

DS-diagram の基本変形

上智大 理工 横山和夫

東洋大 工 山下正勝

§1. S^2 -graph

有限個の点の集合 $V = \{A_i\}$ と有限個の open arcs の集合 $E = \{\alpha_m\}$ について考える.

定義 $G = (V, E)$ が次の (1) ~ (4) を満たすとき, G を graph といい, V の元を G の vertex, E の元を G の edge と呼ぶ.

(1) $|G| = (\bigcup_i A_i) \cup (\bigcup_m \alpha_m)$ は 1-polyhedron である

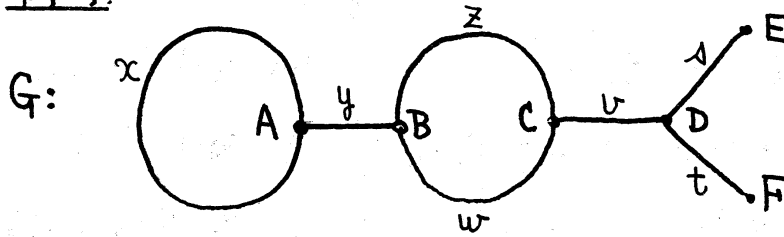
(2) $i \neq j \Rightarrow A_i \neq A_j$

$m \neq n \Rightarrow \alpha_m \cap \alpha_n = \emptyset$

(3) 各 i, m に対して, $A_i \cap \alpha_m = \emptyset$

(4) $\alpha_m \in E$ の $|G|$ における closure $cl(\alpha_m)$ は, 1- または 2- の vertex を含む. これらの vertex を α_m の 端点 と呼ぶ.

例 1.

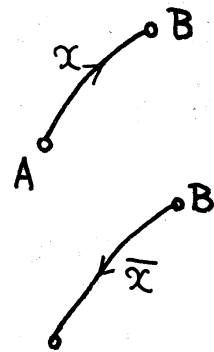


$$G = (\{A, B, C, D, E, F\}, \{x, y, z, w, u, s, t\})$$

x の端点は A だけ, y の端点は A, B の 2 点 等々.

定義. graph G の各 edge に矢印で向きが指定されているとき, G を oriented graph という.

$x \in E$ の端点を A, B とする. x の向きが図のように与えられているとき A, B をそれぞれ



x の始点 及び x の終点 という.

記号 $\overline{AB}$ を x の境界 と呼び, $\partial x = \overline{AB}$ と書く. A

同じ edge を x の向きと反対に向きづけられたものを,

便宜上 $\overline{x}$ と書くことにする. このときは B, A がそれぞれ $\overline{x}$ の始点及び終点であり, $\partial \overline{x} = \overline{BA}$ が $\overline{x}$ の境界ということになる.

始点と終点が同一の vertex A になるような edge x に対してその境界 $\partial x = \overline{AA}$ を $\partial x = 1$ と書くことがある.

定義 $G = (V, E)$ を oriented graph とする.

(1) $y_i \in E$ または $\overline{y_i} \in E$ for each $i = 1, 2, \dots, n$.

(2) $(y_i \text{ の終点 }) = (y_{i+1} \text{ の始点 })$ for each $i = 1, 2, \dots, n-1$.

を満たす edges の列 $\pi = y_1 y_2 \dots y_n$ を G の path といい、

y_1 の始点を π の始点, y_n の終点を π の終点 といふ.

各 y_i を π の edge といふ. π の edge の端点と $1 \neq$ あらわれる G の vertex を π の vertex といふ.

$i \neq j$ のとき y_i の始点 $\neq y_j$ の始点 であるような path π を simple path といふ (注意: π の始点と π の終点は一致してもよい).

定義 oriented graph G の任意の 2 つの vertex A, B に対し, A を始点, B を終点に持つ path がとれるならば, G は connected である, といわれる.

以下, $|G|$ が 2-sphere S^2 上に実現されているような connected oriented graph $G = (V, E)$ について考える.

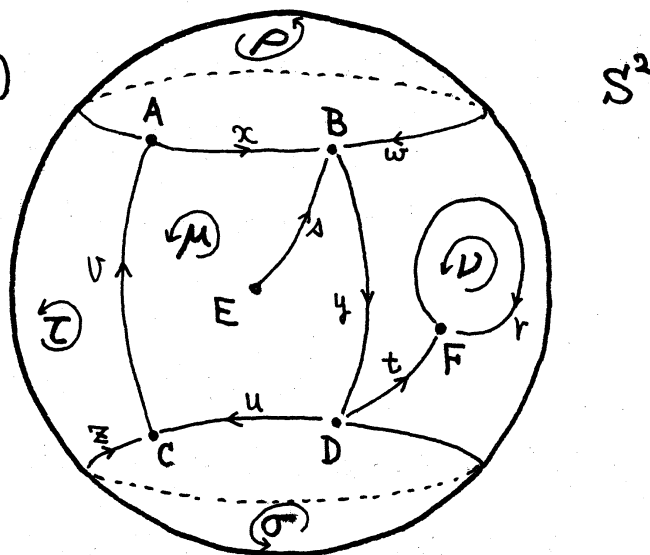
Proposition $S^2 - |G|$ は有限個の互いに disjoint な open 2-disks $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ からなる.

$S^2 - |G|$ の open 2-disks の集合を $F = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$ とする. F の各元に矢印で向きを指定する.

定義 E の各元に G からの向きが入り, F の各元に $1 \rightarrow$ の向きが指定されているとき, $(S^2, G) = (V, E, F)$ を S^2 -graph と呼ぶ. ことにする. V, E, F の各元をそれぞれ (S^2, G) の vertex, edge, face と呼ぶ.

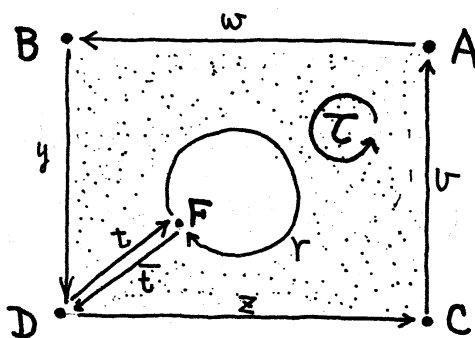
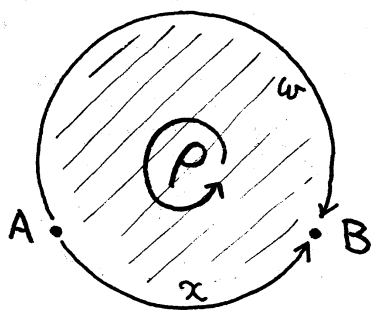
例 2.

S^2 -graph. (S^2, G)



(S^2, G) の各 face に対してその境界を定義したい.

例 2 の ρ, τ を用いて説明しよう.



あらかじめ与えられている face の向きに沿って、その周を順に読んで得られる path を face の境界 と言う。このときの path の vertex を face の vertex と言う。 ρ, τ に対しては

$$\rho = x \bar{w} \quad (\text{または } \bar{w} x)$$

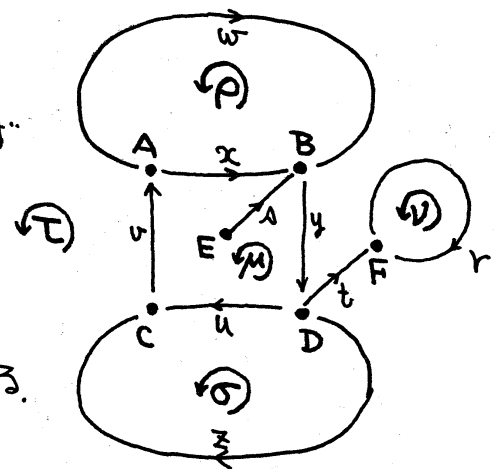
$$\tau = w y t r \bar{t} z v \quad (\text{またはこれを巡回的に読みかえたもの})$$

がその境界である。

定義 S^2 上の ambient isotopy で S^2 -graph (S^2, G) から (S^2, G') に変形されても (S^2, G) と (S^2, G') は S^2 -graph として同じものに見え、 $(S^2, G) = (S^2, G')$ と書く。

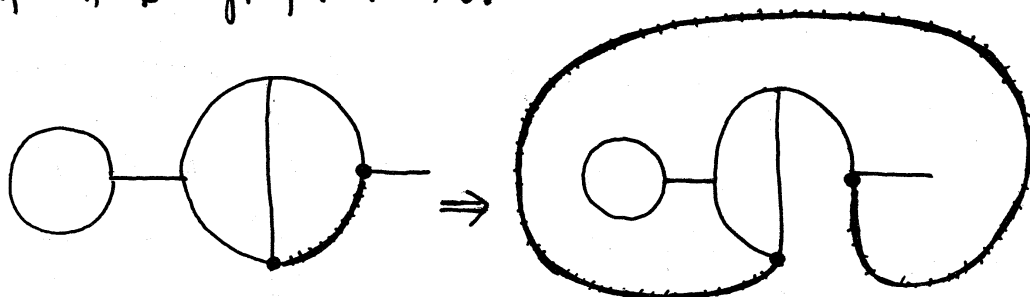
(S^2, G) の 1 つの face 内の 1 点 $*$ を選ぶと、 $S^2 - *$ は $\mathbb{R}^2$ に同相だから、 (S^2, G) は平面 $\mathbb{R}^2$ 上に実現することが出来る。いまそれを簡単に $(\mathbb{R}^2, G)$ と書く。

例 3 例 2 においてたとえば τ の内部に $*$ を選んでみる。そのとき例 2 の S^2 -graph の平面 $\mathbb{R}^2$ への実現として右図を得る。

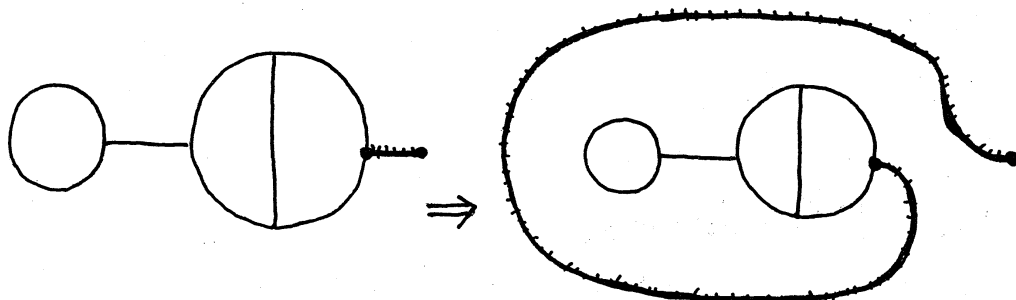


(R^2, G) が R^2 の ambient isotopy によって (R^2, G') に
 移り得るならば勿論 $(S^2, G) = (S^2, G')$ であるが、さらに
 それ以外の変形として下図のような変形も許される。即ち
 R^2 において“一番外側の” edge を、両端点を固定したまま
 勝手な別の“一番外側の” edge におきかえても (S^2, G) の
 方では同一の S^2 -graph である。

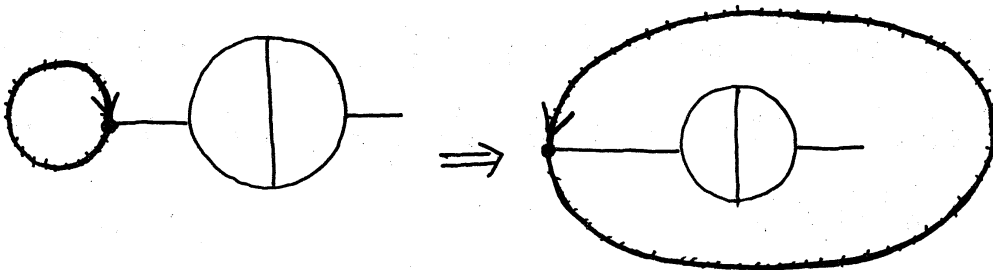
(イ)



(ロ)

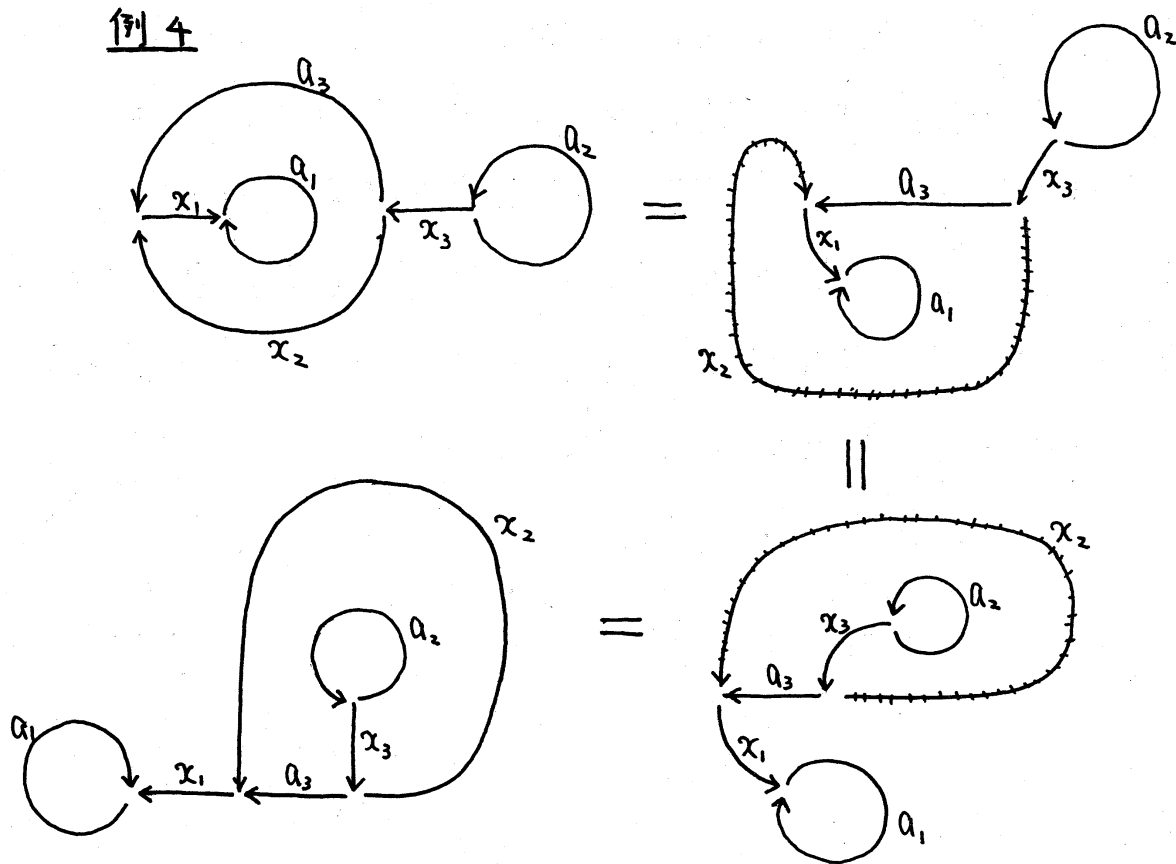


(ハ)



とくに (ハ) の場合は向きに注意を要する。(イ)~(ハ)で
 “一番外側の”の意味が了解できるであろう。

例 4



§ 2. DS-diagram

S^2 -graph $(S^2, G) = (V, E, F)$ に対して、その vertices, edges, faces の間の同一視を指定したものを S^2 -diagram と呼ぶことにする。この S^2 -diagram の作り方も、例 3 を借りて説明する。

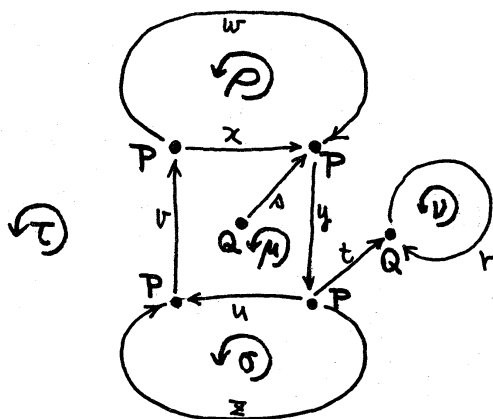
Step 1. (S^2, G) の vertices のいくつか同士を同じ文字でおきかえる。

例5. 例3でたとえば

$$A, B, C, D \rightarrow P$$

$$E, F \longrightarrow Q$$

とおきかえれば右図になる.



