B\Sigma_{2^n})[\beta_{n,0}^{-1}] & \xrightarrow{i^*} & H^*(B\Sigma_{2^{n,2}})[\beta_{n,0}^{-1}] & \xrightarrow{d^*} & H^*(B\mathbb{Z}_2^n)[\beta_{n,0}^{-1}] \\ \cong \downarrow d^* & & \cong \downarrow d^* & & \parallel \\ \mathbb{Z}_2[\beta_{n,0}^{\pm}, \beta_{n,1}, \dots, \beta_{n,n-1}] & \subset & \mathbb{Z}_2[v_1^{\pm}, \dots, v_n^{\pm}] & \subset & \mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_n, \beta_{n,0}^{-1}] \end{array}$$

§ 2. 基本関係式.

$w_i = v_i / (v_1 \cdots v_{i-1}) \in H^1(B\Sigma_{2^{n,2}})[\beta_{n,0}^{-1}]$ とおくと, 明らかに

$H^*(B\Sigma_{2^{n,2}})[g_{n,0}^{-1}] \cong \mathbb{Z}_2[\omega_1^\pm, \dots, \omega_n^\pm]$ である. $M^*[n] = H^*(B\Sigma_{2^{n,2}})[g_{n,0}^{-1}]$
 $\cong \mathbb{Z}_2[\omega_1^\pm, \dots, \omega_n^\pm]$, $D^*[n] = H^*(B\Sigma_{2^n})[g_{n,0}^{-1}] \cong \mathbb{Z}_2[g_{n,0}^\pm, g_{n,1}, \dots, g_{n,n-1}]$
 とおき, 環の直和 $\bigoplus_n M^*[n]$, $\bigoplus_n D^*[n]$ をそれぞれ M^* , D^* と
 表わす. 各 n に対し

$$\psi_n: M^*[n] \longrightarrow \bigoplus M^*[k] \otimes M^*[n-k]$$

を $\psi_n(\omega_1^{i_1} \cdots \omega_n^{i_n}) = \sum (\omega_1^{i_1} \cdots \omega_k^{i_k}) \otimes (\omega_{k+1}^{i_{k+1}} \cdots \omega_n^{i_n})$ とおくと, M^* は
 $\psi = \bigoplus \psi_n$ を余積とある Hopf 代数となる. このとき Dickson
 不変式の性質から次の定理が容易に得られる.

定理 2. D^* は M^* の部分 Hopf 代数である.

次に $M^*[n]$ の basis は $I = (i_1, \dots, i_n)$, $i_i \in \mathbb{Z}$ に対し
 $\omega_{[n]}^I = \omega_1^{i_1} \cdots \omega_n^{i_n}$ で与えられるものとし, この basis に属す
 る dual を $\lambda_I = \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} \in \text{Hom}(M^*[n], \mathbb{F}_2)$ と書く. また,
 このような λ_I で生成される $\text{Hom}(M^*[n], \mathbb{F}_2)$ の submodule を
 $M_*[n]$, $M_* = \bigoplus M_*[n]$ とする. 同様に, $D^*[n]$ の basis を K
 $= (k_0, \dots, k_{n-1})$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, $k_g \in \mathbb{Z}^+$ ($g > 0$) に対し $g_{[n]}^K =$
 $g_{n,0}^{k_0} \cdots g_{n,n-1}^{k_{n-1}}$ とおき, $g_{[n]}^K$ の dual 元で生成された $\text{Hom}(D^*[n],$
 $\mathbb{F}_2)$ の submodule を $D_*[n]$, $D_* = \bigoplus D_*[n]$ とおく.

M_* , D_* はそれぞれ M^* , D^* の dual Hopf 代数であり,
 自然な射影 $\pi: M_* \rightarrow D_*$ が存在する. M^* の余積の定義か
 ら, $(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n}) \cdot (\lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_m}) = \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_m}$ は容易にわかる
 から, M_* は symbol λ_i , $i \in \mathbb{Z}$ で生成される free

associative algebra となる.

