

確率微分方程式の離散近似

齊藤 善弘 (聖徳学園女子短期大学)
三井 斌友 (名古屋大学・人間情報)

1. 確率微分方程式

スカラー自励型 Ito 型確率微分方程式 (SDE) に対する確率初期値問題 (SIVP)

$$\begin{cases} dX(t) = f(X)dt + g(X)dW(t), \\ X(0) = x \quad t \in [0, T] \end{cases} \quad (1)$$

を考える。ここで、 $W(t)$ は標準 Wiener 過程である。これは、次の条件を満たす標準 Gauss 過程である。

- (i) $P(W(0) = 0) = 1$
- (ii) $E(W(t)) = 0 \quad \text{all } t \in [0, \infty]$
- (iii) $C_W(t, s) = E(W(t)W(s)) = \min(t, s)$

SIVP(1) は次の確率積分方程式と同値になる。

$$X(t) = x + \int_0^t f(X(s))ds + \int_0^t g(X(s))dW(s)$$

ここで 2 番目の積分は Ito 型確率積分と呼ばれ次式で定義される。

$$\int_0^t g(X(s))dW(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} g(X(t_k))\Delta W_k$$

また、 $\Delta W_k = W(t_{k+1}) - W(t_k)$, $h = \max(t_{k+1} - t_k)$ であり、極限は 2 乗平均の意味で取るものとする。

確率初期値問題 (1) の解 $X(t)$ は確率過程 $X(t, \omega)$ ($\omega \in \Omega$) となる。つまり、時間 t を固定したとき $X(t, \cdot)$ は確率変数であり、また、標本空間 Ω の元 ω を固定したとき $X(\cdot, \omega)$ を確率過程 $X(t)$ の見本函数と呼ぶ。

Fig. 1 に Wiener 過程の 1 つの見本函数を示す。

SDE の例として、Langevin 方程式

$$dX(t) = -aXdt + b dW(t)$$

がある。ここで、 a と b は正の定数である。

2. 数値スキーム

数値スキームは解 $X(t)$ の見本函数の近似列を生成し、求めるものに依じて、strong, weak, path-wise の 3 種類のスキームが提案されている。ここでは strong について考察しよう。もっとも基本的な例として Euler-Maruyama スキームがあげられる。

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + f(\bar{X}_n)\Delta t_n + g(\bar{X}_n)\Delta W_n$$

この数値例を Fig. 2 に示す。ただし、Heun スキームは 2 段の Runge-Kutta 法の確率版である ([5])。SDE(1) に対して、数値スキームの誤差と order (strong order) を定義する。

定義 1 SIVP (1) の理論解と離散近似解をそれぞれ、 $X(t)$, $\bar{X}_n$ とする。 $t = t_{n-1}$ から $t = t_n$ までの局所誤差 e_l , $t = 0$ から $t = T = t_N$ までの大域誤差 e_g はそれぞれ、次式のような条件付平均値で定義される。

$$e_l = E(|X(t_n) - \bar{X}_n|^2 | X(t_{n-1}) = \bar{X}_{n-1} = \bar{x}_{n-1})$$

$$e_g = E(|X(T) - \bar{X}_N|^2 | X_0 = \bar{X}_0 = x)$$

また、数値スキーム $\bar{X}_n$ が局所 order γ , 大域 order β をもつとはそれぞれ

$$e_l = O(h^{\gamma+1}) \quad (h \downarrow 0)$$

$$e_g = O(h^\beta) \quad (h \downarrow 0)$$

が成り立つことである。

Remark. ODE ではあるゆるい条件の下 $\gamma = \beta$ が成り立つ。しかし SDE では

$$\gamma \geq \beta$$

である。

上で述べた数値スキームの例として、Taylor スキーム ($\gamma = 3, \beta = 2$)

$$\begin{aligned} \bar{X}_{n+1} = & \bar{X}_n + f_n h + g_n \xi_{n,1} h^{\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1}{2} [g'g]_n (\xi_{n,1}^2 - 1) h \\ & + \frac{1}{2} [f'g]_n (\xi_{n,1} + \frac{\xi_{n,2}}{\sqrt{3}}) h^{\frac{3}{2}} \\ & + \frac{1}{2} [g'f + \frac{1}{2} g''g^2]_n (\xi_{n,1} - \frac{\xi_{n,2}}{\sqrt{3}}) h^{\frac{3}{2}} \\ & + \frac{1}{6} [g'^2g + g''g^2]_n (\xi_{n,1}^3 - 3\xi_{n,1}) h^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

がある (この Taylor スキームの導出法は文献[1, 4] を参照せよ)。ここで、 $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}$ は互いに独立な平均 0, 分散 1 の正規乱数である。なお大域 order 3 にするためには、次のように 1 つ項を加える必要がある。

$$\begin{aligned} \bar{X}_{n+1} = & \bar{X}_n + f_n h + g_n \xi_{n,1} h^{\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1}{2} [g'g]_n (\xi_{n,1}^2 - 1) h \\ & + \frac{1}{2} [f'g]_n (\xi_{n,1} + \frac{\xi_{n,2}}{\sqrt{3}}) h^{\frac{3}{2}} \\ & + \frac{1}{2} [g'f + \frac{1}{2} g''g^2]_n (\xi_{n,1} - \frac{\xi_{n,2}}{\sqrt{3}}) h^{\frac{3}{2}} \\ & + \frac{1}{6} [g'^2g + g''g^2]_n (\xi_{n,1}^3 - 3\xi_{n,1}) h^{\frac{3}{2}} \\ & + \frac{1}{2} [f'f + \frac{1}{2} f''g^2]_n h^2 \end{aligned}$$