Step 2. step 1 の同一視によ, τ oriented edges (またはその逆向きの edges) のうちいくつかは (巡回的表示を適当に選べばその境界が等しくなることがある. 境界が等しくなるもののうちのいくつかずつを同じ記号であらわす.

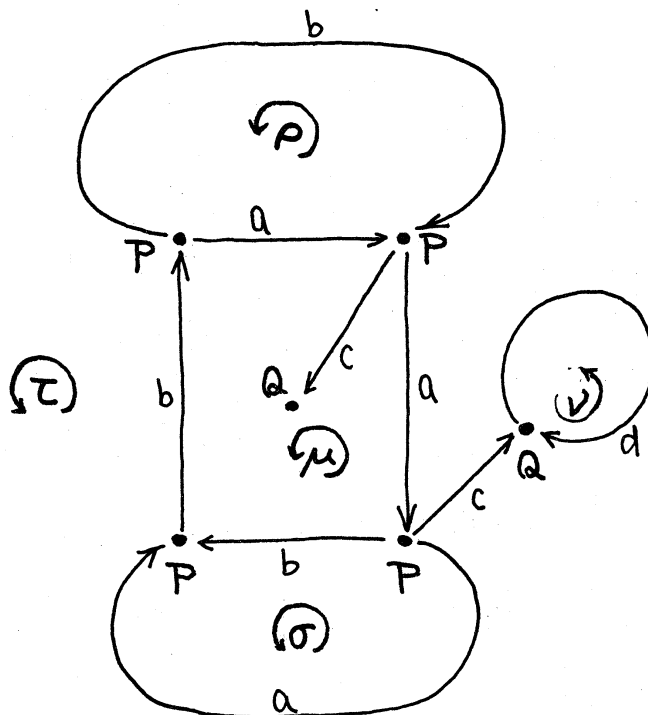
例6. 例5において

$$\begin{cases} \partial x = \partial y = \partial z = \partial u = \partial v = \partial w = \overline{P}P \\ \partial \bar{x} = \partial t = \overline{P}Q \\ \partial r = \overline{Q}Q \end{cases}$$

である. そこでたとえば

$$\begin{cases} x, y, z \longrightarrow a \\ u, v, w \longrightarrow b \\ \bar{x}, t \longrightarrow c \\ r \longrightarrow d \end{cases}$$

とおけば右図になる.



Step 3. step 2 の同一視によって oriented faces (またはその逆向きの faces) のうちいくつかは (巡回的表示を適当に選べば) その境界が等しくなることがある。境界が等しいような faces のうちのいくつかずつを同じ記号であらわす。

例 7. 例 6 において

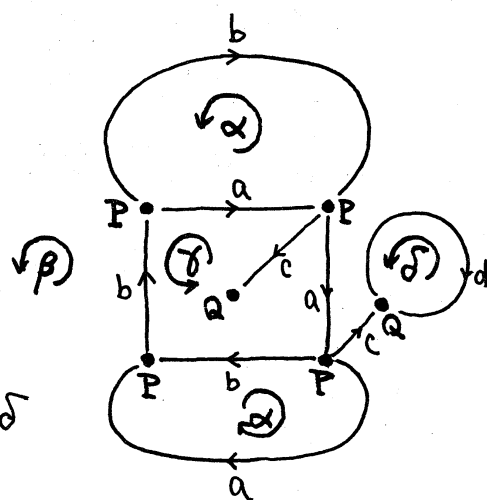
$$\partial P = \partial \bar{\sigma} = a\bar{b}, \quad \partial \tau = acd\bar{c}abb$$

$$\partial \mu = ac\bar{c}abb, \quad \partial \nu = \bar{a}$$

である。そこでたとえば

$$P, \bar{\sigma} \rightarrow \alpha, \quad \tau \rightarrow \beta, \quad \mu \rightarrow \gamma, \quad \nu \rightarrow \delta$$

とおけば右図を得る。



定義 S^2 -graph から step 1 ~ step 3 の過程を経て得られたものを S^2 -diagram といい。

同一視の指定が済んで得られる open disk を S^2 -diagram の cell と呼ぶ。とくに元の face の境界, vertex を同一視して得られるものをそれぞれその 2-cell の 境界, vertex といふ。1つの cell が S^2 -diagram にあらわれる重複個数を、その cell の multiplicity と呼び、 $m(A)$, $m(a)$, $m(\alpha)$ などとあらわす。

例8 例7で示された S^2 -diagram にあられる cells は

0-cells P, Q .

1-cells a, b, c, d .

2-cells $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

2-cells の境界は.

$$\partial\alpha = a\bar{b}, \quad \partial\beta = acd\bar{c}abb, \quad \partial\gamma = ac\bar{c}abb, \quad \partial\delta = \bar{d}$$

cell の multiplicity は.

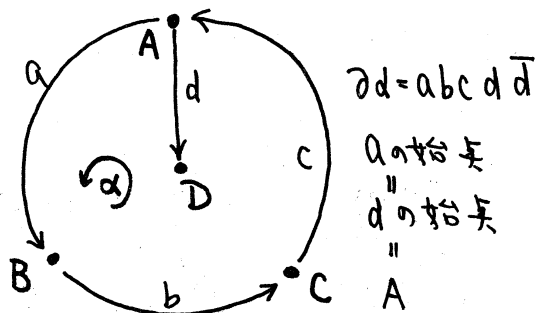
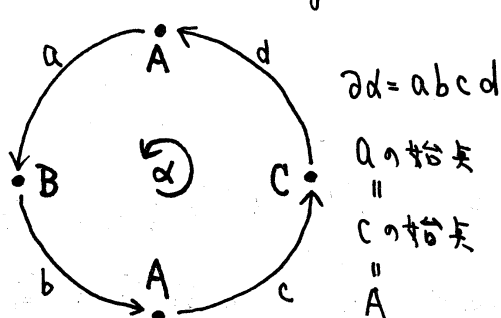
$$0\text{-cell} \dots m(P) = 4, \quad m(Q) = 2$$

$$1\text{-cell} \dots m(a) = m(b) = 3, \quad m(c) = 2, \quad m(d) = 1$$

$$2\text{-cell} \quad m(\alpha) = 2, \quad m(\beta) = m(\gamma) = m(\delta) = 1$$

定義 S^2 -diagram の 2-cell の境界は G を同一視して得られる graph の path になる. この意味でこの境界が simple path であるとき, この 2-cell は non-singular である. といわれる.

例9 singular 2-cell の例も 2つ示しておく.



定義 各 2-cell の multiplicity が 2 であるような S^2 -diagram $(S^2, G_{\sim})$ を DS-diagram (Dehn-Seifert diagram) と呼ぶことにする。

定義 S^2 を DS-diagram $(S^2, G_{\sim})$ の指定で同一視して得られる polyhedron を $S^2/G_{\sim}$ とあらわし、 $(S^2, G_{\sim})$ から induce される (抽象的) spine と呼ぶ。
DS-diagram の cell をそのまま $S^2/G_{\sim}$ の cell として流用する。

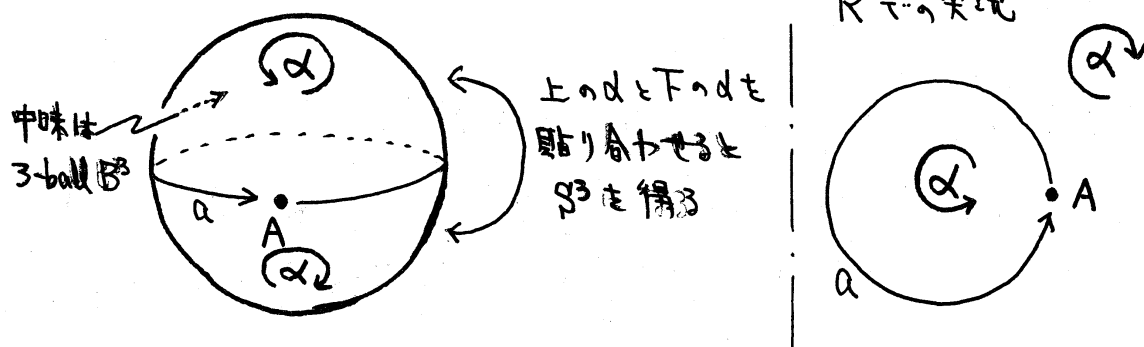
§3. closed 3-manifold.

3-ball B^3 の表面 S^2 に DS-diagram $(S^2, G_{\sim})$ が与えられているとする。 B^3 の表面を $(S^2, G_{\sim})$ の指定に従って貼り合わせることによって、 B^3 から得られる polyhedron を $B^3/G_{\sim}$ と書くことにする。 $(S^2, G_{\sim})$ から induce される spine $P = S^2/G_{\sim}$ の 0-cells, 1-cells, 2-cells の個数をそれぞれ $\#\tilde{V}$, $\#\tilde{E}$, $\#\tilde{F}$ と書くことにする。 次の 2 つの定理はよく知られている。

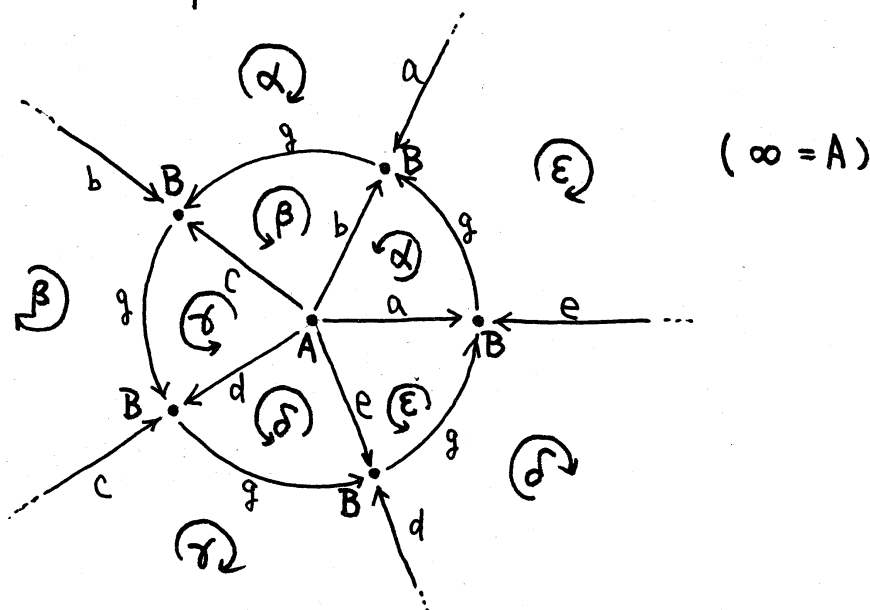
定理 1. $\#\tilde{V} - \#\tilde{E} + \#\tilde{F} = 1$ であるとき、そのときにかぎり、 $B^3/G_{\sim}$ は closed 3-manifold である。

定理 2 任意の closed 3-manifold M に対し, $B^3/G \sim M$ となるような DS-diagram (S^2, G) が存在する.

例 10 3-sphere S^3 .



例 11. lens space $L(5,1)$



表面に DS-diagram (S^2, G) が与えらる 3-ball を (B^3, G) と書くことにする. B^3/G が closed 3-manifold M^3 になるとき (B^3, G) を M^3 の DS-diagram と呼ぶことにする.

定理 3. $(B^3, G_{\sim})$ を closed 3-manifold M^3 の DS-diagram, D^3 を M^3 内の 3-ball とする. そのとき

$$M^3 - \text{Int} D^3 \searrow S^2/G_{\sim} \quad (\text{collapse})$$

§4. DS-diagram の自明な変形

closed 3-manifold M^3 の DS-diagram $(B^3, G_{\sim})$ について考える. $(B^3, G_{\sim})$ は $(S^2, G_{\sim})$ で一意に定まるから, 以下 $(S^2, G_{\sim})$ の言葉であらわす.

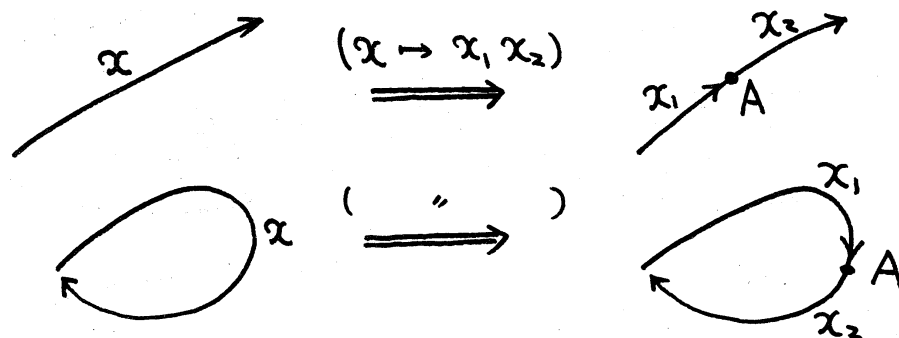
定義 2つの DS-diagram $\underbrace{(S^2, G_{\sim}) \text{ と } (S^2, G'_{\sim})}_{\text{が同じ closed 3-manifold を定めるとき.}} (S^2, G_{\sim}) \approx (S^2, G'_{\sim})$ と書く.

$(S^2, G_{\sim})$ は単に同一視の指定をしているだけだから, 結果として同一視の指定が S^2 全体で変わらない限り, 別の表記法をとってもよい. そのような自明な変形について述べる.

①-変形. $(S^2, G_{\sim})$ にあらわされる 1-cell または 2-cell のうち, 1種類の cell の向きを一斉に変える.

