

# 不確かさを含む制御系の解析・設計のための 値集合の高精度な推定法

神戸大学工学部 太田 有三 (Yuzo Ohta)

## 1 はじめに

制御対象の物理パラメータや制御器のパラメータを要素とするベクトルを  $q$  で表し、システムの特性多項式 (または、伝達関数) を  $f(s, q)$  で与える. さらに,  $q$  の存在する範囲  $Q$  が与えられるとき,  $V(f; s_0, Q) = \{f(s_0, q) | q \in Q\}$  を  $s = s_0$  における  $f$  の値集合と呼ぶ.

値集合が計算できると, ロバスト安定性の問題は, 線形時不変系に対しては完全に解くことができる. さらに, 非線形系に対してもかなり有効と思われる安定条件を容易に得る事ができる. また, 設計パラメータを一種の不確かさを持つパラメータとして扱えば, 与えられた仕様を満たす設計パラメータの許容領域を求めることもでき, システムの設計にも有用である. この方法は, 設計パラメータの数  $n$  に対して指数的な計算時間を必要とするので,  $n$  が大きいときは適用が困難であるが, 凸計画問題にならない場合にも適用できることと, ある仕様を満たす制御器のパラメータの許容範囲が求まった後で別の仕様も考慮したい場合に先の計算結果を利用できるという特長がある. このように値集合は, ロバスト制御系の解析・設計に非常に有用であるが, 如何にして値集合またはその推定を計算するかという問題がある.

本文では, まず, 2 節において値集合の制御系の解析・設計への応用の概略について説明し, 実際的な観点からの問題設定を説明する. 次に, 3 節では値集合の境界の特徴付けについて述べ, 4 節でそれに基づいた値集合の外部境界に囲まれた領域の効率良い計算法を提案する. さらに, 5 節で計算すべき関数が不確かさのパラメータの多重線形関数である場合にさらに計算時間を短縮する一つの方法を提案する.

記号: 本論文では, 実直線を  $R$  で, 複素平面を  $C$  であらわし,  $R^m$  (または,  $C^m$ ) の部分集合  $V$  に対して,  $\partial V$ ,  $\text{int } V$ ,  $\text{ri } V$ ,  $\bar{V}$ ,  $\text{outbd } V$  は, それぞれ,  $V$  の境界, 内点集合, 相対的内点集合, 閉包, 外部境界で囲まれた領域 (閉集合) を示す. また,  $i \leq j$  であるような整数  $i$  と  $j$  に対して,  $[i..j]$  で集合  $\{i, i+1, \dots, j\}$  を示す. 有限集合  $V = \{q^i\}_{i=1}^k$  に対して,  $|V| = k$  は,  $V$  の要素数を示す. 集合  $\{q^i \in C^m\}_{i=1}^k$  または  $V \subseteq C^m$  に対して,  $\text{conv}[q^1, q^2, \dots, q^k]$  または  $\text{conv}[V]$  は, それらの凸包を示す. 複素平面における多角形の集合を  $P$  であらわす.  $n_k$  角形  $Z_k \in P$  の端点の集合を  $V_{Z_k} = \{z_1^k, z_2^k, \dots, z_{n_k}^k\}$  で表し,  $Z_k$  の辺の集合を  $E_{Z_k} = \{L_i^k = \text{conv}[z_{i_s}^k, z_{i_t}^k] | i \in [1..n_k]\}$  で表す. ここで,  $i_s < n_k$  のとき,  $i_t = i_s + 1$  であり,  $i_s = n_k$  のとき,  $i_t = 1$  である.

## 2 値集合と制御系の解析・設計問題と実際の問題設定

不確かさのパラメータ  $q$  を含む伝達関数または特性多項式を  $f(s, q)$  とする.  $q$  の定義域  $Q$  が与えられるとき,

$$V(f; s_0, Q) = \{f(s_0, q) | q \in Q\} \quad (1)$$

を  $s = s_0$  における  $f$  の値集合と呼ぶ.

値集合を用いる解析・設計には, 大別して, 1) 安定解析や極指定に関するものと, 2) 周波数応答を用いるものがあるが, これらについて簡単に説明する.

## 2.1 ロバスト安定性

ロバスト安定性に関して次の結果が知られている [1].

**補題 1**  $f(s, q)$  を特性多項式とする. ここで,  $Q$  は連結で,  $s$  に関する最高次数が  $q$  に関して不変であるとする. 開集合  $D \subseteq \mathbb{C}$  を与える. このとき, ロバスト  $D$ -安定, すなわち, 任意の  $q \in Q$  に対して,  $f(s, q) = 0$  の全ての根が  $D$  内にあるための必要十分条件は, 次の 2 条件が成り立つことである.

- 1) ある  $q^0 \in Q$  が存在して,  $f(s, q^0) = 0$  の全ての根が  $D$  内にある.
- 2)  $D$  の境界上の任意の点  $s$  に対して,  $0 \notin V(f; s, Q)$  が成り立つ. ■

補題 1 では, 制御対象などの不安定極の数が  $q$  に依存する場合にも適用できる. なお,  $D$  は複数の単連結な集合の和集合で与えられる場合でもよく, この場合には各領域に存在する根の数は,  $q$  に依存せず一定である [1]. 補題 1 の条件 1) は, 容易に調べることができ, 条件 2) は, 値集合の 0-非包含性の判定問題と呼ばれる. また,  $f(s, q)$  において,  $s$  に関する最高次数が  $q$  に関して不変であるかどうかということも最高次数の係数の値集合の 0-非包含性の判定問題を解けばよい.

なお, むだ時間系や分布定数系に対しても同様な結果が成り立つ [2]. さらに, ルーリエ系のような非線形系において線形部分に不確かさが含まれる場合に対しても, ポポフの定理や円盤条件に相当する安定条件を値集合を用いて導く事もできる [3]. 以上は, 安定解析の話であるが, これを応用したロバスト根軌跡法 [4], [5], 極指定 [7] などの報告もある.

## 2.2 ロバスト仕様

値集合またはその推定が計算できると古典的な周波数応答法を不確かさを考慮して適用できる [6]-[10]. なお, 値集合またはその推定を用いた設計法としては, QFT [6] が有名であるが, 計算機を用いて周波数応答の整形を行う場合は, ニコルス線図を用いるよりもナイキスト線図を用いる方がより実用的である. ここでは, 一例として PID 制御器の設計法について説明する.