3. 誤差解析

大域誤差を直接見積もることは困難なので、2段階に分けることを我々は提案した([7])。これは次式のように誤差を2つの部分(stochastic, deterministic)に分けて評価する方法である。

$$\|X(T) - \bar{X}_N\| \leq \underbrace{\|X(T) - \hat{X}_N\|}_{\text{(stochastic part)}} + \underbrace{\|\hat{X}_N - \bar{X}_N\|}_{\text{(deterministic part)}}$$

ここで、

$$\|X\| = \{\mathbf{E}(|X|^2)\}^{\frac{1}{2}},$$

$\hat{X}_N$ は realized exact solution(具体的表現については数値例1を見よ)と呼ぶことにする。deterministic part では数値スキームの離散化誤差が、stochastic part では擬似乱数の誤差が主に入ってくることが予想されるので、ここでは deterministic part の誤差を評価することにする。数値スキームとして前節で紹介した2つの Taylor スキームの大域 order の特性を数値的に確認してみよう。

数値例1.

$$\begin{cases} dX &= Xdt + XdW(t), \quad t \in [0, 0.5] \\ X(0) &= 1. \end{cases} \quad (2)$$

submartingale の方程式(2)の理論解 $X(t)$ と realized exact solution $\hat{X}_n$ はそれぞれ、

$$X(t) = \exp\left\{\frac{1}{2}t + W(t)\right\}$$

$$\hat{X}_n = \exp\left\{\frac{1}{2}t_n + \hat{W}_n\right\}$$

$$\hat{W}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_{i,1} h^{\frac{1}{2}}$$

となる(この解の様子をグラフにしたのが Fig. 3 である)。サンプル数は 10000, stepsize は $h = 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}$ とし、 $t = 0.5$ のときの大域誤差の deterministic part は次式で見積もることができる。

$$e = \frac{1}{10000} \sum_{k=1}^{10000} (\hat{X}_N^k - \bar{X}_N^k)^2$$

この実験結果のグラフ (Fig. 4) は、大域 order の特性をほぼ反映している。

4. 線型安定性解析

安定性に関して我々は3種類の概念を提案した。まず初めに M -安定性について述べる。

(1) M -安定性 ([6])

テスト方程式 (supermartingale eq.)

$$\begin{cases} dX(t) &= \lambda X dt + \mu X dW(t) \\ X(0) &= 1, \quad t \in [0, T], \lambda < 0, \mu \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

方程式(3)の理論解は

$$X(t) = \exp\left\{\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)t + \mu W(t)\right\}$$

となる。 M -安定性とは、方程式(3)の解の1次,2次モーメントの数値的安定性をみる概念である。

(i)1次モーメント $Y = EX$ に従う ODE は次式で与えられる。

$$\begin{cases} dY &= \lambda Y dt \\ Y(0) &= 1 \end{cases}$$

よって、この場合は ODE の線型安定性解析に帰着する。

(ii)2次モーメント $Z = EX^2$ に従う ODE は次式で与えられる。

$$\begin{cases} dZ &= (2\lambda + \mu^2)Z dt \\ Z(0) &= 1. \end{cases}$$

このとき、1次元の場合は次に述べる MS -安定性と同じになる。

(2) MS -安定性 ([8])

M -安定性と同様、次のテスト方程式 (supermartingale eq.)

$$\begin{cases} dX(t) &= \lambda X dt + \mu X dW(t) \\ X(0) &= 1, \quad t \in [0, T], \lambda < 0, \mu \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

を考える。方程式(4)の理論解は

$$X(t) = \exp\left\{\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)t + \mu W(t)\right\}$$

となる。このとき次の2乗平均ノルム

$$\|X\| = \{E|X|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

を導入し、方程式(4)の解の特性を見ると、次のことが容易にわかる。

$$\|X(t)\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad \text{if} \quad 2\lambda + \mu^2 < 0$$

よって、この解の特性に対して、数値スキームが

$$\|\bar{X}_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすか調べる。数値スキームをテスト方程式(4)に適用してできる数値解 $\bar{X}_n$ に対して、2乗平均すると、 $\bar{Y}_n = E|\bar{X}_n|^2$ とおいたとき

$$\bar{Y}_{n+1} = R(\bar{h}, k)\bar{Y}_n$$

が成り立つ。ここで、 $\bar{h} = h\lambda$, $k = -\mu^2/\lambda$ であり、関数 R を安定性関数 (stability function) と呼ぶ。よって数値解に対して MS -安定性は次のように置き換えることができる。

$$\bar{Y}_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |R(\bar{h}, k)| < 1$$

この R に関して $|R(\bar{h}, k)| < 1$ が成り立つとき、 $(\bar{h}, k)$ に対して数値スキームは MS -安定であるという。

例えば、次の2つのスキームについて考えてみよう。

(i) Euler-Maruyama スキーム ($\gamma = 1, \beta = 1$)

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + f_n h + g_n \Delta W_n \quad (5)$$

(ii) backward Euler スキーム ($\gamma = 1, \beta = 1$)

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + f_{n+1} h + g_n \Delta W_n \quad (6)$$