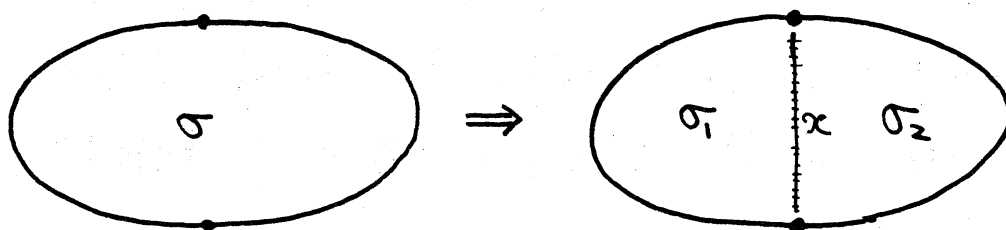
$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} a \nearrow \dots \bigcirc_a \dots \searrow a \end{array} & \xRightarrow{(a \mapsto \bar{a})} & \begin{array}{c} \nwarrow a \dots \bigcirc_a \dots \nearrow a \end{array} \end{array}$$

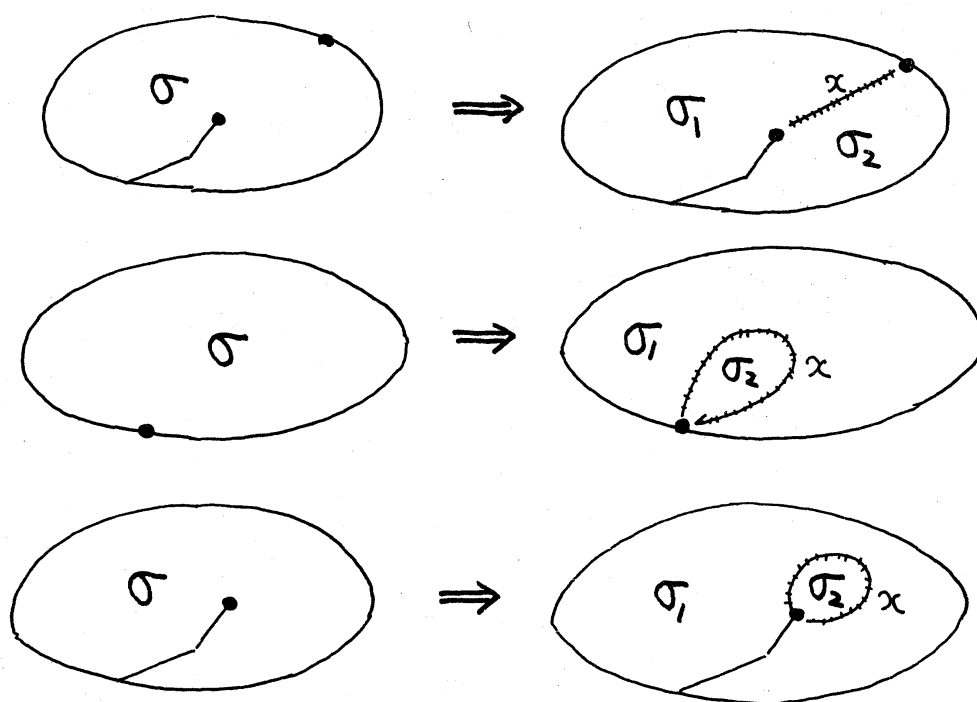
P-変形 $(S^2, G_{\sim})$ にあらわれる 1 種類の 1-cell を一斉に 2 種類の 1-cells に分割する。そのとき必然的に、1 種類の 0-cell が添加される。



P-変形 P-変形の逆変形である。1-cells α_1, α_2 が $(S^2, G_{\sim})$ 内で常に $\alpha_1 \alpha_2$ の形であらわれ、0-cell A が α_1 の終点 (= α_2 の始点) 以外の 1-cell の端点になっていないとき、 A を除去し、 $\alpha_1 \alpha_2$ を新たな 1-cell α におきかえることができる。

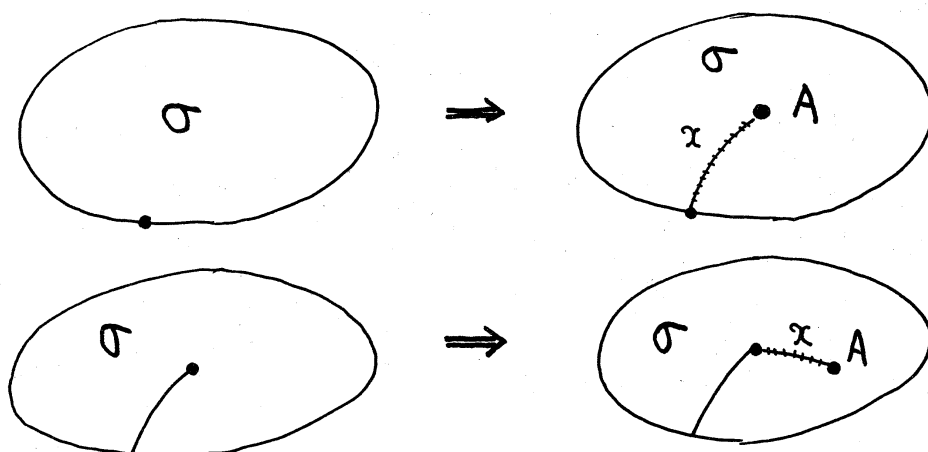
Q-変形 $(S^2, G_{\sim})$ にあらわれる 1 種類の 2-cell σ を一斉に 2 種類の 2-cells σ_1, σ_2 に分割する。そのとき必然的に 1 種類の 1-cell α が添加される。





$\bar{Q}$ -変形 Q -変形の逆変形である。2-cells σ_1, σ_2 が 2 箇所とも 1-cell α を境界に含むように同じパターンであらわれるとき、 α を除去し、 σ_1, σ_2 を一つの 2-cell σ にまとめる。但し、 α が他の場所にもあらわれる (即ち $m(\alpha) \geq 3$) 場合にはこの変形は許されない。

R -変形 (S^2, G_∞) にあらわれる 1 種類の 2-cell σ に対し、 σ の内部の 1 点 A を 0-cell に加え、 A と σ の他の vertex を結ぶ arc (の interior) を 1-cell に加える (新たな 2-cell は前の 2-cell の文字 σ を流用してもよい) だけである。

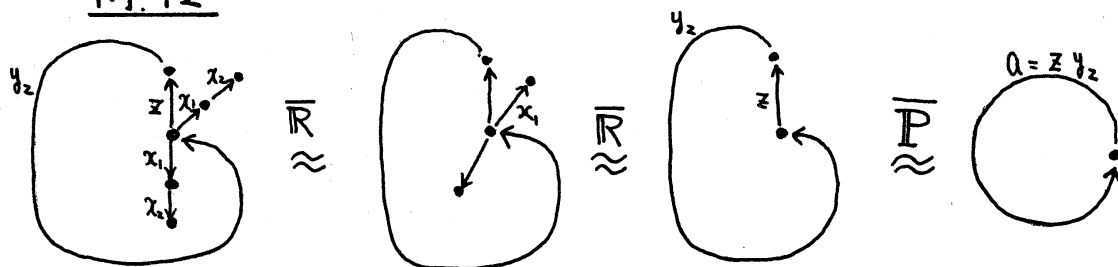


$\bar{R}$ -変形 R -変形の逆変形である。但し、 $\bar{Q}$ -変形の時と同じ注意、即ち $m(x)=2$, $m(A)=2$ を要する。

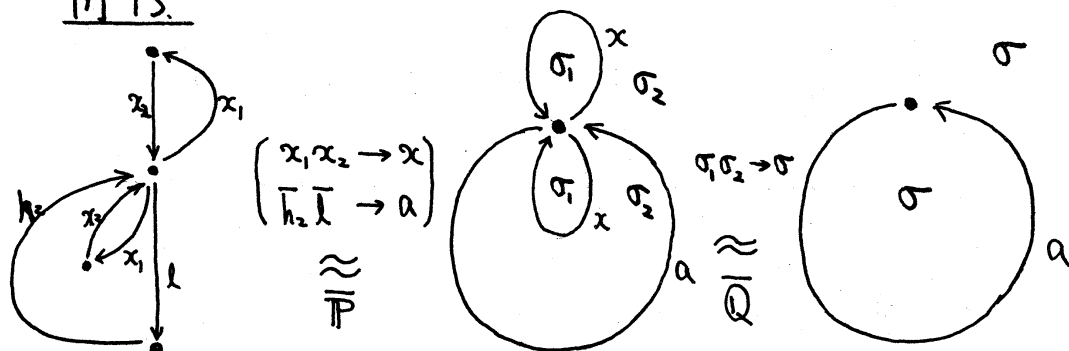
定義 O -, P -, Q -, R - 及びその逆 $\bar{O}$ -, $\bar{P}$ -, $\bar{Q}$ -, $\bar{R}$ - の各変形を総称して、DS-diagram の 自明な変形 という。

定理 4. 自明な変形によって DS-diagram は “変らない。” 即ち、自明な変形を有限回くり返すことにより、 $(S^2, G_{\sim})$ から $(S^2, G'_{\sim})$ が得られるならば $(S^2, G_{\sim}) \approx (S^2, G'_{\sim})$ 。

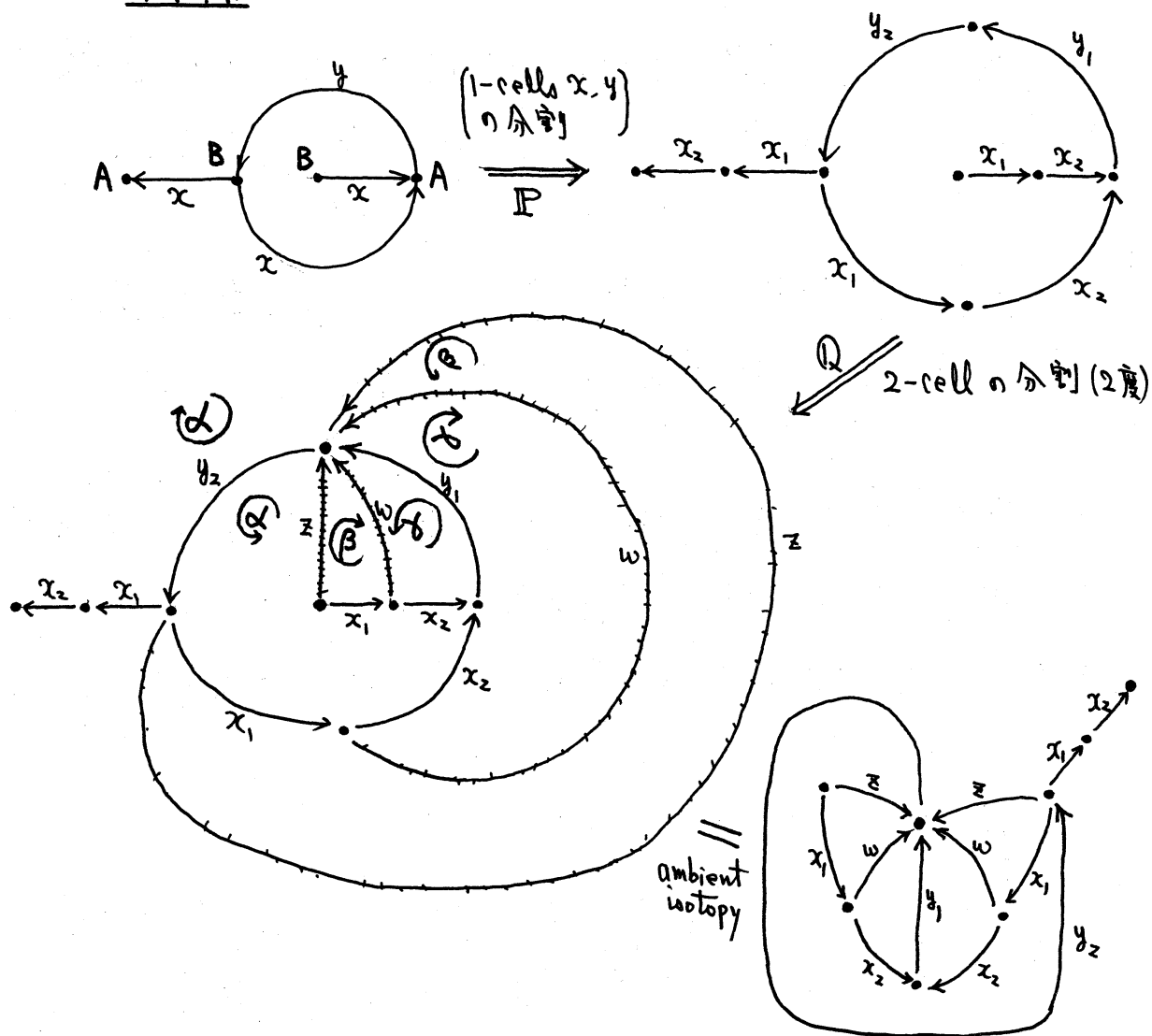
例. 12



例 13.



例 14.



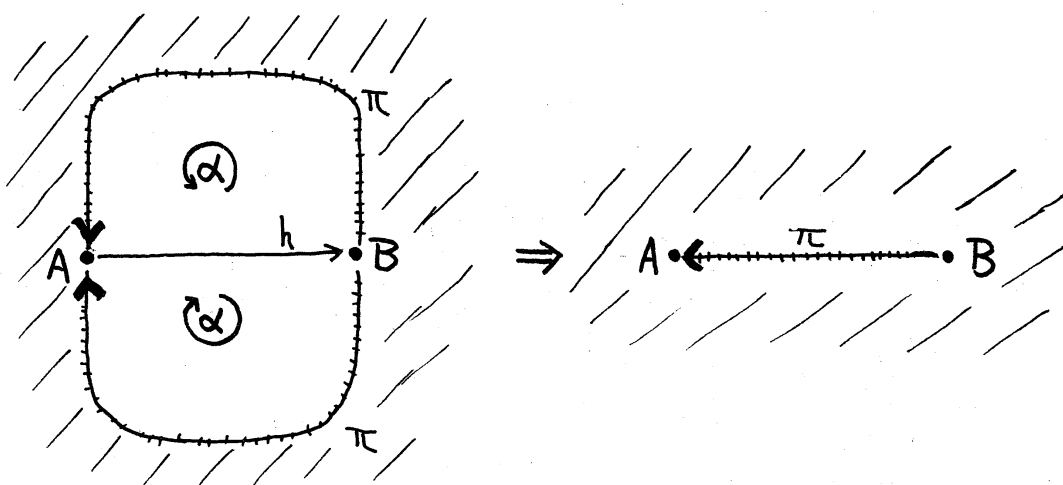
§5. Collapsing

DS-diagram $(S^2, G_\sim)$ 上に唯一度だけしか現れない
 1-cell h (即ち $m(h) = 1$ なる 1-cell h) について考える.
 h を境界に含む 2-cell は 1 種類しかない. いまその 2-cell
 を α とする. 2枚の α は h の両側にあつて互いに隣接している.
 α (または $\bar{\alpha}$) の境界は

$$\partial\alpha = h\pi \quad (\text{または } \partial\bar{\alpha} = h\pi)$$

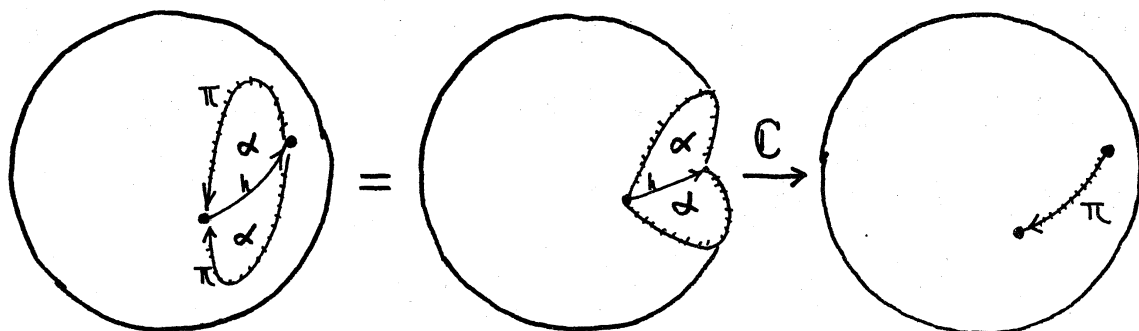
と書ける. 但し $\pi = b_1 b_2 \cdots b_m$ で, 各 b_i (または $\bar{b}_i$) は
 $(S^2, G_\sim)$ の 1-cell である.

定義 上の状況の h と α で, さらに α が non-singular
 な 2-cell であるとき $(S^2, G_\sim)$ から 2つの α , 2つの π を除去
 し, h を $\pi = \bar{b}_m \cdots \bar{b}_2 \bar{b}_1$ におきかえる変形を collapsing
 または C-変形 と呼ぶ.