次式で表されるフィードバック系を考える.

$$y = G(s, q)u, u = C(s, a)e + W_d(s, q)d, e = r - y$$

ここで,  $y, u, e, d, r$  は, それぞれ, 出力, 制御入力, 制御偏差, 外乱, 目標値入力を示す.  $G(s, q)$  は, 制御対象の伝達関数を示し,  $q = [q_1, q_2, \dots, q_{N_q}]^T \in Q$  は制御対象に含まれる物理パラメータのベクトルである. また,  $C(s, a)$  は, PID 制御器で

$$C(s, a) = a_P \cdot (1 + C_I(s, a_I) + C_D(s, a_D)) \quad (2)$$

$$C_I(s, a_I) = \frac{a_I}{s}, C_D(s, a_D) = \frac{s \cdot a_D}{1 + s \cdot \tau \cdot a_D}$$

で与えられ,  $a = [a_P, a_I, a_D]^T$  で  $a_P, a_I, a_D$  は調整すべきパラメータを示す. さらに,  $W_d(s, q)$  は, 外乱のモデルを示す. 以下では,  $a_P \in A_P, a_I \in A_I, a_D \in A_D$  と仮定し,  $A_i, Q$  は予め与えられるものとする.

さて, 次のような条件を満たす PID 制御器のパラメータの最大の領域  $\mathcal{A}^* \subseteq A_P \times A_I \times A_D$  を求めることを考える: 任意の  $q \in Q$  と  $a \in \mathcal{A}^*$  に対して,

- 1) 閉ループ系は安定である;
- 2)  $|N(j\omega, q, a)| \leq |\alpha(j\omega)| \quad \forall \omega \in \mathbb{R};$
- 3)  $|\beta(j\omega)| \leq |T(j\omega, q, a)| \leq |\gamma(j\omega)| \quad \forall \omega \in \mathbb{R};$
- 4)  $|S(j\omega, q, a)| \leq |\sigma(j\omega)| \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$

ここで,  $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s), \sigma(s)$  は, 仕様によって与えられる関数で,  $N(s, q, a), T(s, q, a), S(s, q, a)$  は,

$$N(s, q, a) = \frac{W_d(s, q)G(s, q)}{1 + G(s, q)C(s, a)}$$

$$T(s, q, a) = \frac{G(s, q)C(s, a)}{1 + G(s, q)C(s, a)}, \quad S(s, q, a) = 1 - T(s, q, a)$$

で与えられる。なお、仕様の 3) は、バンド幅とピークゲインを指定するためのものである。

条件 2), 3), 4) を満たす領域を、それぞれ、 $\mathcal{A}_N, \mathcal{A}_{BT}, \mathcal{A}_S$  とし、 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_N \cap \mathcal{A}_{BT} \cap \mathcal{A}_S$  が計算されたとする。一般に、 $\mathcal{A}$  は、複数の連結成分からなる可能性があるが、 $|\sigma(j\omega)| < \infty$  なので、

$$0 \notin \{1 + G(j\omega, q)C(j\omega, a) \mid a \in \mathcal{A}_S, q \in Q\}$$

となる。従って、 $G(s, q)C(s, a)$  において不安定な極と零点の相殺がなければ、 $\mathcal{A}$  の各連結成分  $\mathcal{A}^i$  の任意の要素  $a$  と任意の  $q \in Q$  に対して、閉ループ系が安定となる必要十分条件は、ある  $a = a^0 \in \mathcal{A}^i$  と  $q = q^0 \in Q$  に対して閉ループ系が安定となることであり [11], この判定は容易にできるので、主に  $\mathcal{A}$  を求める問題について考えればよい。 $\mathcal{A}$  は、文献 [11], [12] で提案されている方法と値集合を用いて求めることができる。例えば、最も単純には、 $A_P \times A_I \times A_D$  を小さな領域  $\{\mathcal{A}_{\ell mn} = A_{P_\ell} \times A_{I_m} \times A_{D_n}\}$  に分割し、各  $\mathcal{A}_{\ell mn}$  が  $\mathcal{A}$  に含まれているかどうかを判定すればよい。任意に  $j\omega$  を与え、

$$z_S(\omega, q) = -G^{-1}(j\omega, q), \quad r_S(z_S) = \frac{|z_S(\omega, q)|}{|\sigma(j\omega)|}$$

とおくと、条件  $|S(j\omega, q, a)| \leq |\sigma(j\omega)|$  が満足されるための必要十分条件は、 $C(j\omega, a)$  が、円  $B[z_S(\omega, q); r_S(z_S)]$  の外部にあることであるので、値集合  $\mathbf{V}(-G^{-1}; j\omega, Q)$  が計算できたとし、さらにその境界上の任意の点  $z$  に対して円  $B[z; r_S(z)]$  を描いたときの包絡線で囲まれる領域が計算できたとすると、 $\mathbf{V}(C; j\omega, \mathcal{A}_{\ell mn})$  がその領域の外にあれば、 $\mathcal{A}_{\ell mn}$  を候補として残し、そうでないときは候補から削除するという操作を  $\omega$  を変えて繰り返し行くと、かなり精度の良い  $\mathcal{A}_S$  の推定 (部分集合) が求まる。実際的には、上のように行くと効率が悪いので、 $A_P \times A_I \times A_D$  空間に問題を変換して考えることや、周波数に応じて分割方法を変えるなどの工夫が必要であるが [12], その詳細は省略する。

なお、ロバスト安定性の問題に関しても、補題 1 を直接適用して値集合の 0-非包含性の判定問題を解くよりも上の仕様 4) のように安定余裕を持たせた問題を解く方が実用的である。