次に加群の同型 $\delta[n]: M^*[n] \rightarrow M_+[n]$ を $\delta[n](\omega_{n1}^I)$
 $= \lambda_{-I-1} = \lambda_{-i_1-1} \lambda_{-i_2-1} \cdots \lambda_{-i_n-1}$ と定義する. $\delta = \bigoplus \delta[n]: M^* \rightarrow M_+$
 とおくとき, 次の基本定理を得る.

定理3. 次の完全列が存在する.

$$0 \rightarrow D^* \xrightarrow{\delta} M_+ \xrightarrow{\pi} D_+ \rightarrow 0.$$

環 D_+ は自由環 M_+ から関係式の ideal $\text{Ker } \pi$ によって
 定義されるが, 上の定理は, 関係式全体が D_+ 自身と同型に
 なることを主張する. 定理の証明には次の事実を用いる.

M^* の x に対し, $\psi(x) = \sum x_i \alpha_i$ ならば, $\delta(x) = \sum \delta(\alpha_i) \delta(x_i)$.
 従って $\pi \circ \delta = 0$ を示すには $\pi \circ \delta(D^*[2]) = 0$ を示せばよい
 が, これは直接計算で確かめられる. この事実から, 特に
 $\text{Ker } \pi$ は 2項関係式 ($\delta(D^*[2])$) で生成されることもわかる.

$D^*[2] = \mathbb{Z}_2[g_{2,0}^\pm, g_{2,1}]$, $g_{2,0} = \omega_1^2 \omega_2$, $g_{2,1} = \omega_1(\omega_1 + \omega_2)$ だから
 $g_{2,0}^a g_{2,1}^b = \omega_1^{2a+b} \omega_2^a (\omega_1 + \omega_2)^b$ である. 従って $\delta(g_{2,0}^a g_{2,1}^b)$ を計算
 すれば 次の結果を得る.

系4 (Adem relation). $\text{Ker } \pi$ は次の関係式

$$\sum_i \binom{b}{i} \lambda_{-2a-2b-1+i} \lambda_{-a-1-i}$$

で生成される. ただし $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 0$.

§3. Extended power と Ito-Morozov 作用素.

前節において, 対称群のコホモロジーから純代数的に環 D_* を定義したが, 本節では Steenrod 代数や Λ -代数は D_* の部分環であることを示す.

n 次対称群 Σ_n の部分群 G と, 空間 X に対し Extended power $D_G X = (EG_+ \wedge X^{(n)})/G$ を考える. ただし EG は普通 G 空間, $X^{(n)} = \underbrace{X \wedge \cdots \wedge X}_n$ である. 次の写像

$$D_G X = (EG_+ \wedge X^{(n)})/G \xrightarrow{\cong} (EG_+ \wedge EG_+ \wedge X^{(n)})/G \rightarrow BG_+ \wedge D_G X$$

によって $\hat{H}^*(D_G X)$ は $H^*(BG)$ -加群となる. $H^*(BG) \ni \alpha$ に対し, $\alpha \cdot : \hat{H}^*(D_G X) \rightarrow \hat{H}^{*+|\alpha|}(D_G X)$ の双対を

$$/\alpha : \hat{H}_*(D_G X) \rightarrow \hat{H}_{*-|\alpha|}(D_G X)$$

と表わし, $\hat{H}_*(D_G X)$ も $H^*(BG)$ -加群と考える.

$$\Delta : BG_+ \wedge X \rightarrow D_G X$$

を対角写像 $X \rightarrow X^{(n)}$ から誘導される写像とすると

$$\Delta_* : H_*(BG) \otimes \hat{H}_*(X) \rightarrow \hat{H}_*(D_G X)$$

は $H^*(BG)$ -準同型である.