$\mathbb{C}$ -変形は spine $S^2/G_\sim$ の方で見ると、free face h を利用して 2-cell α を collapse することになっている。

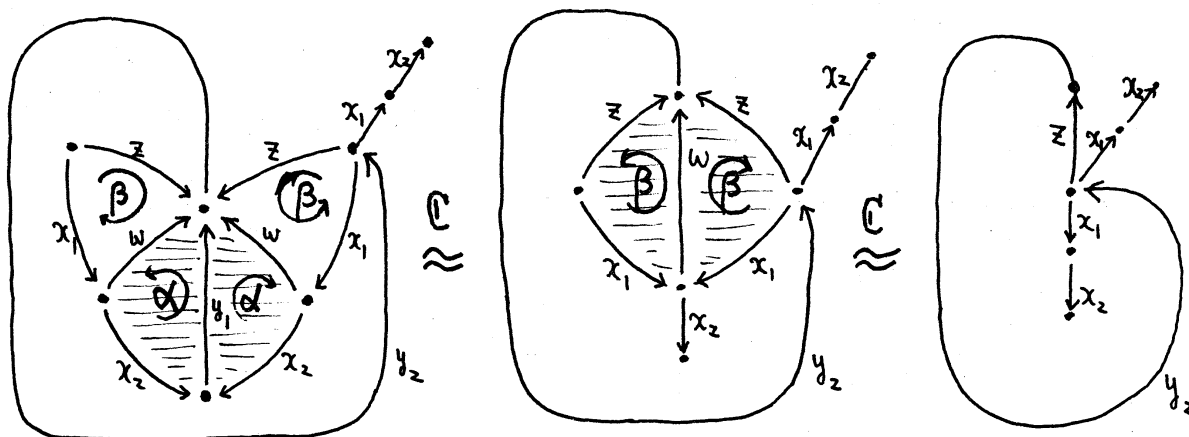
一方 $\mathbb{C}$ -変形を $(B^3, G_\sim)$ の方で見れば



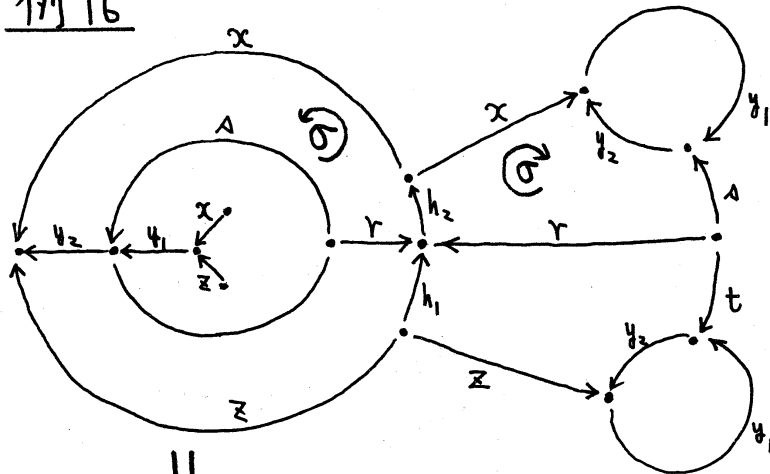
となり、 S^2 全体と 1T の同一視には影響を与えていない。

定理 5 $\mathbb{C}$ -変形によつて DS-diagram は“変らない”
 即ち、 $(S^2, G_\sim)$ から $\mathbb{C}$ -変形によつて $(S^2, G'_\sim)$ が得られるならば、 $(S^2, G_\sim) \approx (S^2, G'_\sim)$ である。

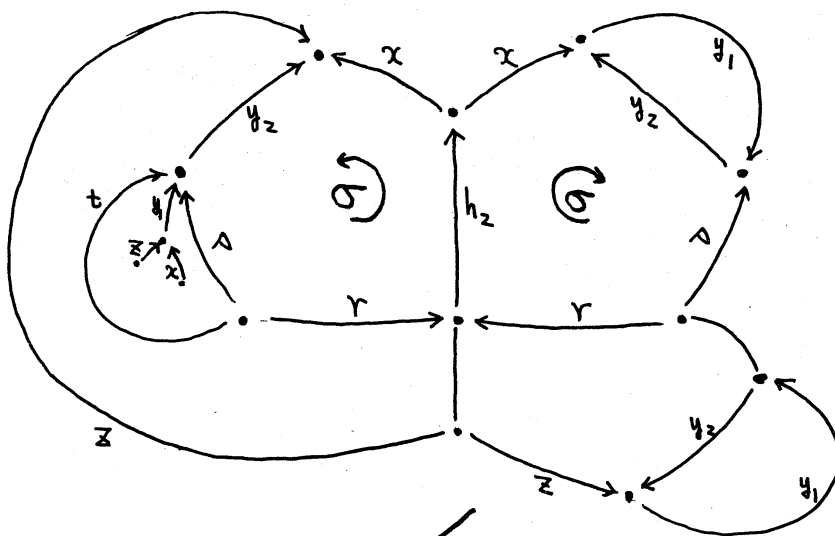
例 15



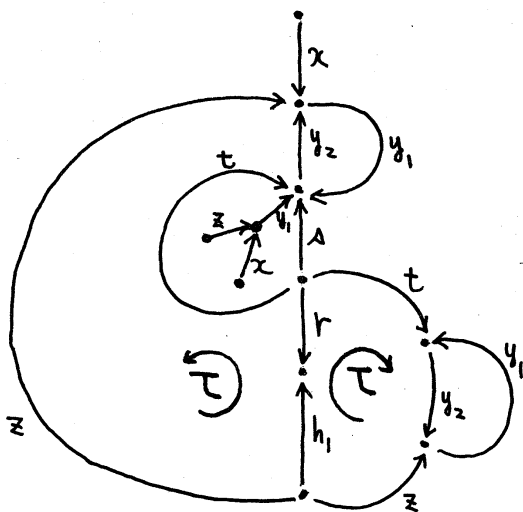
例 16



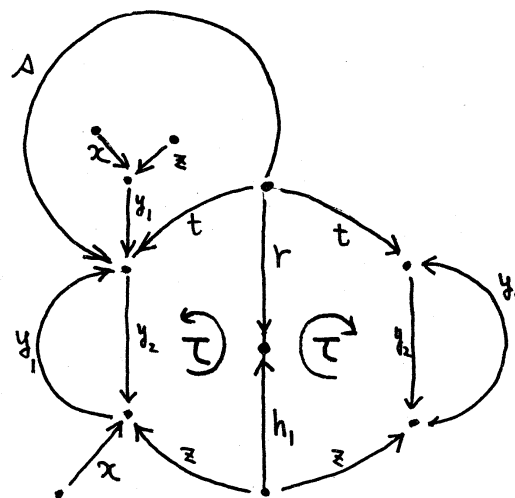
||

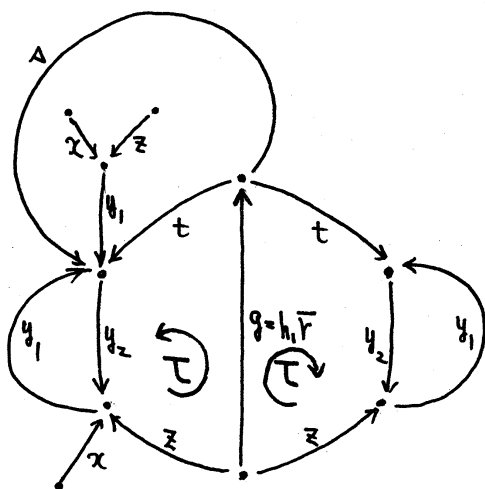


collapse

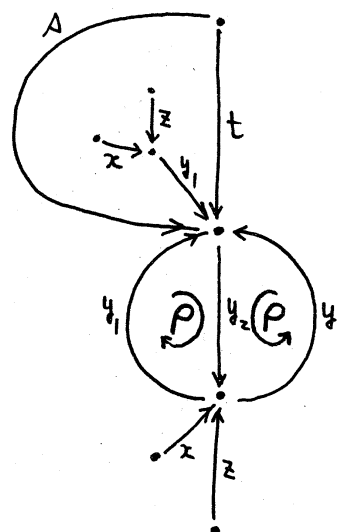


=

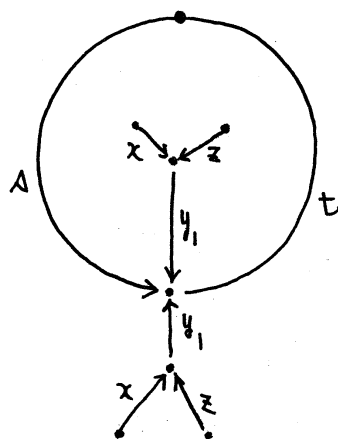
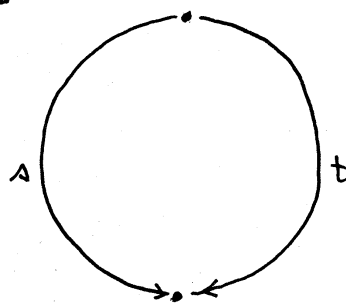
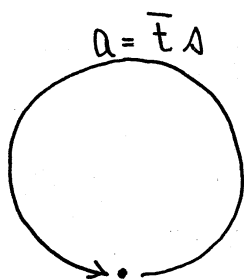




collapse



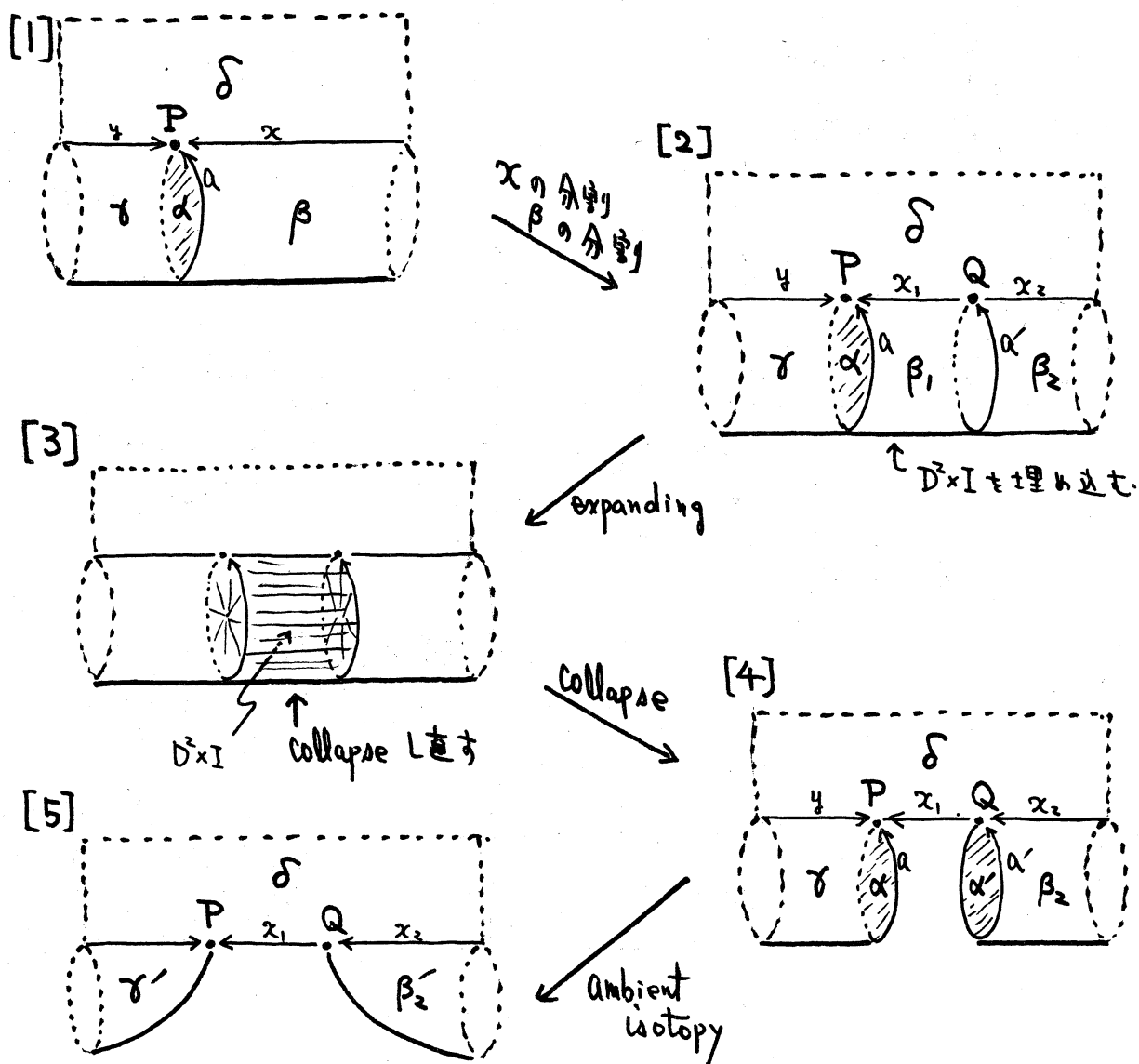
collapse


 $x, z, y_1 \in \partial A$
 $\overline{R}$

 $\bar{t} \cap \partial A$
 $\overline{P}$


§ 6. $D^2 \times I$ -変形 (その1)

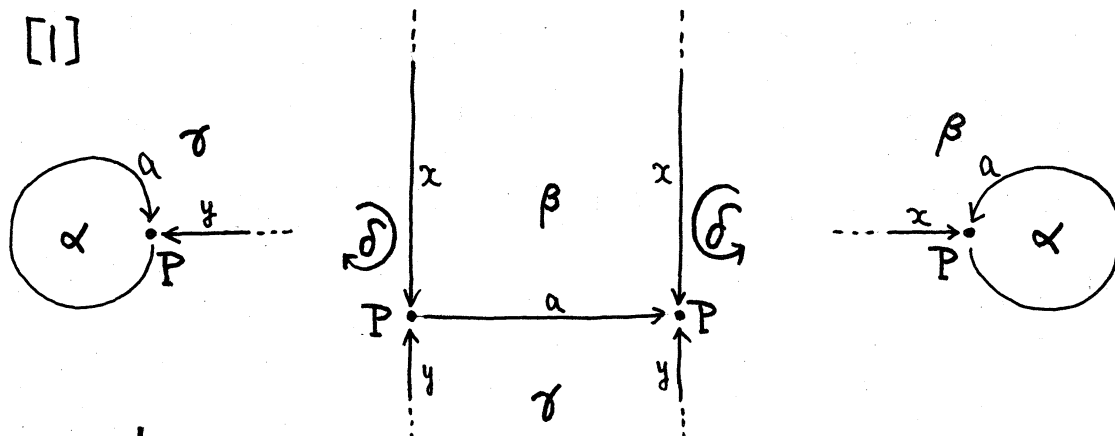
α を $(S^2, G_\sim)$ の non-singular 2-cell とする.

spine $S^2/G_\sim$ の方でよく知られたテクニックとして, α に厚みをつけて collapse の方向を変える方法がある. こゝではその特殊な場合について述べ, それを $(S^2, G_\sim)$ の言葉へ翻訳すること考える.