## 2.3 実際の問題設定

$s = s_0$  における  $f$  の値集合は、式 (1) のように定義され、その応用としてロバスト安定性やロバスト仕様の問題を説明したが、実際的には、それらをそのまま厳密に解くことは極めて困難であり、“近似的”に問題を解かざるを得ない。例えば、ロバスト仕様の問題を考える場合に周波数  $s$  に関しては、ある程度の点数の周波数を選び、それに対して条件を調べて許容領域を求めざるを得ない。理論的には、サンプルした周波数に対する結果が、全ての周波数に対する仕様の満足度をどの程度保証するか、何点をどこから選べばよいかな等の点が問題となるが、特殊な場合を除いては理論的な結果は得られていない。しかしながら、経験的には、ある程度の点数の周波数を選べば、実用上は問題を生じない。実際、上のようにして設計した後に周波数を不確かさのパラメータの 1 つとして扱い、周波数の領域を十分小さく分割して、仕様がどの程度満たされているかを調べれば実用的には十分許容できる範囲で仕様の満たしていることが確かめられる<sup>1</sup>。また、厳密には仕様の満たしていても、殆んど満たしているのならば、得られた解 (集合) は、工学的には十分意味がある。また、場合によっては、仕様の厳し目に与えることも考えられる。このようにすると仕様の満たす制御器のパラメータの許容領域が本当は存在するにも関わらず、計算すると得られない場合も生じえるが、非常に小さな許容領域は実際のインプリメントが困難であるので、このような場合も実際的には無視してもよい。

<sup>1</sup>最初から周波数  $s$  も不確かさのパラメータの 1 つとして扱うという方法も考えられ、そのようなアプローチも提案されている。しかし、物理パラメータや制御器のパラメータが計算すべき伝達関数において比較的単純な形で関与するのにに対して  $s$  はいたる所に現れるので、 $s$  を不確かさのパラメータの 1 つとして扱うと値集合を求める計算量が膨大となる。また、得られる結果がそれほど違わないので、ここでは、 $s$  はサンプルした値を用いるという方法を取っている。

今までの説明では、不確かさのパラメータは実変数として考えて来たが、もう少し別の枠組で考えた方が得策である。このことを説明するために、次の3慣性系の特性多項式  $P(s, q)$  を考える。  $P(s, q)$  は、

$$P(s, q) = z_5 \{ (z_1 + z_2)(z_3 + z_4) + z_1 z_2 \} + z_4 \{ z_3(z_1 + z_2) + z_2(z_1 + q_1^6) \}$$

で与えられる。ここで、  $q = [q_1^1, q_2^1, q_1^2, q_2^2, q_1^3, q_2^3, q_1^4, q_2^4, q_1^5, q_2^5, q_1^6]^T$ ,  $q_j^i \in Q_j^i \subseteq \mathbf{R}$  であり、  $z_1, z_2, \dots, z_5$  は、

$$z_1 = s^2 q_1^1 + s q_2^1, \quad z_2 = s q_1^2 + q_2^2, \quad z_3 = s^2 q_1^3 + s q_2^3, \quad z_4 = s q_1^4 + q_2^4, \quad z_5 = s^2 q_1^5 + s q_2^5$$

である。便宜上、  $z = [z_1, z_2, \dots, z_6]^T$ ,  $z_6 = q_1^6$ ,  $Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_6$ ,  $Z_i = \{s^2 q_1^i + s q_2^i \mid q_j^i \in Q_j^i, j = 1, 2\}$ ,  $i = 1, 3, 5$ ,  $Z_i = \{s q_1^i + q_2^i \mid q_j^i \in Q_j^i, j = 1, 2\}$ ,  $i = 2, 4$ ,  $Z_6 = Q_1^6$  とおき、改めて、

$$f(z) = z_5 \{ (z_1 + z_2)(z_3 + z_4) + z_1 z_2 \} + z_4 \{ z_3(z_1 + z_2) + z_2(z_1 + z_6) \} \quad (3)$$

とおくと、明らかに、

$$\mathbf{V}(P; sQ) = \{P(s, q) \mid q \in Q\} = \mathbf{V}(f; Z) = \{f(z) \mid z \in Z\}$$

が成り立つ。

$s = j\omega$  (純虚数) のとき、  $Z_i, i \in [1..5]$  は、複素平面における軸に平行な長方形となる。また、  $s$  が一般の複素数であるときは、  $Z_i$  は4角形となる。

周波数  $s$  は与えられているものとして問題を考えるが、次節で示すことから、元の13実変数の問題を考えるよりも6複素変数の問題を考える方が問題を簡単にできる

したがって、以下では、次のような問題を考える。

**問題 1**  $Z_k \in \mathcal{P}, k \in [1..m]$  とする。  $z = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T$ ,  $z_i \in Z_i$ ,  $Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_m$  とし、  $\mathbf{C}^m$  から  $\mathbf{C}$  への関数  $f(z)$  を考える。このとき、

$$\mathbf{V}(f; Z) = \{f(z) \mid z \in Z\} \quad (4)$$

または、その精度良い近似を求めよ。 ■

なお、  $Z_k$  は、単連結な領域としても同様な議論が可能であるが、多角形で幾らでも精度良く近似できるので、後の議論の都合により  $Z_k$  は多角形とする。

式(4)で定義される値集合を求める問題に関しても近似が必要となる。このことについて説明するために、値集合の例を示す。

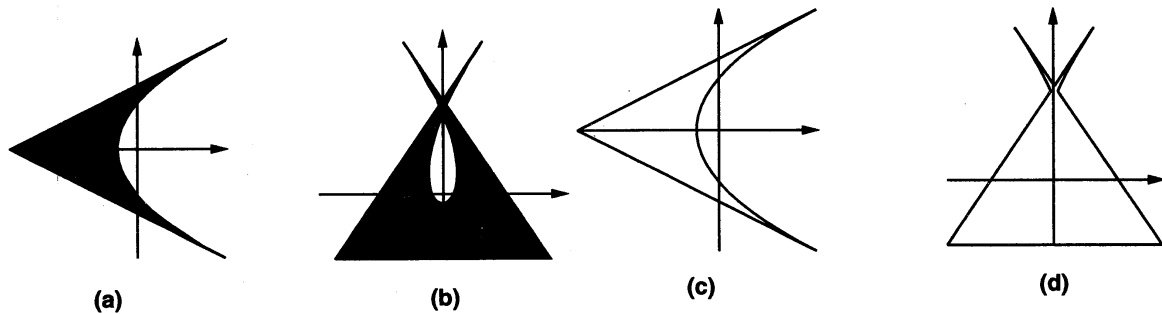


図1  $\tilde{f}(z) = z_1 z_2$  および  $f(z) = \tilde{f}(z) z_3 = z_1 z_2 z_3$  の値集合。ここで、  $z = [z_1, z_2, z_3]^T$ ,  $z_i \in Z_i$ ,  $Z_i = \text{conv}[-\sqrt{3} + s_0, \sqrt{3} + s_0]$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $s_0 = j0.75$  である。(a)  $\mathbf{V}(\tilde{f}; Z)$ , (b)  $\mathbf{V}(f; Z)$ , (c)  $\mathbf{V}(\tilde{f}; Z)$  の(外部)境界で囲まれた領域, (d)  $\mathbf{V}(f; Z)$  の外部境界で囲まれた領域  $\text{outbd } \mathbf{V}(f; Z)$ 。