このとき、安定性関数は次のようになる。

(i) Euler-Maruyama スキーム

$$R(\bar{h}, k) = (1 + \bar{h})^2 - k\bar{h} \quad (7)$$

(ii) backward Euler スキーム

$$R(\bar{h}, k) = \frac{1 - k\bar{h}}{(1 - \bar{h})^2} \quad (8)$$

この安定領域 $\mathcal{R} (= \{(\bar{h}, k); |R(\bar{h}, k)| < 1\})$ を図示するとそれぞれ Fig 2 と Fig 3 である。上にあげた例について、安定性を裏付ける数値実験の結果をあげよう。

数値例 2

$$\begin{cases} dX(t) = -100Xdt + 10XdW(t), \\ X(0) = 1, \quad t \in [0, T] \end{cases}$$

ステップ幅 $h = 0.005$ (i.e. $(\bar{h}, k) = (-0.5, 1)$), 0.01 (i.e. $(\bar{h}, k) = (-1, 1)$) の時の結果を Table 1 に示す。コンピュータは Macintosh SE/30 を使用し、サンプル数は 20000 とした。

t	$\ X\ ^2$			
	Euler-Maruyama		backward Euler	
	(i)	(ii)	(i)	(ii)
0.010	0.5660	1.0140	0.4503	0.5090
0.020	0.3289	0.9955	0.2039	0.2527
0.030	0.1680	1.0696	0.0873	0.1295
0.040	0.1020	0.9826	0.0429	0.0652
0.050	0.0444	0.9631	0.0163	0.0303
0.060	0.0305	0.9724	0.0074	0.0150
0.070	0.0137	0.7908	0.0037	0.0079
0.080	0.0132	0.5820	0.0009	0.0042
0.090	0.0008	0.4826	0.0007	0.0016
0.100	0.0001	0.7225	0.0000	0.0009

Table 1

またこの結果のグラフを Fig. 7a, 7b と Fig. 8a, 8b に示しておく。

(3) T -安定性 ([9])

M -, MS -安定性と同じように次のテスト方程式を考える。

$$\begin{cases} dX(t) = \lambda X dt + \mu X dW(t) \\ X(0) = 1, \quad t \in [0, T] \end{cases} \quad (9)$$

理論解は

$$X(t) = \exp\left\{\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)t + \mu W(t)\right\}$$

となる。この解を見本函数としてみた場合次の関係式が成り立つ。

$$|X(t)| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad \text{if} \quad \lambda - \frac{1}{2}\mu^2 < 0$$

この解の定性的性質を数値スキームに考慮した概念が T -安定性である。

定義 2 ある driving process のもとで数値スキームをテスト方程式 (9) に適用したとき、得られた数値解が、

$$|\bar{X}_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすならば、その driving process を備えた数値スキームは T -安定であるという。

この T -安定性の様子をグラフにしたのが Fig. 9 である。

Remark.

$$MS\text{-安定} \Rightarrow T\text{-安定}$$

例えば Euler-Maruyama スキーム:

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + f(\bar{X}_n)h + g(\bar{X}_n)\Delta W_n$$

の場合は次のように考える。ここで h はステップ幅、 $\Delta W_n = U_n\sqrt{h}$ で U_n は $N(0, 1)$, two-, three- point distributed random variable(d.r.v.). である。two-, three-point d.r.v. はそれぞれ次の統計的性質を満たす確率変数である。

i) two-point d.r.v.

$$P(U_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$$

ii) three-point d.r.v.

$$P(U_n = \pm\sqrt{3}) = \frac{1}{6},$$

$$P(U_n = 0) = \frac{2}{3}$$

さて、Euler-Maruyama scheme に対する T -安定領域を求めよう。

まず、 M -, MS -安定性と同様、安定性関数を導出する。 T -安定の場合は次のように考える。

$$\begin{aligned}\bar{X}_{n+1} &= (1 + \lambda h + \mu \Delta W_n) \bar{X}_n \\ &\vdots \\ &= \prod_{i=0}^n (1 + \lambda h + \mu \Delta W_i) \bar{X}_0\end{aligned}$$

ここで積の平均をとると次のように書ける。

$$\bar{X}_{n+1} = R(h; \lambda, \mu) \bar{X}_n$$

上式で $R(h; \lambda, \mu)$ を平均化された安定性関数と呼ぶ。ゆえに T -安定性は次のように置き換えられる。

$$\bar{X}_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow |R(h; \lambda, \mu)| < 1$$

以上から T -安定領域は次式で定義される。

$$\mathcal{R} = \{(h; \lambda, \mu); |R(h; \lambda, \mu)| < 1\}$$

ここでは例として、two-point d.r.v. を driving process として選んだ時を考える。この場合平均化された安定性関数 R は次のようになる。

$$\begin{aligned}R^2(h; \lambda, \mu) &= (1 + \lambda h + \mu \sqrt{h})(1 + \lambda h - \mu \sqrt{h}) \\ &= (1 + \lambda h)^2 - \mu^2 h\end{aligned}$$

よって (a) $\lambda = 0, \mu > 0$ のとき

$$\begin{aligned}R^2(h; 0, \mu) &= 1 - \mu^2 h \\ |R(h; 0, \mu)| < 1 &\Leftrightarrow 0 < h < \frac{2}{\mu^2}\end{aligned}$$