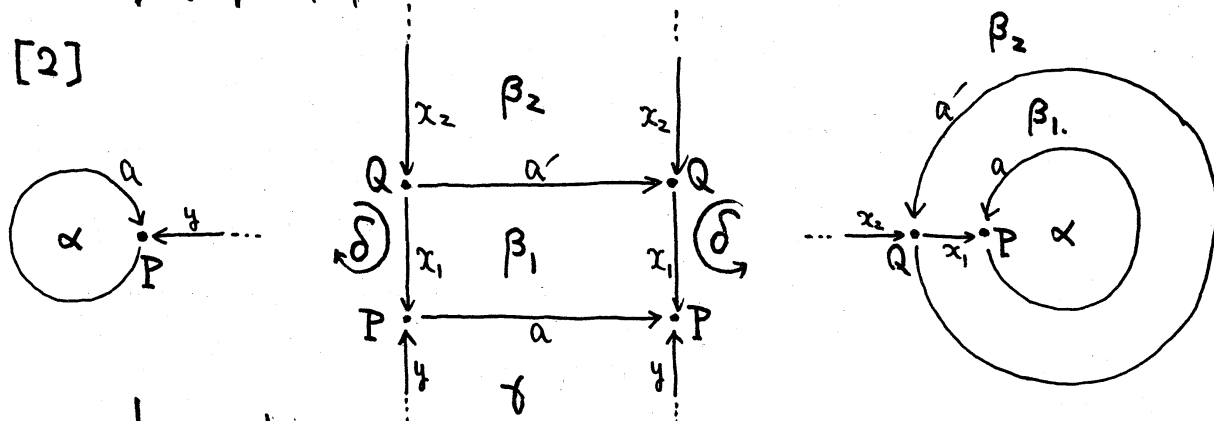
前図に見た Δ pine の変形 [1] ~ [5] も DS-diagram $\wedge$ 翻訳すると次のようになる.

[1]



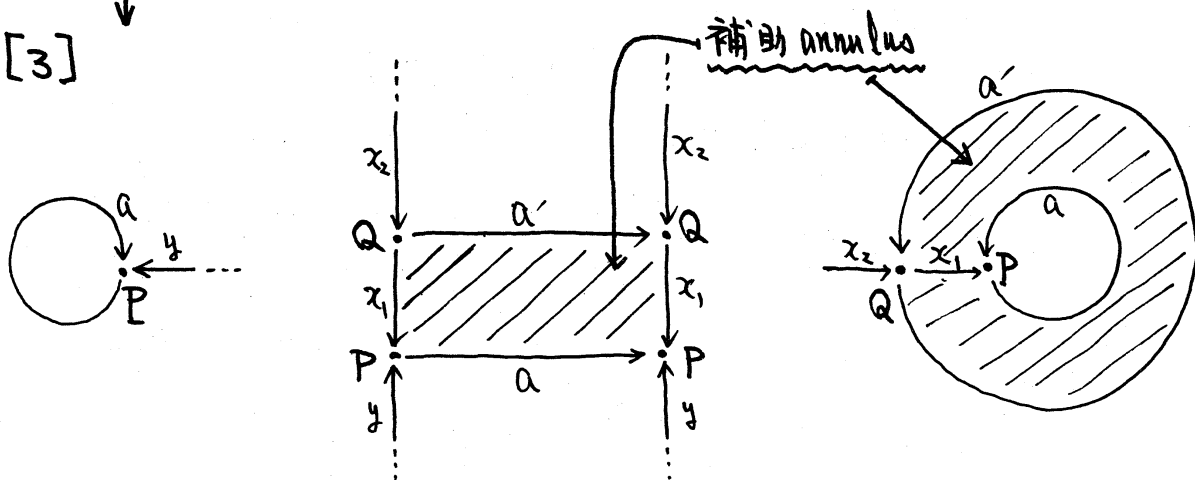
$$\begin{aligned} & \downarrow \mathbf{P}: x \rightarrow x_1 x_2 \\ & \downarrow \mathbf{Q}: \beta \rightarrow \beta_1 \beta_2 \end{aligned}$$

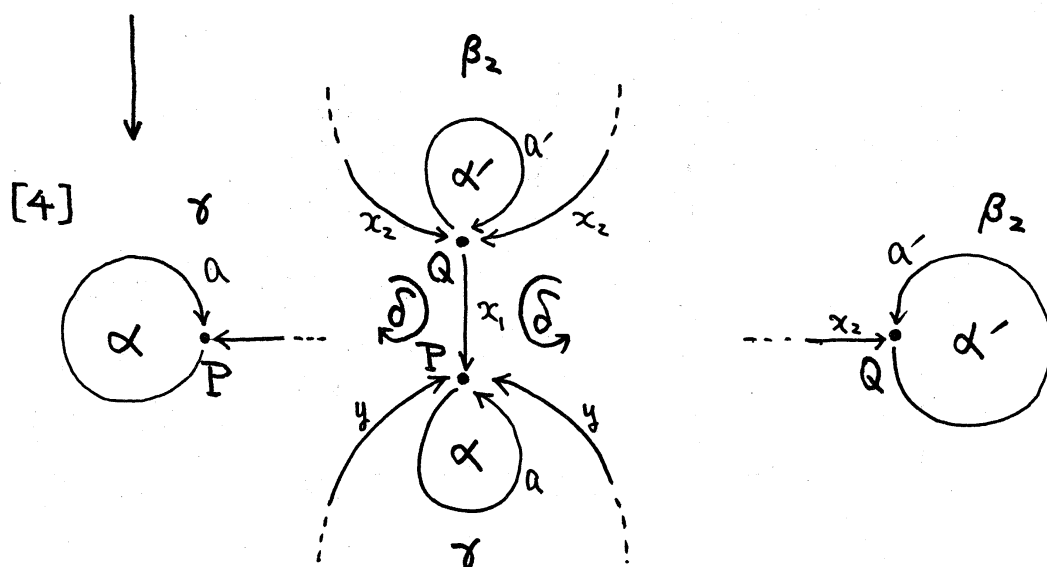
[2]



$\downarrow$ expanding

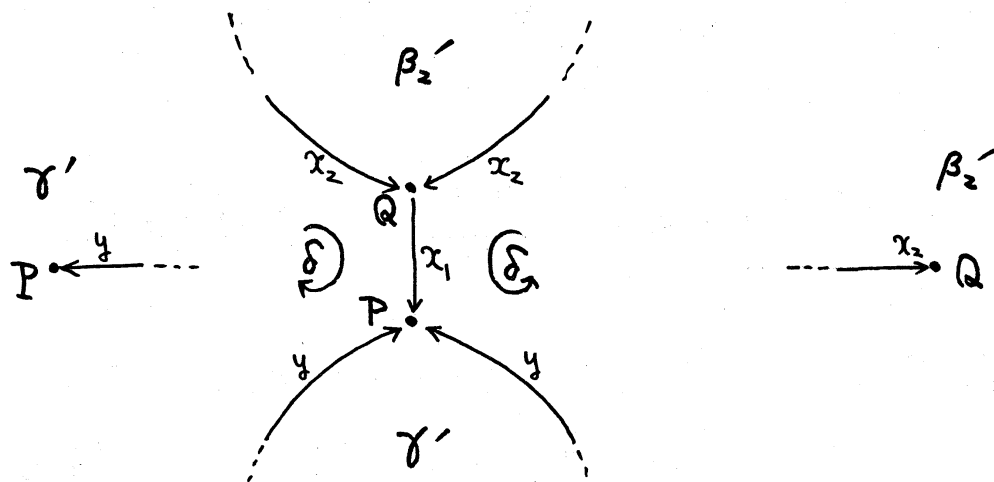
[3]



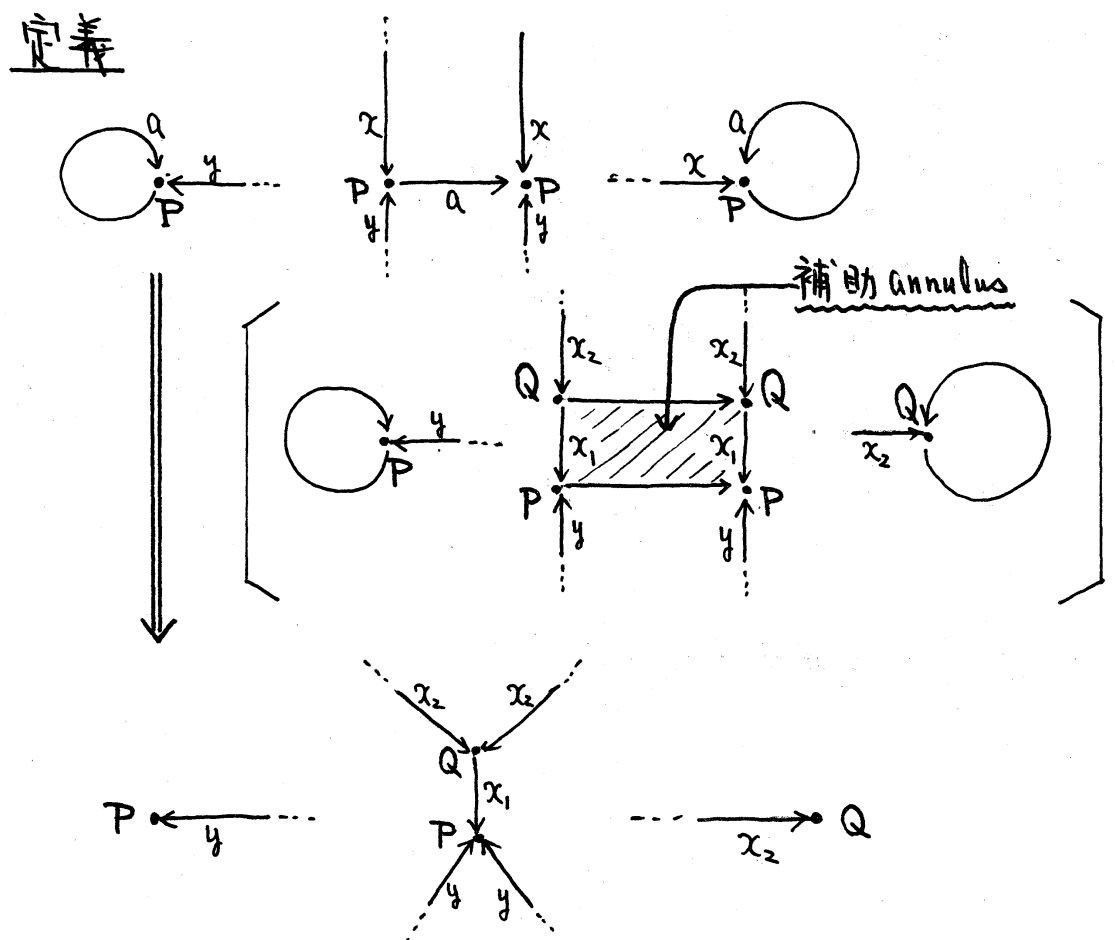


$\bar{Q}: 2\text{-cell } \alpha, \alpha' \text{ の除去}$

[5]



[1]から[5]の変形で β, γ は消滅してしまっ、ているから [5]において γ で文字 γ' の代り、 β で文字 β_2' の代りにしてもさしつかえない。このことを利用して次の定義を与えることにする。

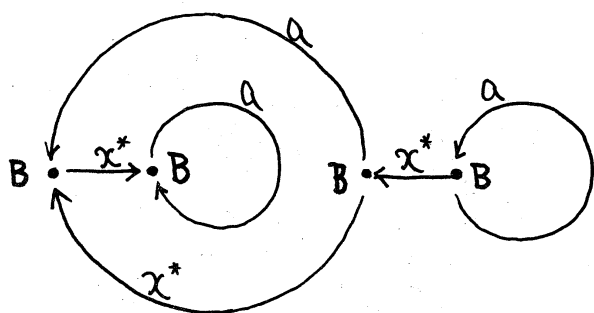


上図の変形を第1種の $D^2 \times I$ -変形 または D_1 -変形 と呼ぶ。

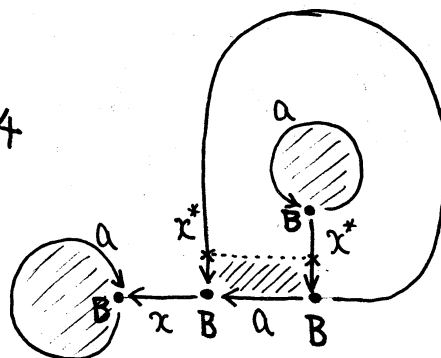
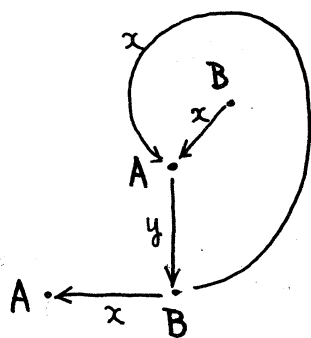
定理 6 D_1 -変形によつて DS-diagram は“変らない。”
 即ち、 $(S^2, G_{\sim})$ から D_1 -変形によつて $(S^2, G'_{\sim})$ が得られる
 ならば、 $(S^2, G_{\sim}) \approx (S^2, G'_{\sim})$ である。