図 1 (b) に示すように、値集合は単連結になるとは限らないが、経験的には、 $s_0$  を変化させて行くと、ある  $s_0$  について内部の境界で囲まれ値集合に含まれない部分は他の  $s'_0$  に対する値集合で覆われる場合が多いことと、アルゴリズム的に内部の境界を見つけることが容易でないことから、本文では、値集合そのものではなく、値集合の外部境界で囲まれた領域（図 1 (d) 参照， $\text{outbd } \mathbf{V}(f; Z)$  で表す）の精度良い近似を求めることを考える、すなわち、問題 1 を修正した次の問題を考える。

**問題 2**  $Z_k \in \mathcal{P}$ ,  $k \in [1..m]$ ,  $Z = Z_1 \times Z_2 \times \cdots \times Z_m$  とし， $\mathbf{C}^m$  から  $\mathbf{C}$  への関数  $f(z)$  を考える。このとき，

$$\mathbf{E}(f; Z) \subseteq \mathcal{N}[\text{outbd } \mathbf{V}(f; Z); \varepsilon], \quad \text{outbd } \mathbf{V}(f; Z) \subseteq \mathcal{N}[\mathbf{E}(f; Z); \varepsilon] \quad (5)$$

を満たす  $\mathbf{E}(f; Z) \in \mathcal{P}$  を求めることを考える。ただし， $\mathcal{N}[V; \varepsilon]$  は， $V$  の  $\varepsilon$  近傍を示す。■

### 3 値集合の境界の特徴付け

$\partial \mathbf{V}(f; Z)$  が計算できれば， $\text{outbd } \mathbf{V}(f; Z)$  を  $\text{outbd } \partial \mathbf{V}(f; Z)$  から計算できる。 $\partial \mathbf{V}(f; Z)$  についてまず次の結果が成り立つ [14]。

**定理 1**  $\mathbf{C}^m$  から  $\mathbf{C}$  への関数  $f(z)$  は， $Z$  を含む開集合上で連続微分可能とする。 $z \in Z$  を，ある  $k \in [1..m]$  が存在して， $z_k \in \text{int } Z_k$  であるような  $Z$  の任意の点とすると，

$$f(z) \in \text{int } \mathbf{V}(f; Z). \quad (6)$$

が成り立つ。したがって，次式を得る。

$$\partial \mathbf{V}(f; Z) \subseteq \partial \{f(z) \mid z = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T, z_k \in L_{i_k}^k \in \mathbf{E}_{Z_k}, i_k \in [1..n_k], k \in [1..m]\}. \quad (7)$$

定理 1 から， $\partial \mathbf{V}(f; Z)$  を求めるためには，各成分  $z_k$  が  $Z_k$  の辺  $L_{i_k}^k$  上にあるような  $z$  の像を考えれば十分である。

辺の組  $(L_{i_1}^1, L_{i_2}^2, \dots, L_{i_m}^m)$  を指定するために， $I = \{(i_1, i_2, \dots, i_m) \mid i_k \in [1..n_k], k \in [1..m]\}$  とし， $\mathcal{I}$  をそのような  $I$  の集合とする。各辺  $L_{i_k}^k = \text{conv}[z_{i_k}^k, z_{i_k}^k] \in \mathbf{E}_{Z_k}$  は， $L_{i_k}^k = \{x_k z_{i_k}^k + (1-x_k) z_{i_k}^k \mid x_k \in [0, 1]\}$  と表されるので，各  $I \in \mathcal{I}$  に対して次の関数

$$g(x; I) = f(z), \quad z_k = x_k z_{i_k}^k + (1-x_k) z_{i_k}^k \in L_{i_k}^k, \quad x_k \in [0, 1], \quad k \in [1..m]. \quad (8)$$

を定義すると，当然，

$$\partial \mathbf{V}(f; Z) = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} \partial \mathbf{V}(g(\bullet; I); [0, 1]^m), \quad \text{outbd } \mathbf{V}(f; Z) = \text{outbd} \left[ \bigcup_{I \in \mathcal{I}} \partial \mathbf{V}(g(\bullet; I); [0, 1]^m) \right] \quad (9)$$

である。

なお， $m = 1$  である場合には，式 (9) から，

$$\partial \mathbf{V}(f; Z) = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} \partial \mathbf{V}(g(\bullet; I); [0, 1]), \quad (10)$$

すなわち，辺の像を考えればよいことになる。

以下では， $m \geq 2$  の場合を考える。 $g$  の値域は  $\mathbf{C}$  であるが，定義域は  $[0, 1]^m$  であるので， $g$  に関しては，複素関数の開写像定理は適用できないが，次の結果が知られている [7]。

**補題 2**  $m \geq 2$  とし,  $I \in \mathcal{I}$  を与え,

$$H(x; I) = [h^1(x; I) \cdots h^m(x; I)], \quad h^j(x; I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re} g(x; I)}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \operatorname{Im} g(x; I)}{\partial x_j} \end{bmatrix} \quad (11)$$

とおく. 任意に  $x \in (0, 1)^m$  を与えるとき,  $\operatorname{rank} H(x; I) = 2$  ならば,  $g(x; I) \in \operatorname{int} \mathbf{V}(g(\bullet; I); [0, 1]^m)$  である. ■

文献 [7] において 補題 2 の証明は与えられていないが, 例えば, 0 でない実数  $x_{j_1}, \dots, x_{j_{m-2}}$  を選び, 関数  $F(x) = [\operatorname{Re} g(x; I) \operatorname{Im} g(x; I) x_{j_1} \cdots x_{j_{m-2}}]^T$  を考えると,  $\operatorname{rank} H(x; I) = 2$  ならば,  $\det[F'(x)] \neq 0$  なので, 逆関数定理によって  $F$  は局所同相写像となり, 領域不変定理 (有限次元空間における連続な局所同相写像は, 開写像である [19]) を用いれば, 補題 2 を証明できる.