次に, §1 の注意 1 で述べたように, Σ_n の置換表現 V_n に対し Euler 類 $e_n = e(V_n|_G - 1) \in H^{n-1}(BG)$ を考える. e_n の slant 積 $/e_n$ による逆系

$$\hat{H}_*^*(D_G X) \xleftarrow{/e_n} H_{*+n-1}(D_G X) \xleftarrow{/e_n} \cdots$$

を考え, その逆極限を $\hat{H}_*(D_G X)^\wedge$ と表わす. $\hat{H}_*(D_G X)^\wedge$ は明らかに $\hat{H}^*(D_G X)[e_n^{-1}]$ の dual である.

$\hat{H}_*(X)$ の basis $x_1, x_2, \dots$ を固定すると, 次の同型が存在する.

$$\hat{H}_*(X^m) \cong (\bigoplus_i \mathbb{H}_2(x_i \otimes \dots \otimes x_i)) \oplus \text{others as } \Sigma_n\text{-module}$$

$$\text{従って } \hat{H}_*(D_G X) \cong \bigoplus_i H_*(G; \mathbb{H}_2(x_i \otimes \dots \otimes x_i)) \oplus H_*(G; \text{others}).$$

ここで $x_i \otimes \dots \otimes x_i \in H_0(G; \mathbb{H}_2(x_i \otimes \dots \otimes x_i)) \in \int x_i$ と表わすと $H_*(G; \mathbb{H}_2(x_i \otimes \dots \otimes x_i)) \cong \{a \int x_i; a \in H_*(BG)\}$ と表わせる. このとき degree preserving な準同型

$$\phi_*: H_*(BG)^\wedge \otimes \hat{H}_*(X) \longrightarrow \hat{H}_*(D_G X)^\wedge$$

を $\phi_*(a \otimes x) = (a/e_n^{|x|}) \int x$ と定義する. このとき

定理 5. $\phi_*, \Delta_*: H_*(BG)^\wedge \otimes \hat{H}_*(X) \longrightarrow \hat{H}_*(D_G X)^\wedge$ は共に同型である. ただし X は有限複体とする.

証明は, Euler 類 e_n が上に述べた $H_*(G; \text{others})$ を ~~零化~~ 零化することから示される.

さて $\gamma: H_*(BG)^\wedge \otimes \hat{H}_*(X) \longrightarrow \hat{H}_*(X)$ を次の写像の合成として定義する.

$$H_*(BG)^\wedge \otimes \hat{H}_*(X) \xrightarrow{\phi_*} \hat{H}_*(D_G X)^\wedge \xrightarrow{\Delta_*^{-1}} H_*(BG)^\wedge \otimes \hat{H}_*(X) \xrightarrow{\pi \otimes 1} \hat{H}_*(X).$$

ただし $\pi: H_*(BG)^\wedge \longrightarrow \mathbb{H}_2$ は $1 \in H^0(BG)[e_n^{-1}]$ に対応する準同型である. また $X = Y_+$, Y は無限ループ空間のとき,

Dyer-Lashof によって定義された写像 $\theta: D_G X \subset D_{\Sigma_n} X \longrightarrow X$

を用いて $\gamma_\Omega: H_*(BG)^\wedge \otimes \hat{H}_*(X) \longrightarrow \hat{H}_*(X)$ を

$$H_*(BG)^\wedge \otimes \hat{H}_*(X) \xrightarrow{\phi_*} \hat{H}_*(D_G X)^\wedge \xrightarrow{p} \hat{H}_*(D_G X) \xrightarrow{\theta_*} \hat{H}_*(X)$$

と定義する. ただし p は自然な射影である. 定義から容易にわかるように $H_*(BG)^\wedge \ni a$ に対し

$$\zeta_a = \zeta(a,) : \hat{H}_*(X) \longrightarrow \hat{H}_{*-|a|}(X)$$

はホモロジ-作用素で dual をとれば 次数 $|a|$ のコホモロジ-作用素を与える. 無限 n -空間の圏では, 同様に $\zeta_\Omega(a,)$ はホモロジ-作用素である. このとき

定理 6. $G = \mathbb{Z}_2 = \Sigma_2$ とし, $H_i(B\mathbb{Z}_2)^\wedge$ の basis を e_i , $i \in \mathbb{Z}$, $|e_i| = i$ とする.

i). $\zeta(e_i,) = (c S_g^{-i})_*$, ただし $i > 0$ のとき $\zeta(e_i,) = 0$, c は canonical な逆同型, また $()_*$ は dual を表わす.

ii). $\zeta_\Omega(e_i,) = Q^i$, ただし Q^i は Dyer-Lashof 作用素で $i < 0$ のとき $\zeta_\Omega(e_i,) = 0$.