(b) $\lambda \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned}R^2(\bar{h}, k) &= (1 + \bar{h})^2 - k\bar{h} \\ k &= \frac{\mu^2}{\lambda}, \quad \bar{h} = \lambda h\end{aligned}$$

となる。(b) に対する安定領域の図を Fig. 10a と Fig. 10b に示す。最後にこの安定性を裏付ける数値例をあげる。

数値例 3

- | | | | |
|-----|--|---|--|
| (1) | $\begin{cases} dX &= 2X dW(t) \\ X(0) &= 1 \end{cases}$ | $h = 0.2, 0.4$ stable
$h = 0.6$ unstable | $0 < h < 0.5$ |
| (2) | $\begin{cases} dX &= -2X dt + 2X dW(t) \\ X(0) &= 1 \end{cases}$ | $h = 0.25, 1.8$ stable
$h = 0.5, 2$ unstable | $(-0.5, -2), (-3.6, -2)$
$(-1, -2), (-4, -2)$ |
| (3) | $\begin{cases} dX &= 3X dt + 3X dW(t) \\ X(0) &= 1 \end{cases}$ | $h = 0.2$ stable
$h = 0.5$ unstable | $(0.6, 3)$
$(1.5, 3)$ |

(1), (2) と (3) に対するグラフをそれぞれ (1) Fig. 11a, 11b, 11c, (2) Fig. 12a, 12b, 12c, 12d, (3) Fig 13a, 13b に示す。

5. まとめと今後の課題

ここでは 1 次元スカラー SDE に対して誤差解析、数値的安定性について考察した。ただし誤差解析において stochastic part は今後の課題として残っている。また、多次元の SDE や多次元 Wiener 過程をもつ SDE に対しても同様の考察を行うつもりある。

参考文献

- [1] T.C. Gard, *Introduction to Stochastic Differential Equations*, Marcel Dekker, New York, 1988.
- [2] J. R. Klauder and W. P. Petersen, *Numerical integration of multiplicative-noise stochastic differential equations*, SIAM J. Numer. Anal. **22**(1985), 1153–1166.
- [3] P.E. Kloeden and E. Platen, *A survey of numerical methods for stochastic differential equations*, J. Stoch. Hydrol. Hydraulics, **3**(1989), 155–178.
- [4] P.E. Kloeden and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin, 1992.
- [5] 齊藤善弘, 三井斌友, 確率微分方程式の離散近似, 日本応用数理学会論文誌, **2**(1992), 1–16.
- [6] 齊藤善弘, 三井斌友, 確率微分方程式の数値解法に対する安定性解析, 第 20 回数値解析シンポジウム講演予稿集, June 17–19, 1991.
- [7] Y. Saito and T. Mitsui, *Simulation of stochastic differential equations*, to appear in Annals Inst. Statistic. Math. .
- [8] Y. Saito and T. Mitsui, *Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations*, submitted.
- [9] Y.Saito and T. Mitsui, *T-stability of numerical scheme for stochastic differential equations*, to appear in World Scientific Series in Applicable Analysis, vol. 2 "Contributions in Numerical Mathematics" (ed. by R.P.Agarwal).
- [10] D. Talay, *Simulation and numerical analysis of stochastic differential systems*, INRIA Report 1313, 1990.