補題 2 から直ちに次の結果が得られる.

**系 1**  $m \geq 2$  とすると, 次式が成り立つ.

$$\partial \mathbf{V}(g(\bullet; I); [0, 1]^m) \subseteq \{g(x; I) \mid x \in (0, 1)^m, \operatorname{rank} H(x; I) < 2\} \cup \{g(x; I) \mid x \in \partial[0, 1]^m\} \quad (12)$$

さて, ここで, 次のことに注意しておこう [14].

**補題 3**  $x \in [0, 1]^m$  を固定する. もし,  $h^1(x; I) \neq 0$  ならば, 次の 3 条件は等価である.

- 1)  $\operatorname{rank} H(x; I) < 2$
- 2)  $\operatorname{rank} [h^1(x; I) \ h^j(x; I)] < 2 \ \forall j \in [2..m]$ , すなわち,

$$\psi(x; I) = \begin{bmatrix} \psi_1(x; I) \\ \vdots \\ \psi_{m-1}(x; I) \end{bmatrix} = 0, \quad \psi_j(x; I) = \det[h^1(x; I) \ h^{j+1}(x; I)], \quad j \in [1..m-1] \quad (13)$$

- 3) 任意の  $j \in [2..m]$  に対して, 実数  $\gamma_j(x)$  が存在して,  $h^j(x; I) = \gamma_j h^1(x; I)$  が成り立つ. ■

補題 3 から,  $\operatorname{rank} H(x; I) < 2$  という条件は, 全ての  $2 \times 2$  小行列の組合せ調べなくとも,  $h^1(x; I) \neq 0$  となるならば, 式 (13) で与えられる ( $m$  個の未知数を含む  $m-1$  個の) 連立方程式が解を持つかどうか調べればよいことがわかる. したがって,  $\operatorname{rank} H(x; I) < 2$  を満たす点を求めるためには,  $x$  の 1 つの要素をパラメータにして方程式 式 (13) の解を追跡すればよいと思われる.

以下では, 次の仮定が満足されるものとする.

**仮定 1**  $h^j(\bullet; I)$ ,  $j \in [1..m]$  は,  $[0, 1]^m$  を内部に含むある開領域において連続微分可能であり, 任意の  $x \in [0, 1]^m$  に対して,  $h^1(x; I) \neq 0$  で, 式 (13) で定義される  $\psi(x; I)$  の偏微分行列  $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x; I)$  のランクは  $m-1$  である. ■

このとき, 次の結果が成り立つ.

**補題 4** 仮定 1 が満たされるとする. ある  $x^* \in (0, 1)^m$  に対して,  $\psi(x^*; I) = 0$  となるならば, ある  $\hat{x}, \tilde{x} \in \partial[0, 1]^m$  が存在して,  $\psi(\hat{x}; I) = \psi(\tilde{x}; I) = 0$  であり, かつ, 連続関数  $\chi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^m$  が存在して, ある  $\eta^* \in (0, 1)$  に対して  $\chi(\eta^*) = x^*$  であり,  $\chi(0) = \hat{x}$ ,  $\chi(1) = \tilde{x}$ , および,

$$\psi(\chi(t); I) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

が成り立つ. ■

補題 3, 4 から,  $\{g(x; I) | x \in (0, 1)^m, \text{rank } H(x; I) < 2\}$  は,  $\partial[0, 1]^m$  の上で  $\psi(x; I) = 0$  となる  $x$  を求め, それから,  $(0, 1)^m$  内で  $\psi(x; I) = 0$  となる  $x$  追跡すればよいことがわかる. また, 当然のことであるが,  $\psi(x; I) = 0$  であるためには, 任意の  $J \subseteq [1..m-1]$  に対して

$$\psi_j(x; I) = 0, \quad j \in J$$

でなければならない. そこで, 系 1 をもう少し使いやすい形で表すことを考える. 以下では,  $I \in \mathcal{I}$  は与えられているものとする. 3 項組  $T_r = (J_r, K_{m-r}, S_{m-r})$  を考える. ここで,  $J_r = \{j_1, j_2, \dots, j_r\} \subseteq [1..m]$ ,  $K_{m-r} = \{k_1, \dots, k_r\} = [1..m] - J_r$ ,  $S_{m-r} = \{\sigma_k \in \{0, 1\}, k \in K_{m-r}\}$  である. また,  $T_r$  に対して,

$$\Omega(I, T_r) = \{x \in \mathbf{R}^m | x_k = \sigma_k, k \in K_{m-r}, x_j \in [0, 1], j \in J_r\} \quad (14)$$

とする. さらに,  $x \in \Omega(I, T_r)$  に対して,  $H(x; I)$  の部分行列  $H(x; I, T_r)$  と  $\Omega(I, T_r)$  の部分集合  $\hat{\Omega}(I, T_r)$  を

$$H(x; I, T_r) = [h^{j_1}(x; I) \ \cdots \ h^{j_r}(x; I)] \quad (15)$$

$$\hat{\Omega}(I, T_r) = \{x \in \Omega(I, T_r) | \text{rank } H(x; I, T_r) < 2\}. \quad (16)$$

で定義する. ここで, 各  $r \geq 1$  と  $J_r$  に対して  $2^{m-r}$  通りの  $S_{m-r}$  があり,

$$\bigcup_{T_r, r \leq m-1} \text{ri } \Omega(I, T_r) = \partial[0, 1]^m, \quad \text{int } \Omega(I, T_m) = (0, 1)^m \quad (17)$$

であることに注意しておこう. また, 補題 3, 4 と同様に, 次の結果が成り立つ.

**補題 5**  $r \geq 2$  として, 任意に  $x \in \Omega(I, T_r) = (J_r, K_{m-r}, S_{m-r})$  を固定する. もし,  $h^{j_1}(x; I) \neq 0$  ならば, 次の 2 条件は等価である.