定理の ii) は Q^i の定義に他ならない. i) は dual をとれば S_g^i の定義から容易にわかる.

次に $G = \Sigma_{2^{n,2}} = \mathbb{Z}_2 \wr \dots \wr \mathbb{Z}_2 \subset \Sigma_{2^n}$ の場合を考える. このとき $D_G(X) = D_{\mathbb{Z}_2} \dots D_{\mathbb{Z}_2}(X)$ であり, 特に $B\Sigma_{2^{n,2}} = D_{\mathbb{Z}_2} \dots D_{\mathbb{Z}_2}(S^0)$ である. また $H_*(B\Sigma_{2^{n,2}})^\wedge = \text{Hom}(H^*(B\Sigma_{2^{n,2}})[q_{n,0}^\wedge], \mathbb{F}_2) \subset M_*(n)$ に注意すると次の系が得られる.

系 7. $M_*(n) \ni \lambda_1 \dots \lambda_n$ に対し

i). 全ての k に対し $i_k \leq 0$ であれば

$$\zeta(\lambda_1 \dots \lambda_n,) = (c S_g^{-i_1})_* \dots (c S_g^{-i_n})_* = (c(S_g^{-i_1} \dots S_g^{-i_n}))_*.$$

ii) すべての k に対し $i_k \leq 0$ であれば

$$\sum_{\Omega}(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n},) = Q^{i_1} \cdots Q^{i_n}.$$

さて $\lambda_i, i \geq 0$ で生成された M_* の部分環を M_*^{pos} ,

また $\lambda_i, i \leq 0$ で生成された部分環を M_*^{neg} と表す. 上の

系より 環の 全射 準同型 $M_*^{\text{pos}} \xrightarrow{\pi_1} R$ および $M_*^{\text{neg}} \xrightarrow{\pi_2} Q_2$

が得られる. したがって R は Dyer-Lashof 代数, Q_2 は mod 2

Steenrod 代数である. 一方 定理 3 の全射 $\pi: M_* \rightarrow D_*$

を考えると 3 および $\sum_{\Omega}$ の定義から $\pi_1(\text{Ker } \pi) =$

$\pi_2(\text{Ker } \pi) = 0$ が容易に示される. 従って環の全射

$$\pi(M_*^{\text{pos}}) \rightarrow R, \quad \pi(M_*^{\text{neg}}) \rightarrow Q_2$$

が得られる. このとき

定理 8. D_* の部分環について次が成り立つ.

i). $\pi(M_*^{\text{pos}}) \cong \Lambda$, Λ -algebra.

ii). $\pi(M_*^{\text{neg}}) \cong \widehat{Q}_2$, Steenrod 代数 Q_2 において関係

式 $S_q^0 = 1$ を除いたもの.

証明は. i) は Λ -代数の定義と系 4 の Adem relation を
比べると容易にわかる. ii) は D_* において $\lambda_0 \neq 1$ であるこ
とと, 次元を比べることから容易にわかる.

注意. $\pi(M_*^{\text{pos}}) \cong \Lambda$ から Dyer-Lashof 代数 R を得る
には, $\pi(M_*^{\text{pos}})$ をさらに excess condition から定義される
関係式で割ればよい.

注意4. 系4の Adem relation は λ_i の言葉で書かれて
 いる. これを $S_{\mathfrak{g}}^i$ で書き直せば次の通りである.

$$\sum_i \binom{b}{i} S_{\mathfrak{g}}^{2a+2b+1-i} S_{\mathfrak{g}}^{a+1+i} = 0$$

ただし $b > 0, a \geq -1$ あるいは $b = 0, a \geq 0$.