以下、いくつかの DS-diagram について調べ、それらからすべて S^3 の DS-diagram であることを示す。

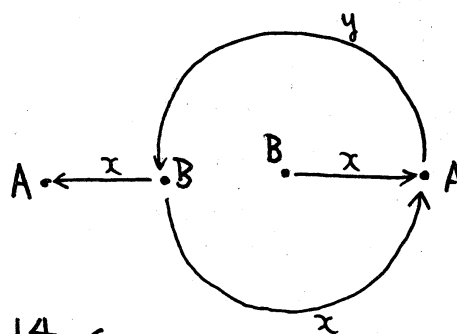
例 17



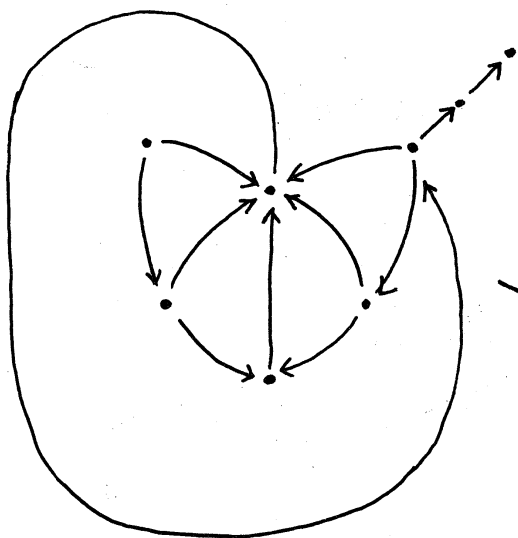
例 4

 D_1 -变形

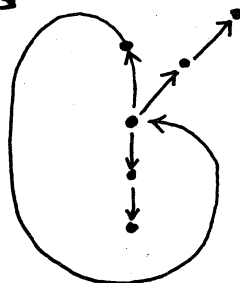
=



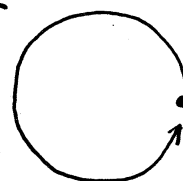
例 14



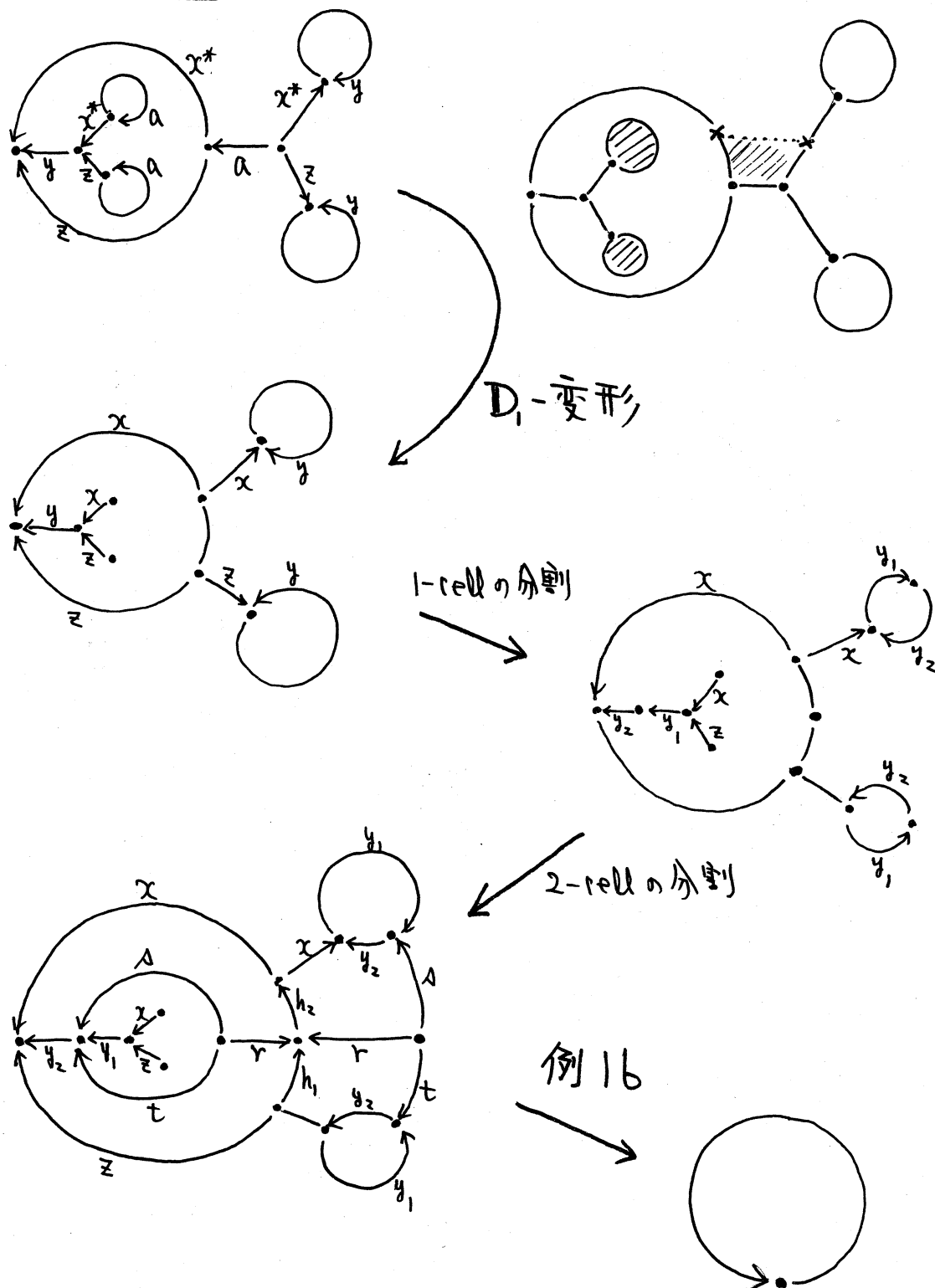
例 15



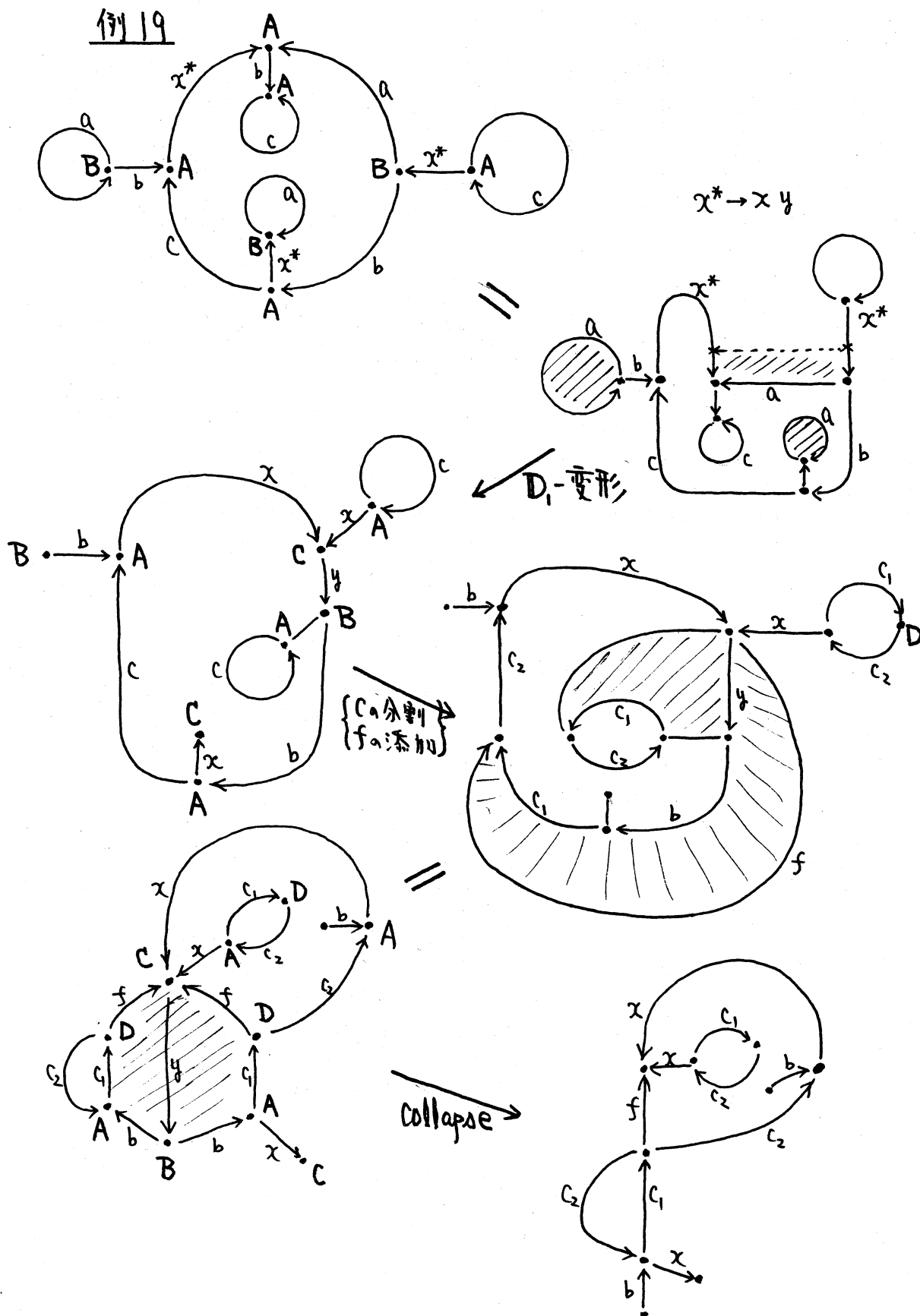
例 12



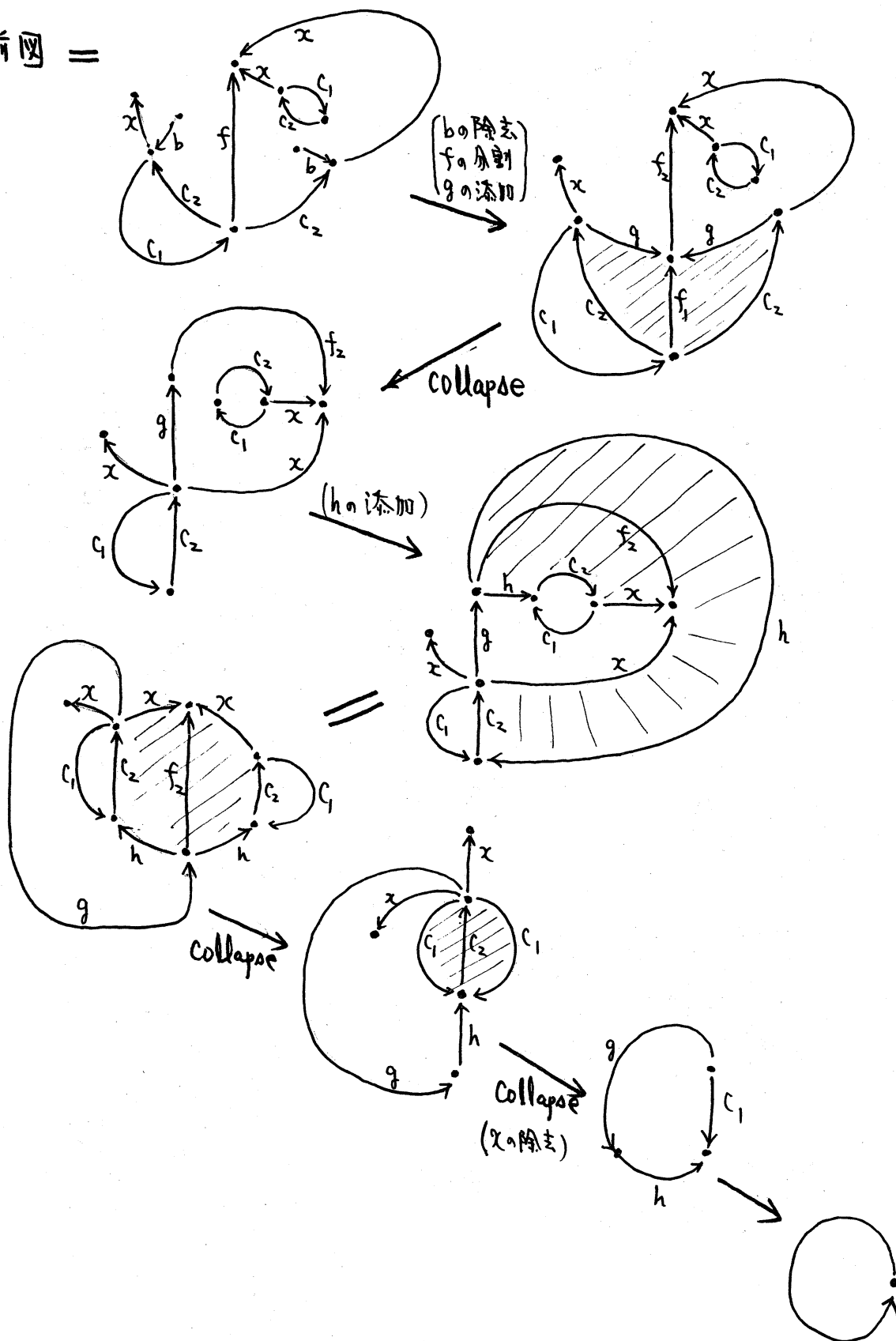
例 18



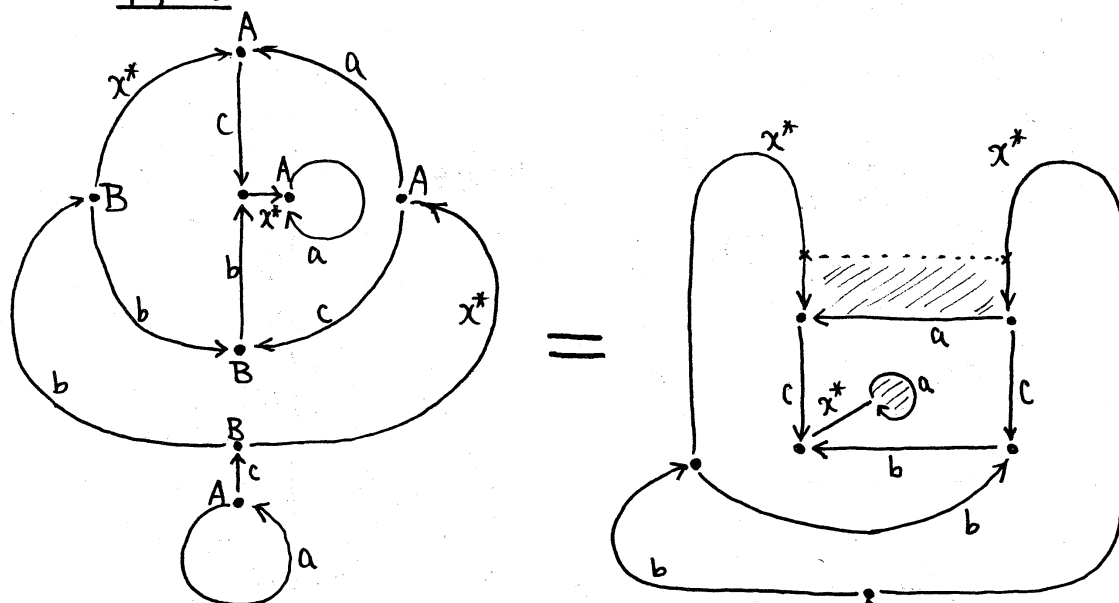
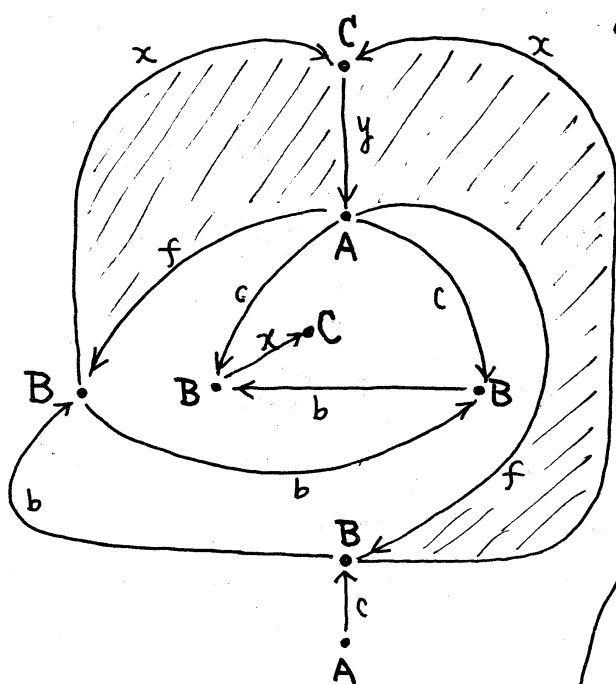
例 19