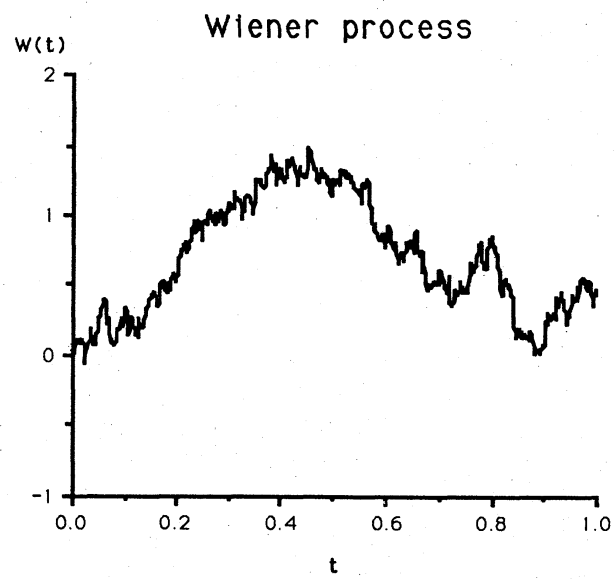


Fig. 1

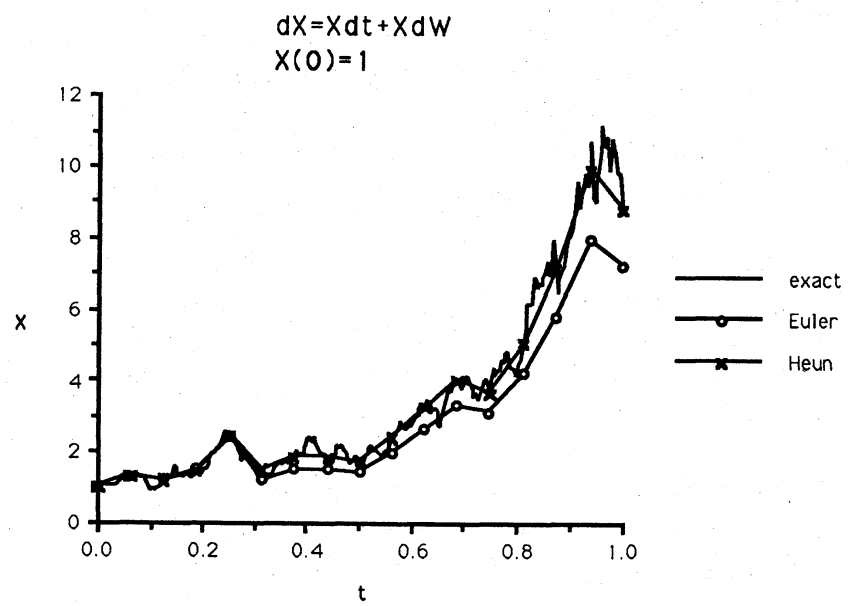


Fig. 2

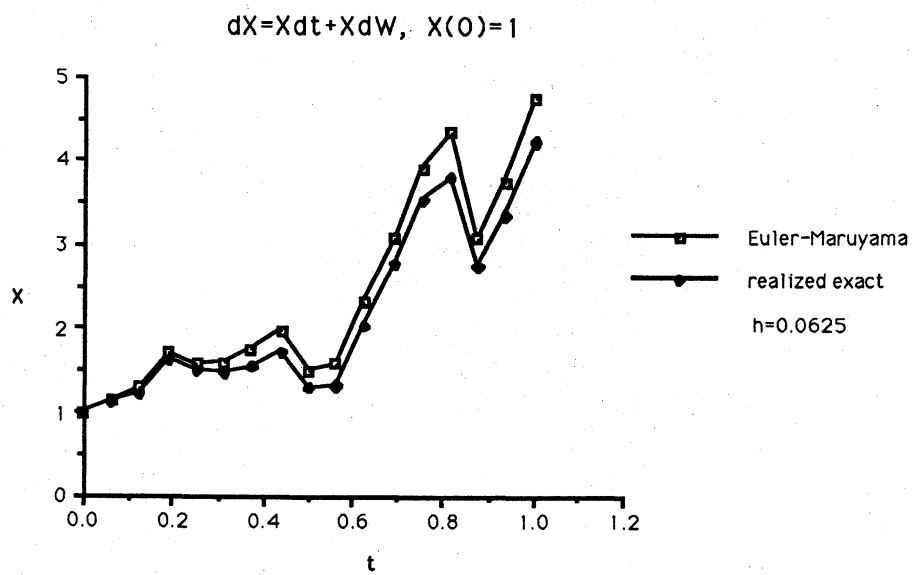


Fig. 3

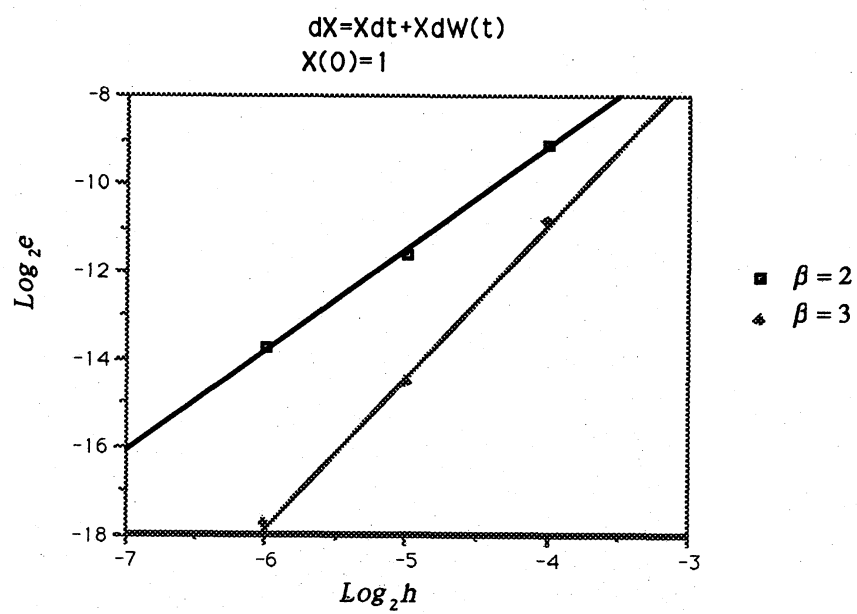


Fig. 4

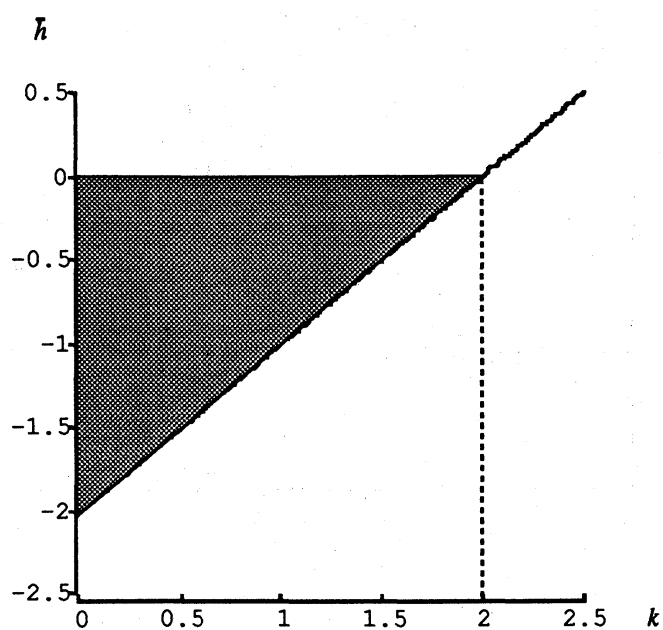


Fig. 5

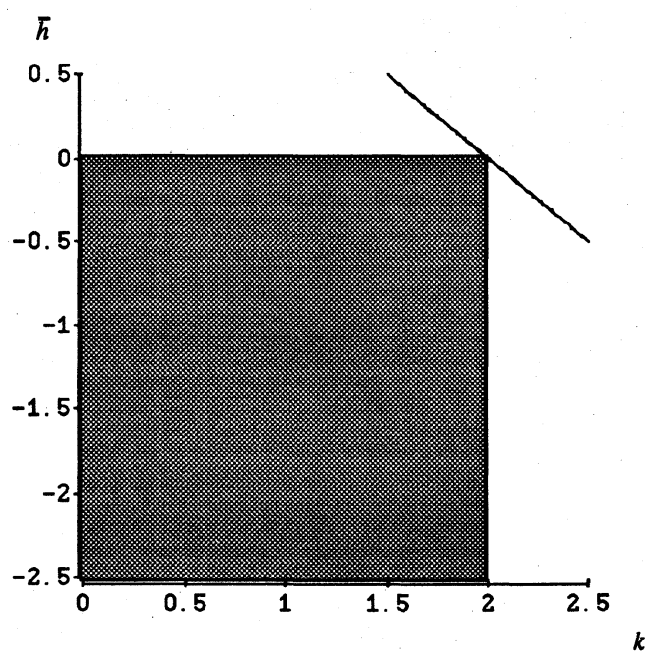