- 1)  $\text{rank } H(x; I, T_r) < 2$
- 2)  $\text{rank } [h^{j_1}(x; I) \ h^{j_k}(x; I)] < 2 \ \forall k \in [2..r]$ , すなわち,

$$\psi(x; I, J_r) = \begin{bmatrix} \psi_1(x; I, J_r) \\ \vdots \\ \psi_{r-1}(x; I, J_r) \end{bmatrix} = 0, \quad \psi_k(x; I, J_r) = \det[h^{j_1}(x; I) \ h^{j_k+1}(x; I)], \quad k \in [1..r-1] \quad (18)$$

■

**補題 6** 仮定 1 が満たされ,  $r \geq 3$  とする. ある  $x^* \in \text{ri } \Omega(I, T_r)$  に対して,  $\psi(x^*; I, J_r) = 0$  となるならば, ある  $\hat{x}, \tilde{x} \in \partial T_r$  が存在して,  $\psi(\hat{x}; I, J_r) = \psi(\tilde{x}; I, J_r) = 0$  であり, かつ, 連続関数  $\chi: [0, 1] \rightarrow \Omega(I, T_r)$  が存在して, ある  $\eta^* \in (0, 1)$  に対して  $\chi(\eta^*) = x^*$  であり,  $\chi(0) = \hat{x}$ ,  $\chi(1) = \tilde{x}$ , および,

$$\psi(\chi(t); I, J_r) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

が成り立つ.

■

さて,  $r \geq 2$  のとき,  $g(\bullet; I)$  の  $\Omega(I, T_r)$  への制限に逆関数定理と領域不変性定理を適用すると

$$g(x; I) \in \text{int } V(g(\bullet; I); [0, 1]^m) \quad \forall x \in \text{ri } \Omega(I, T_r) : \text{rank } H(x; I, T_r) = 2 \quad (19)$$

が成り立つので, 系 1 と式 (9) から直ちに次の結果を得る.

## 定理 2

$$\partial \mathbf{V}(g(\bullet; I); [0, 1]^m) \subseteq \left( \bigcup_{T_r, 2 \leq r \leq m} \mathbf{V}(g(\bullet; I); \hat{\Omega}(I, T_r)) \right) \cup \left( \bigcup_{T_1} \mathbf{V}(g(\bullet; I); \Omega(I, T_1)) \right) \quad (20)$$

$$\text{outbd } \mathbf{V}(f; Z) = \text{outbd} \left[ \left( \bigcup_{I \in \mathcal{I}} \bigcup_{T_r, 2 \leq r \leq m} \mathbf{V}(g(\bullet; I); \hat{\Omega}(I, T_r)) \right) \cup \text{outbd} \left( \bigcup_{I \in \mathcal{I}} \bigcup_{T_1} \mathbf{V}(g(\bullet; I); \Omega(I, T_1)) \right) \right] \quad (21)$$

が成り立つ. ■

式 (20) において,  $\mathbf{V}(g(\bullet; I); \Omega(I, T_1))$  は 1 変数の関数の像なので簡単に計算出来る. 特に,  $g$  が多重線形 (正確には, 多重アフィン) 関数の場合には  $\mathbf{V}(g(\bullet; I); \Omega(I, T_1))$  は線分になる. また,

$$g(x; I) = \frac{1}{xz_0^1 + (1-x)z_1^1} \quad (22)$$

の場合は, 次を示されるように円弧となる [13].

**補題 7**  $m=1$  で,  $g(x; I)$  が式 (22) で与えられるとき,  $\mathbf{V}(g(\bullet; I); [0, 1])$  は,  $1/z_0^1, 1/z_1^1$  と 0 を通る円の一部分で両端が  $1/z_0^1, 1/z_1^1$  で 0 を通らないとなる部分である.

また, 関数  $1/z$  は, 明らかに単射であるので,  $n_1$  角形  $Z_1$  に対して,  $\mathbf{V}(1/z; Z_1)$  は  $Z_k$  の辺  $\text{conv}[z_{i_s}^1, z_{i_t}^1]$  に対する上の円弧によって囲まれる領域となる. ■

さらに,  $\mathbf{V}(g(\bullet; I); \hat{\Omega}(I, T_2))$  についても,  $g$  が多重線形関数の場合は, 次のようになる [7].

**補題 8**  $g$  を多重線形関数とし,  $T_2 = (J_2, K_{m-2}, S_{m-2})$ ,  $\hat{J}_2 = \{1, 2\}$  で,

$$g(x; I) = C_3 x_1 x_2 + C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_0, \quad C_i = \alpha_i + j\beta_i, \quad i \in [1..3], \quad x_i = \sigma_i, \quad i \in [3..m]$$

とすると

$$H(x; I, T_2) = \begin{bmatrix} \alpha_3 x_2 + \alpha_1 & \alpha_3 x_1 + \alpha_2 \\ \beta_3 x_2 + \beta_1 & \beta_3 x_1 + \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\det H(x; I, T_2) = (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) x_1 + (\alpha_3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_3) x_2 + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)$$

となり,  $\hat{\Omega}(I, T_2)$  は, 存在すれば,  $[0, 1]^2$  内の線分で,  $\mathbf{V}(g(\bullet; I); \hat{\Omega}(I, T_2))$  は 2 次曲線の一部となる. ■

一般の場合について,  $\hat{\Omega}(I, T_2)$  を陽な形で与えられるかどうかは不明であるが, 2 次元の問題なので, 数値的に  $\hat{\Omega}(I, T_2)$  をかなり精度良く求めることは比較的容易である.

$\hat{\Omega}(I, T_2)$  が計算できたとして,  $\hat{\Omega}(I, T_r)$ ,  $r \in [3..m]$  を計算するアルゴリズムを次節で示す.