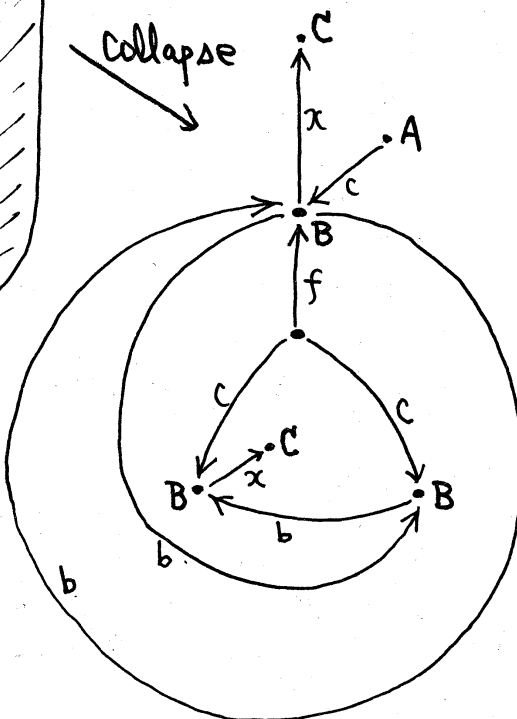
前图 =



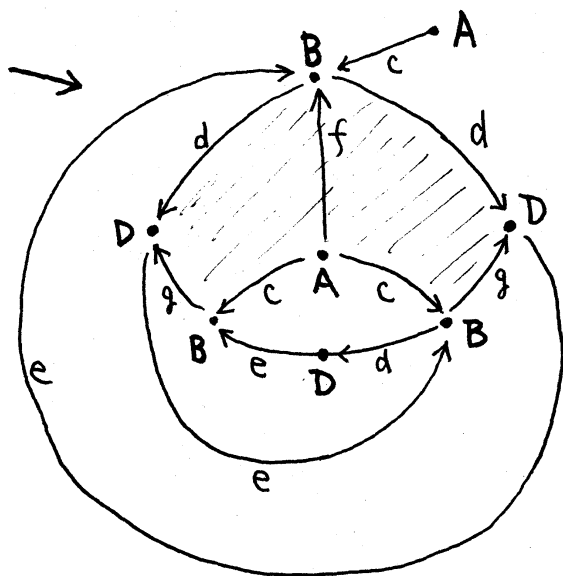
例 20


 $(x^* = xy)$
 $\swarrow$ D_1 -变形


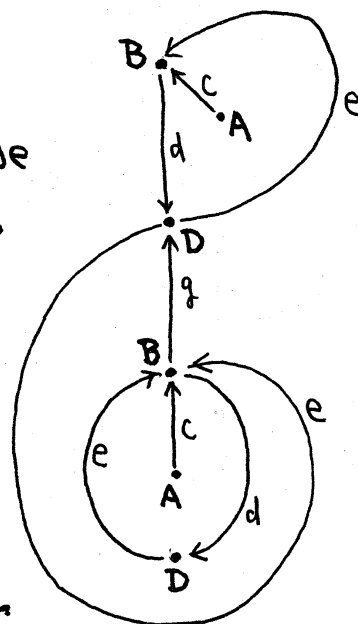
Collapse


 $\left(\begin{array}{l} x \text{ の除去} \\ b \text{ の分割} \rightarrow de \\ g \text{ の添加} \end{array} \right)$

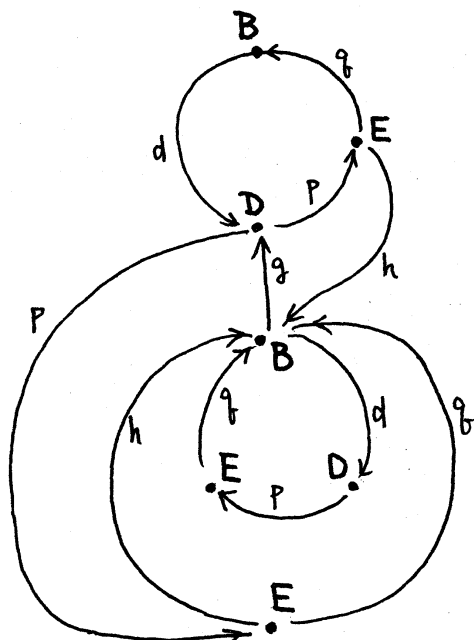
次頁



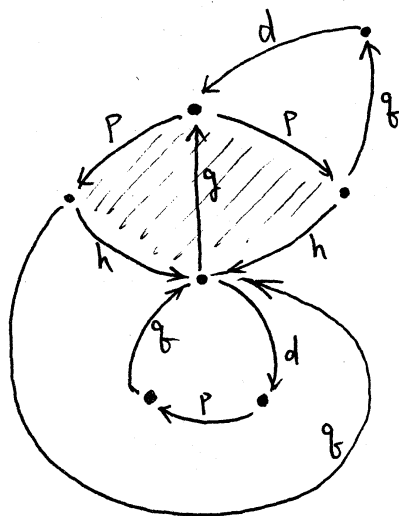
Collapse



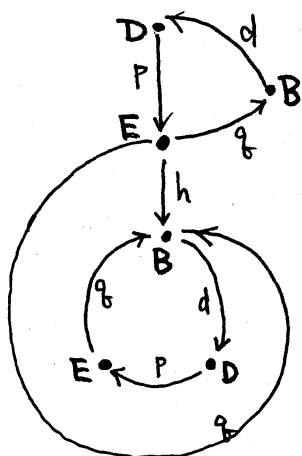
(Cの除去
eの分割 → P, q
hの添加)



=

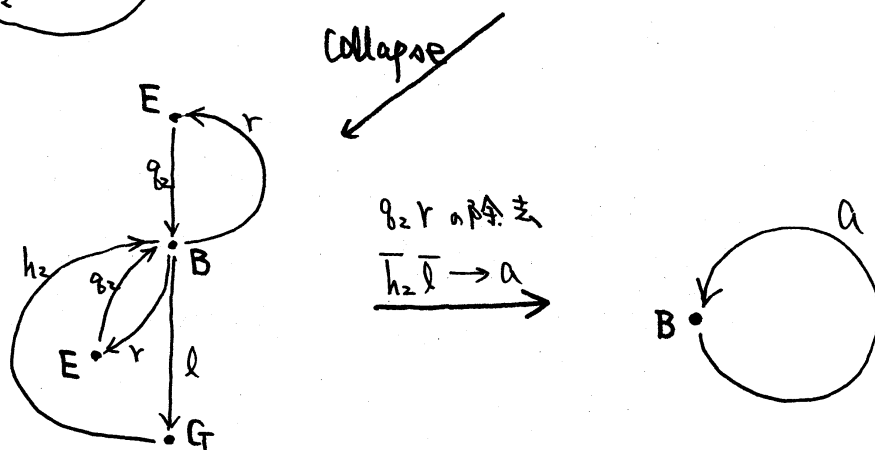
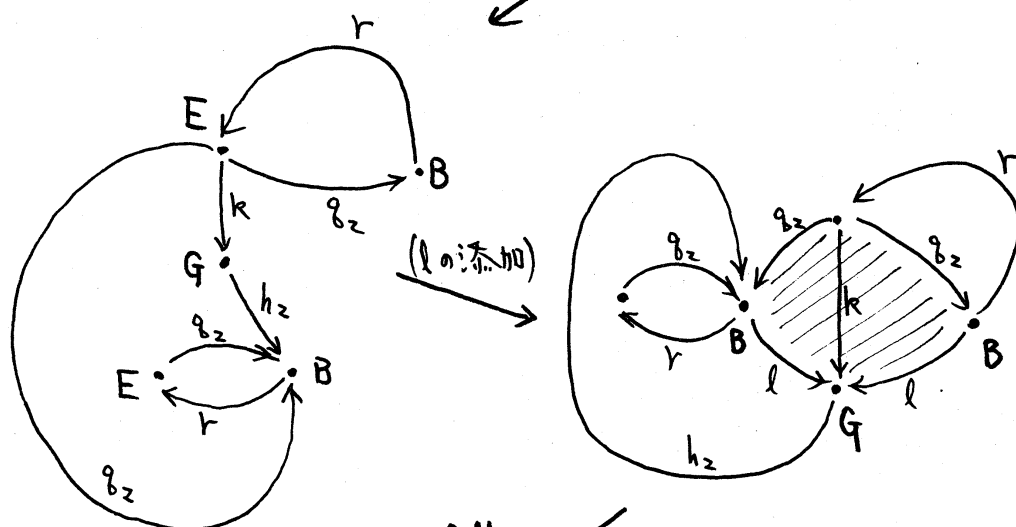
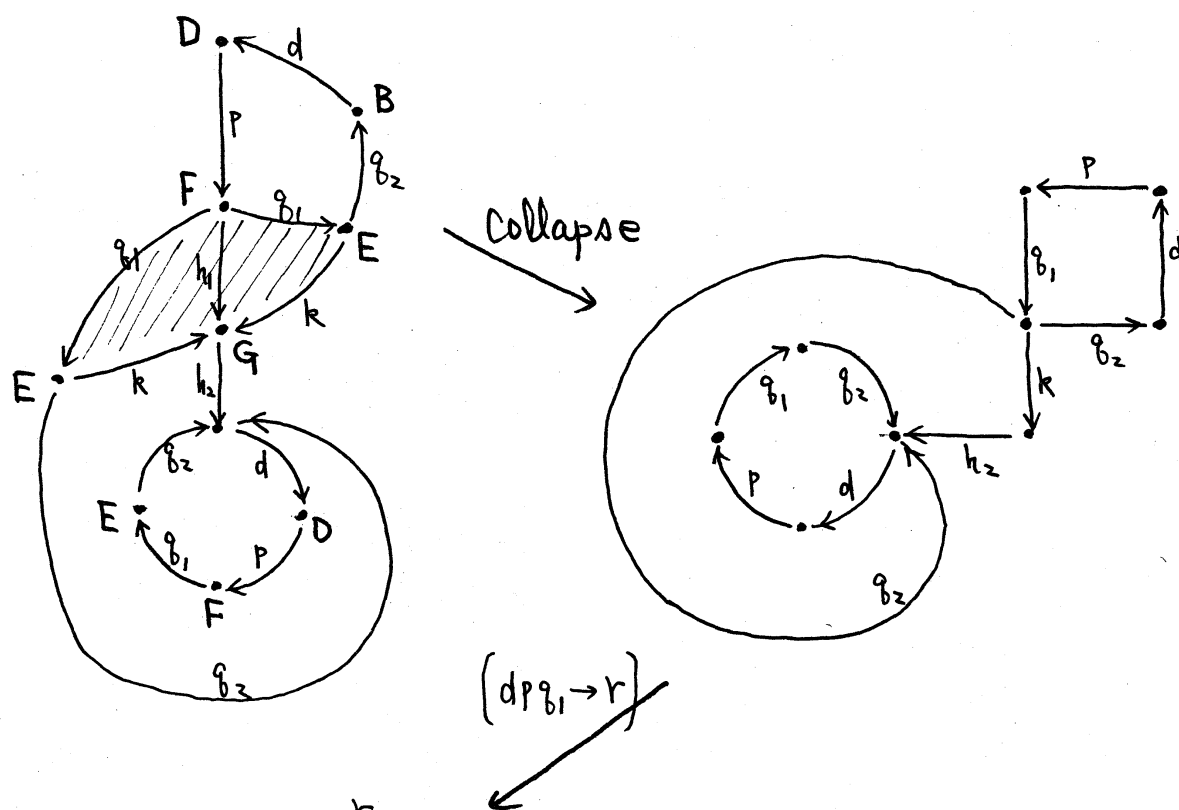


Collapse



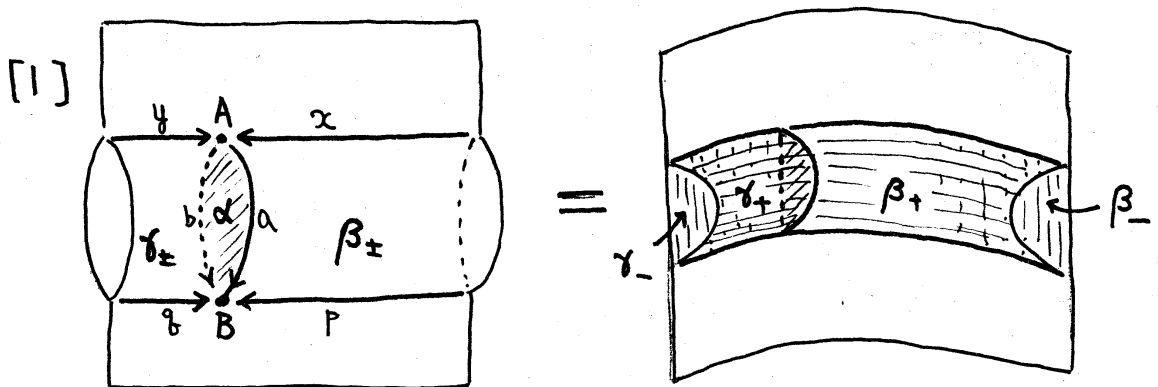
(qの分割 → q₁, q₂
hの分割 → h₁, h₂
kの添加)

次頁



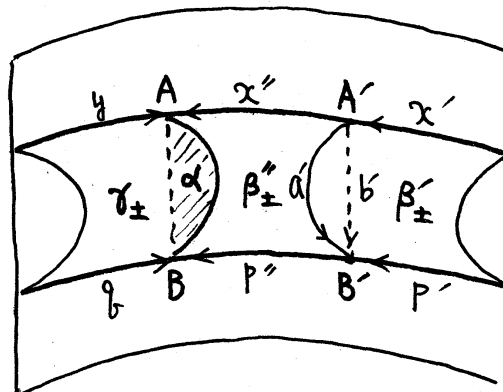
§7. $D^2 \times I$ -変形 (その2)

§6と同様な議論を行なってみる. こゝでは次の spine の変形について考える.

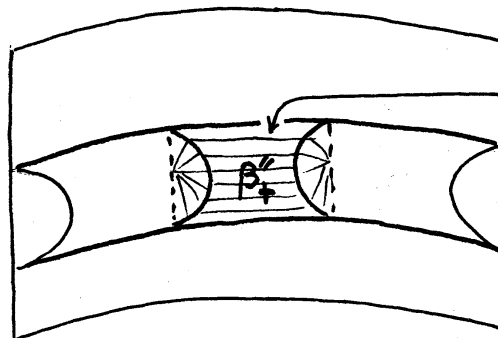


* +は前面, -は背面(右図では平らな方)をあらわすことにする

[2]

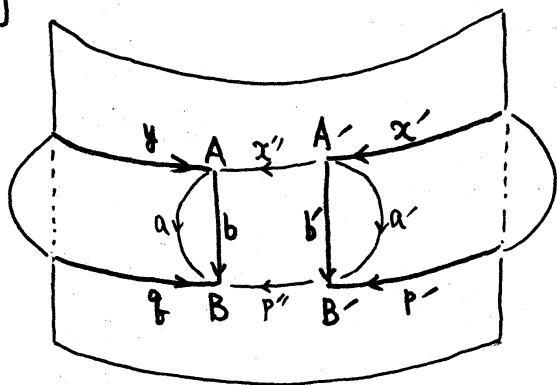


[3]

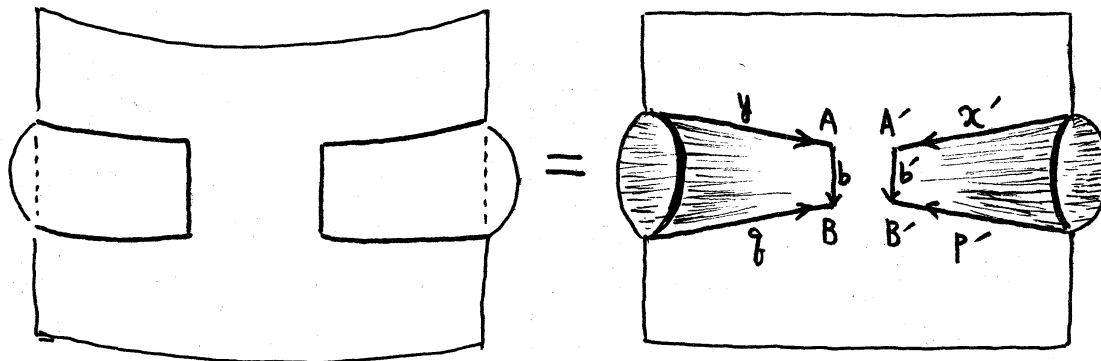


カマボコ状の $D^2 \times I$ を埋め込んで前面 β_+ から collapse 直す.