Fig. 6

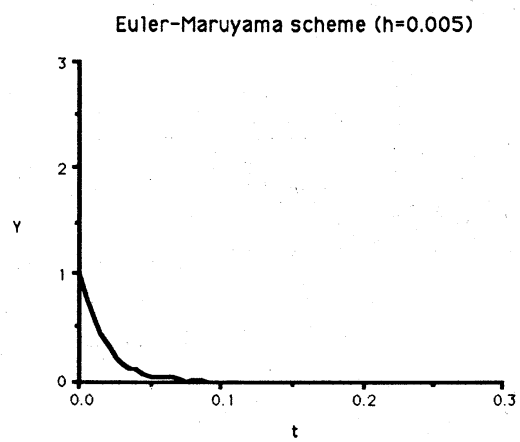


Fig. 7a

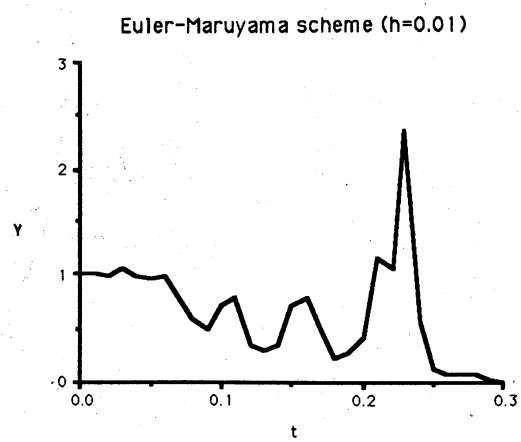


Fig. 7b

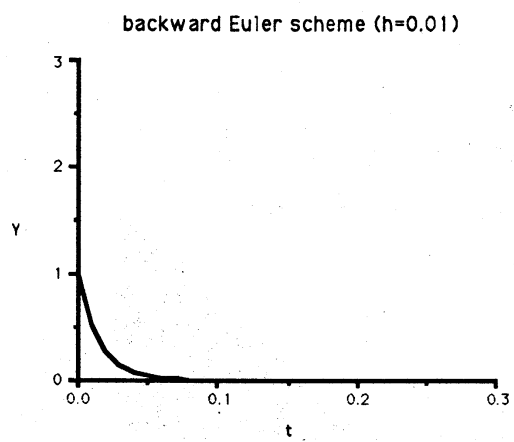


Fig. 8a

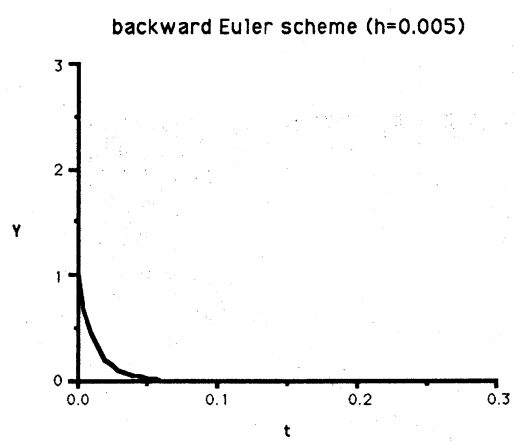


Fig. 8b

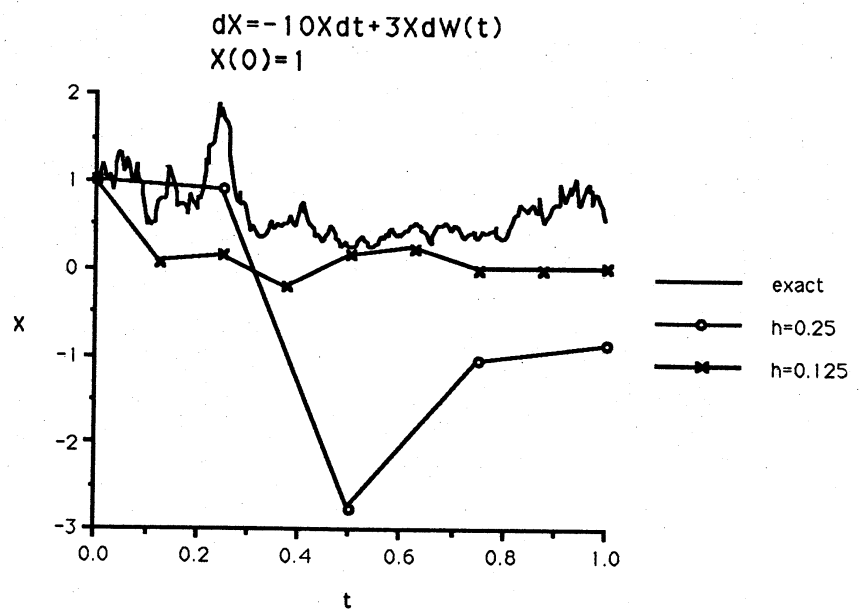


Fig. 9