**注 1** 上の補題 7, 8 などから  $\mathcal{P}$  上の演算: 非凸多角形区間演算 (Non-convex Polygon Interval Arithmetic, 以下, NPJA と略す) が定義できる.

補題 7 から, 多角形  $Z_1$  (ただし,  $0 \notin Z_1$ ) に対して,  $\mathbf{V}(1/z; Z_1)$  が特徴付けられ, また, 補題 8 から, 2 つの多角形  $Z_1, Z_2$  に対して,  $\mathbf{V}(z_1 \cdot z_2; (Z_1, Z_2))$  が特徴付けられる. さらに,

$$\partial \mathbf{V}(z_1 + z_2; Z_1 \times Z_2) \subseteq \bigcup_{z_1 \in V_{Z_1}} \mathbf{V}(z_1 + \bullet; E_{Z_2}) \cup \bigcup_{z_2 \in V_{Z_2}} \mathbf{V}(\bullet + z_2; E_{Z_1})$$

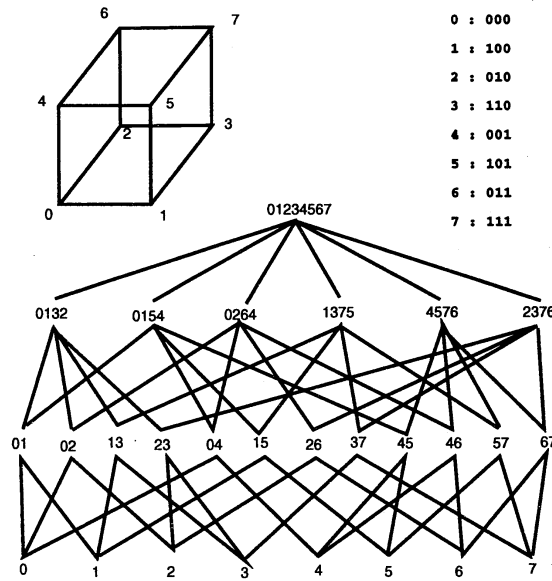


図2 凸多面体  $01234567 = [0, 1]^3$  とそのフェイスグラフ

となることが示されている [16]. そして, これらを用いて,  $\text{NP}(\mathcal{P}; \oplus, \odot, (\bullet)^\ominus)$  が,

$$\text{outbd}[\mathbf{V}(z_1 + z_2; Z_1 \times Z_2)] = Z_1 \oplus Z_2 \quad (23)$$

$$\mathbf{V}(z_1 \cdot z_2; \{z_1\}, Z_2) = z_1 \odot Z_2 \quad (24)$$

$$\mathbf{V}(z_1 \cdot z_2; Z_1 \times Z_2) \subseteq Z_1 \odot Z_2 \subseteq \mathcal{N}(\text{outbd}[\mathbf{V}(z_1 \cdot z_2; Z_1 \times Z_2)]; \varepsilon) \quad (25)$$

$$\text{outbd}[\mathbf{V}(z_1^{-1}; Z_1)] \subseteq Z_1^\ominus \subseteq \mathcal{N}(\text{outbd}[\mathbf{V}(z_1^{-1}; Z_1)], \varepsilon), \quad (26)$$

を満たすように定義される [16]. なお, 上の式における  $Z_1 \oplus Z_2$ ,  $z_1 \odot Z_2$ ,  $Z_1 \odot Z_2$ ,  $Z_1^\ominus$  は全て  $\mathcal{P}$  の要素である. 実際のインプリメント方法については, 文献 [16] または, [17] を参照されたい. ■

## 4 $\hat{\Omega}(I, \mathcal{T}_r)$ の計算アルゴリズム

ここでは, 凸多面体  $[0, 1]^m$  のフェイスグラフ (face graph) を用いた  $\hat{\Omega}(I, \mathcal{T}_r)$ ,  $r \geq 3$  の計算アルゴリズムを提案する. 簡単に, フェイスグラフについて説明する.  $[0, 1]^3$  のフェイスグラフを図2に示す. 図2において, フェイス 01, 02 ..., 67 は 1-フェイス, フェイス 0132, 0154, ..., 2376 は 2-フェイス, フェイス 01234567 は 3-フェイスと呼ばれる. フェイスグラフにおいて, 辺は, フェイスの直接的な包含関係を示す. 例えば, 0132 と 01 を結ぶ辺は, 2-フェイス 01 は, 3-フェイス 0132 に含まれることを示す. そして, 01 は 0132 のサブフェイスと呼ばれる.  $m = 3$  のときには, 6 個の 2-フェイス, 1 個の 3-フェイスがある. 一般に,  ${}_m C_2 2^{m-2}$  個の 2-フェイス,  ${}_m C_3 2^{m-3}$  個の 3-フェイス, ...,  ${}_m C_k 2^{m-k}$  個の  $k$ -フェイス, ...,  ${}_m C_{m-1} 2^1$  個の  $(m-1)$ -フェイスと 1 個の  $m$ -フェイスがある. そして, 各  $r$ -フェイスは, 1 つの  $\Omega(I, \mathcal{T}_r)$  に対応している. このような凸多面体  $[0, 1]^m$  とそのフェイスグラフは, Beneath-Beyond 法 [21] によって構成できる.

次のような  $\hat{\Omega}(I, \mathcal{T}_r)$  を計算するアルゴリズムを考える:

### procedure FIND\_OMEGA

Step 1. 各  $S_{m-2}$  に対して  $\hat{\Omega}(I, \mathcal{T}_2) = \{x \in \Omega(I, \mathcal{T}_2) \mid \psi_1(x, I, J_2) = 0\}$  を計算する;

Step 2. 各  $r \in [3..m]$  に対して,  $\hat{\Omega}(I, \mathcal{T}_r)$  を  $\mathcal{T}_r$  のサブフェイス  $\Omega(I; \mathcal{T}_{r-1})$  における  $\hat{\Omega}(I, \mathcal{T}_{r-1})$  の情報を用いて計算する;