[4]

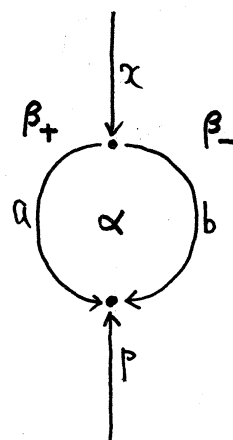
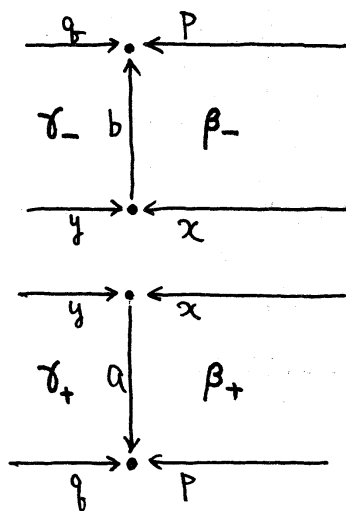
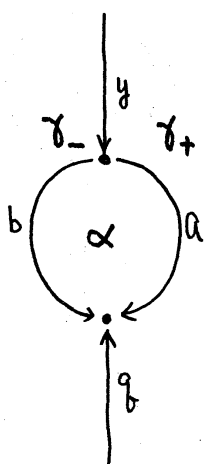


[5]

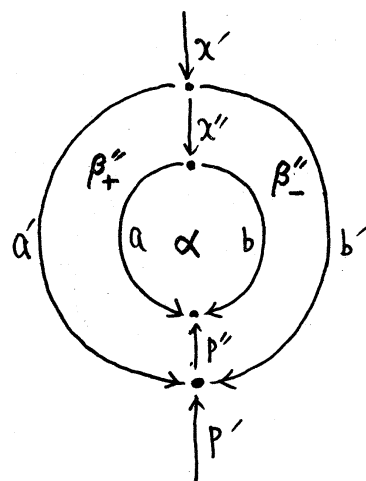
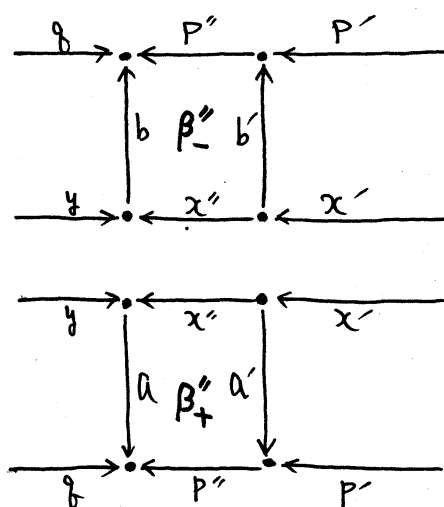
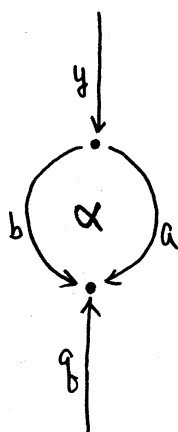


この変形に対応する DS-diagram の変形は以下のよう
になる。

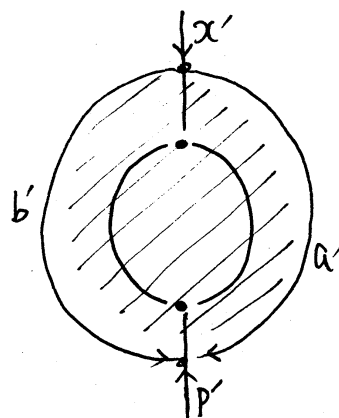
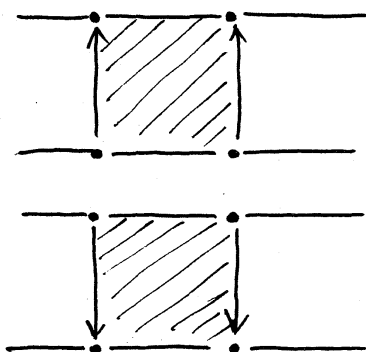
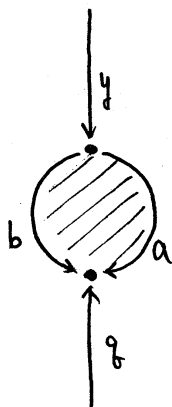
[1]



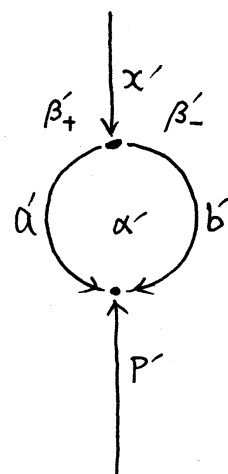
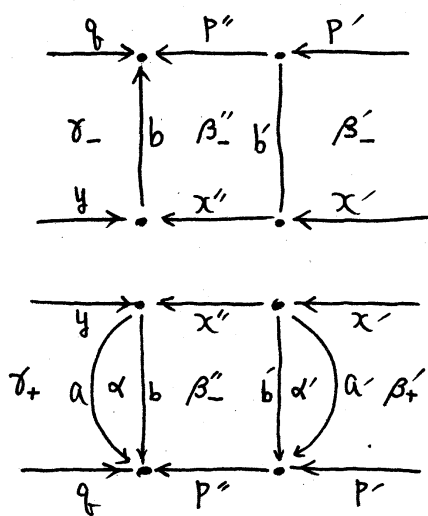
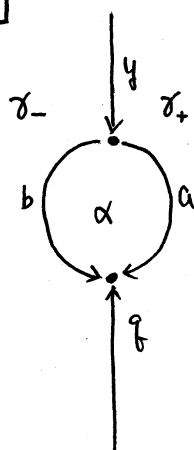
[2]



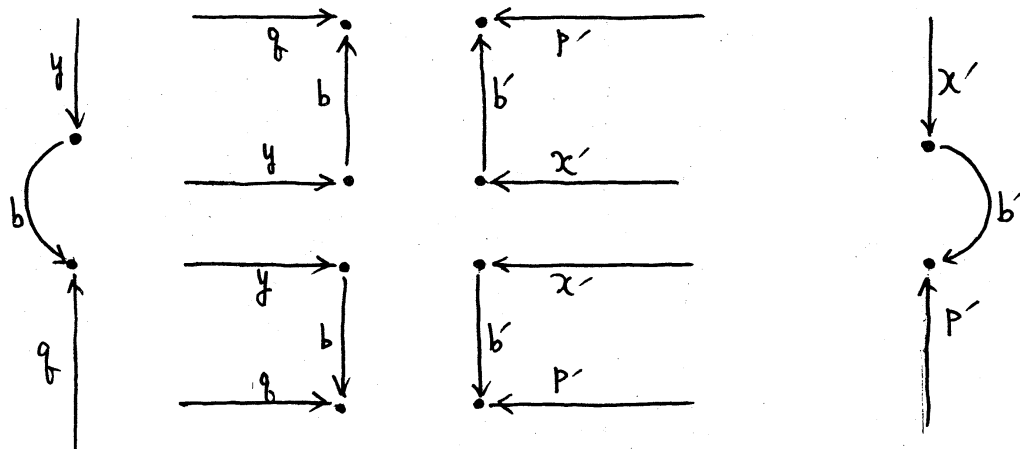
[3]



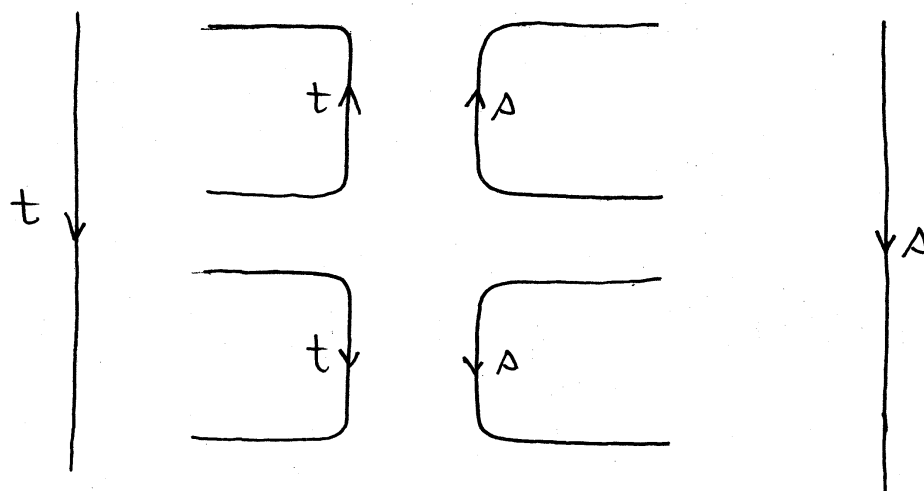
[4]



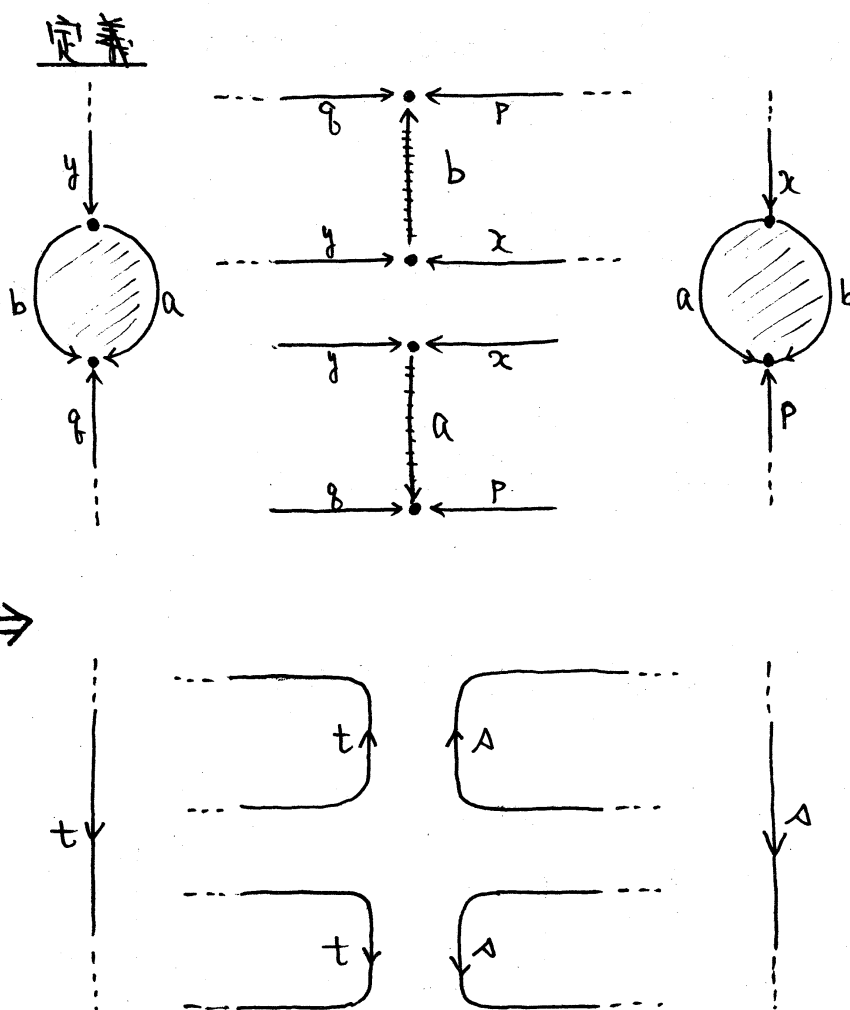
[5] [4] から q, q', x', p' を除去 ($\bar{Q}$ -変形) すると...



$$\begin{cases} \Delta = x' b' \bar{p}' \\ t = y b \bar{q} \end{cases} \quad \text{で置きかえる ($\bar{P}$ -変形) と.}$$



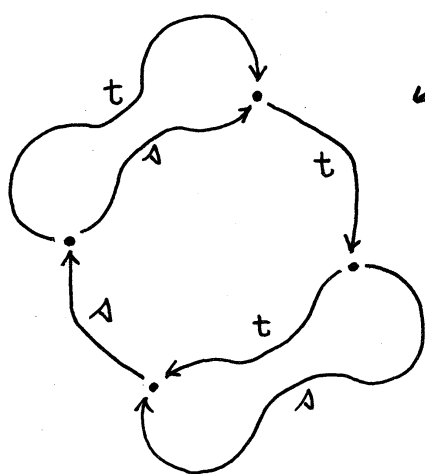
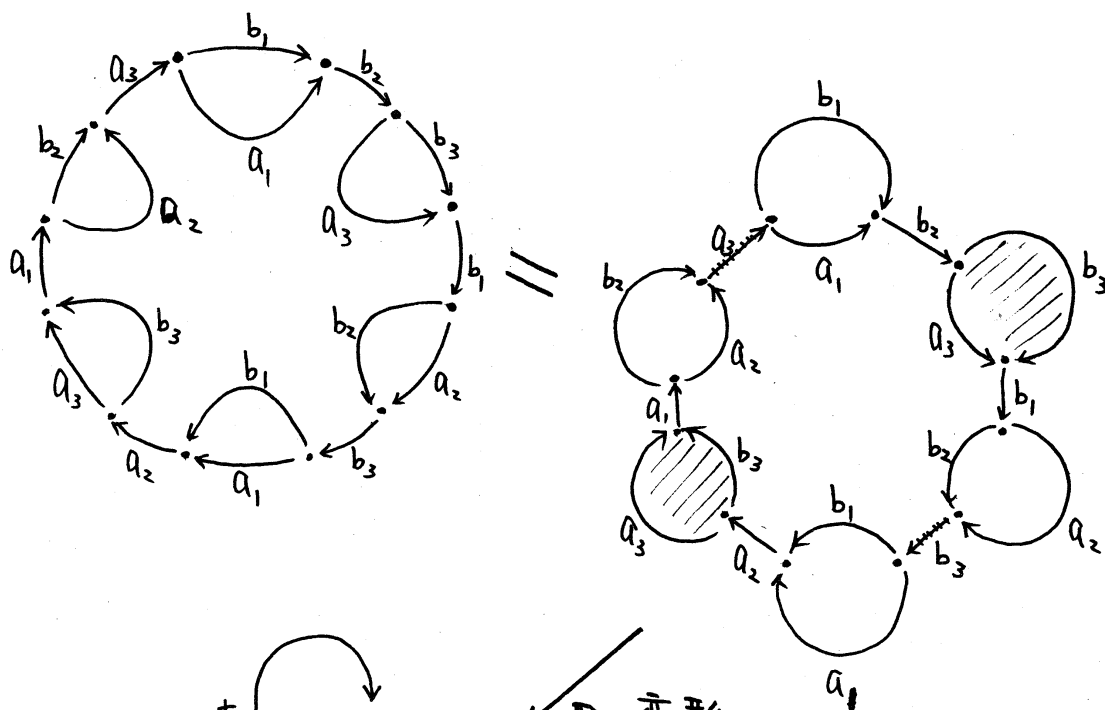
上で見た DS-diagram の [1] から [5] に移る変形を D_2 -変形の定義にした。



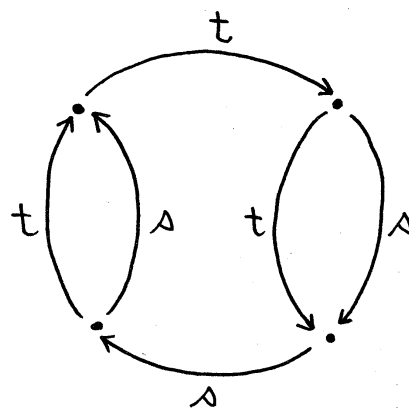
なる変形を第2種の $D^2 \times I$ -変形 または D_2 -変形と呼ぶ。

定理7 D_2 -変形によつて、DS-diagramは“変らない”
 即ち、 D_2 -変形によつて (S^2, G) から (S^2, G') が得られるならば
 $(S^2, G) \approx (S^2, G')$ である。

例 21



$\swarrow$ D_2 -変形



(完)