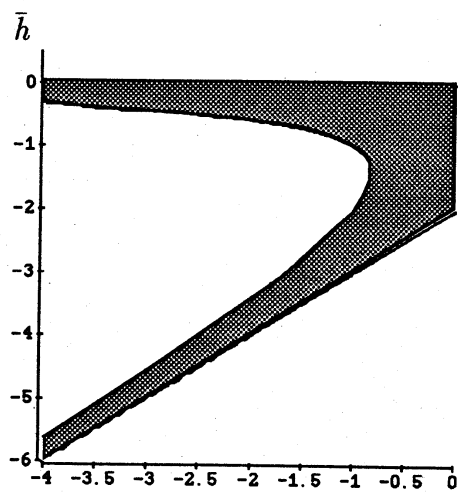


Fig. 10a

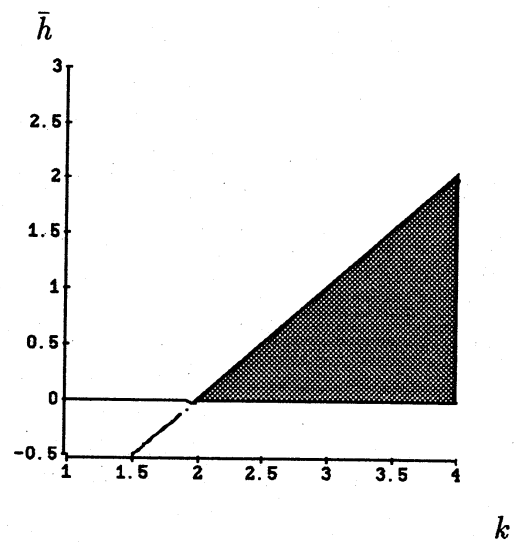


Fig. 10b

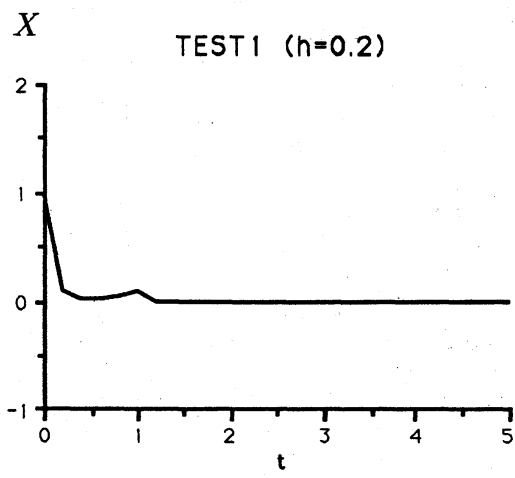


Fig. 11a

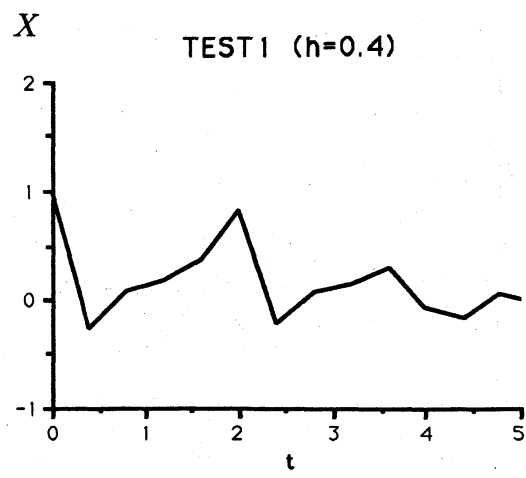


Fig. 11b

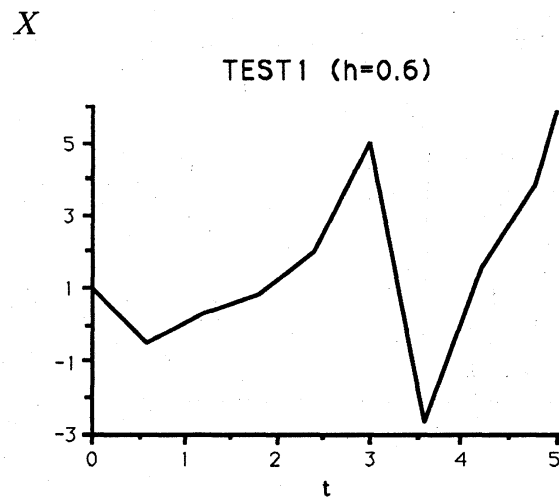


Fig. 11c

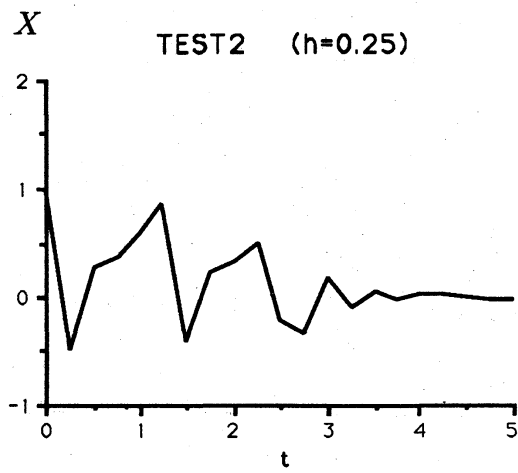


Fig. 12a

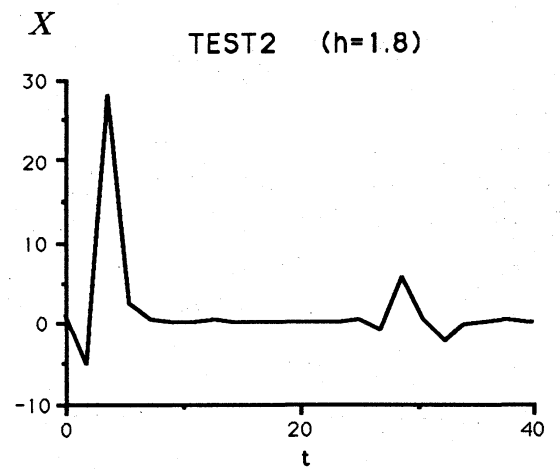


Fig. 12b

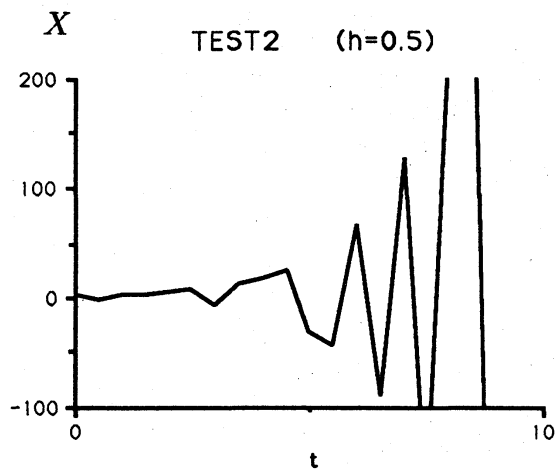


Fig. 12c

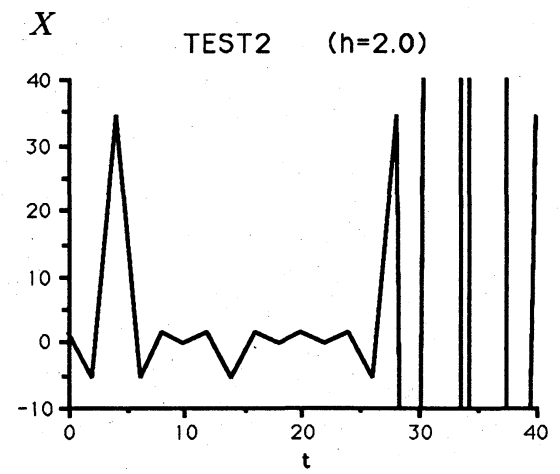


Fig. 12d

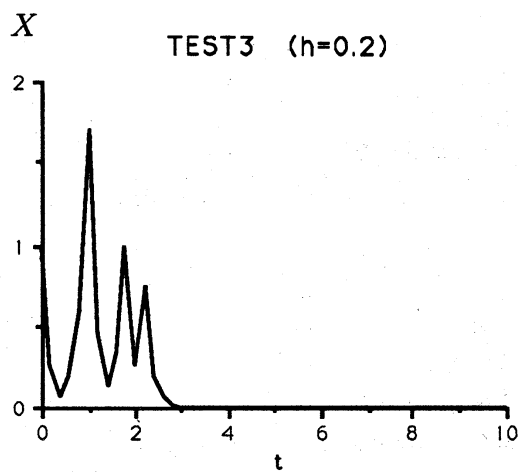


Fig. 13a

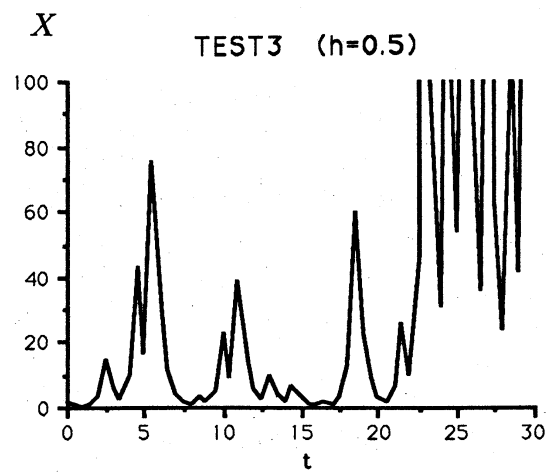


Fig. 13b