Step 2 の具体的な内容に関して詳しく述べる。

- 1)  $\Omega(I; T_r)$  のサブフェイス  $\Omega(I; T_{r-1})$  で,  $\hat{\Omega}(I; T_{r-1}) \neq \emptyset$  であるものが存在しない場合は,  $\hat{\Omega}(I, T_r) := \emptyset$  とする。
- 2)  $\hat{\Omega}(I; T_{r-1}) \neq \emptyset$  であるものが存在する場合は,  $T_{r-1} = (J_{r-1}, K_{m-r+1}, S_{m-r+1})$ ,  $T_r = (J_r, K_{m-r}, S_{m-r})$ ,  $J_r = J_{r-1} \cup \{j_r\}$  として,  $\hat{\Omega}(I; T_{r-1})$  の点  $x^0$  で  $\psi_{r-1}(x^0; I, J_r) = 0$  (したがって,  $\psi(x^0; I, J_r) = 0$ ) を満たすものを探索する。これは, 1 パラメータサーチであるから容易に実行できる。
- 3)  $\chi(0) = x^0$  であるような曲線  $\{\chi(\eta) \mid \eta \in [0, 1]\} \subseteq \hat{\Omega}(I, T_r)$  を追跡するわけであるが, 式 (18):  $\psi(x; I, J_r) = 0$  は  $r-1$  個の方程式と  $r$  個の変数を持っているので, どれか 1 つの変数, 例えば,  $x_i$  をパラメータとして  $\psi(x; I, J) = 0$  を残りの変数に関して解くことになる。すなわち,  $\psi(x^\ell; I, J_r) = 0$  を満たす  $x^\ell \in \hat{\Omega}(I, T_r)$  が与えられているとき,

$$\psi(x^{\ell+1}; I, J_r) = 0, \quad x_i^{\ell+1} = x_i^\ell + \Delta, \quad x^{\ell+1} \in \Omega(i, T_r) \quad (27)$$

を満たす  $x^{\ell+1}$  を求めることを  $\partial\Omega(i, T_r)$  に達するまで繰り返すことになる。なお,  $S_{m-r+1}$  において  $\sigma_{j_r} = 0$  であれば, 式 (27) の  $\Delta > 0$  であり,  $\sigma_{j_r} = 1$  であれば,  $\Delta < 0$  とする。また,  $\ell = 0$  のときは,  $\hat{i} = j_r$  と選ぶ。

- 4) 実際には, 式 (27) は, ニュートン法を用いて解く。その際, 初期近似解としては,  $x^{\ell+1,0}$  を  $x_j^{\ell+1,0} = x_j^\ell$  ( $j \neq \hat{i}$ ),  $x_i^{\ell+1,0} = x_i^\ell + \Delta$  とする。ニュートン法は, 局所収束領域を持ち 2 次収束する性質があるので, 初期近似解の近傍に解がある場合は数回の繰り返しで収束する。一定の繰り返し回数を越えて反復が行われるや逐次近似解が  $x^\ell$  の近傍から外に出る場合には, 初期近似解の近傍には解はないと判断する。

$|\Delta|$  が小さいにも関わらず初期近似解の近傍に解が無い場合が生ずるのは,  $\chi(\eta)$  で定まる曲線が  $x_i$  の方向にはそれ以上延びない場合で, その場合は  $\hat{i}$  を解がある方向の要素に変更する必要がある。新しい  $\hat{i}$  の選び方は一意ではないが,  $x_j^{\ell-1}$  と  $x_j^\ell$  の変化分が大きいものを選ぶのが妥当である。また,  $\hat{i}$  を選び直したあと, 式 (27) における  $\Delta$  は,  $x_i^\ell - x_i^{\ell-1}$  と同符号になるように決める。

以上のことから, 仮定 1 が満たされる場合には,  $\partial V(g(\bullet; I); [0, 1]^m)$  を求めるためには,  $m$ -次元超立方体のフェイスの数だけ, 1 パラメータサーチを行えばよいので, 問題をかなり易しい問題に帰着できるが,  $m$ -次元超立方体のフェイスの数は, いぜんとして指数オーダーであるので, 次節では関数のクラスを限って少しでも手間を減らすことを考える。

## 5 多重線形関数の場合

まず, 幾つか例を示す。  $m = 3$  の場合の  $V(g(\bullet; I); \hat{\Omega}(I, T_r))$  の例を図 3, 4 に示す。ここで,

$$g(x; I) = \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \{0, 1\}^3} C_{k_1 k_2 k_3} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}, \quad I = (1, 1, 1) \quad (28)$$

図 3 において, 破線で示しているものが,  $V(g(\bullet; I); \hat{\Omega}(I, T_2))$  で 4 本あり, そのうち 2 本の一部が外部境界に現れている。そしてそれらを結ぶ形で, 両端に  $\circ$  をつけている点線で示されている 1 本の  $V(g(\bullet; I); \hat{\Omega}(I, T_3))$  があり, 外部境界に現れている。これらは全て曲線である。また, 実線の線分は  $\{V(g(\bullet; I); \Omega(I, T_1))\}$  を示し, 太い実線の多角形は,  $\text{outbd}[\{V(g(\bullet; I); \Omega(I, T_1))\}]$  を示す。

図 4 においては, 外部境界は,  $\text{outbd}[\{V(g(\bullet; I); \Omega(I, T_1))\}]$  と一致している。なお, 図 4 において小さな点は各  $x_i$  を  $[0, 1]$  を 10 等分した点における  $g(x; I)$  を示す。グリッディングした点の像だけから見ると値集合が複雑な形をしたものであるように見えるが, グリッディングの点数を増やせば, 外部境界で囲まれた集合全体になる。

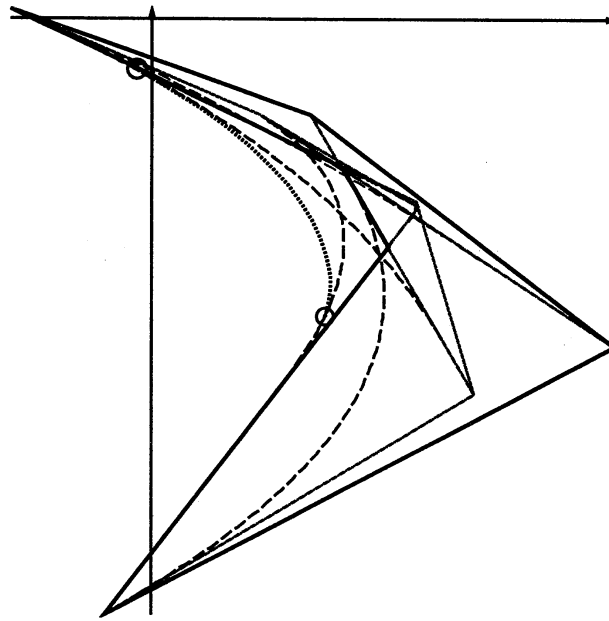


図3  $V(g(\bullet; I); \hat{\Omega}(I, T_3))$  が外部境界に現れる  $V(g(\bullet; I); [0, 1]^3)$  の例

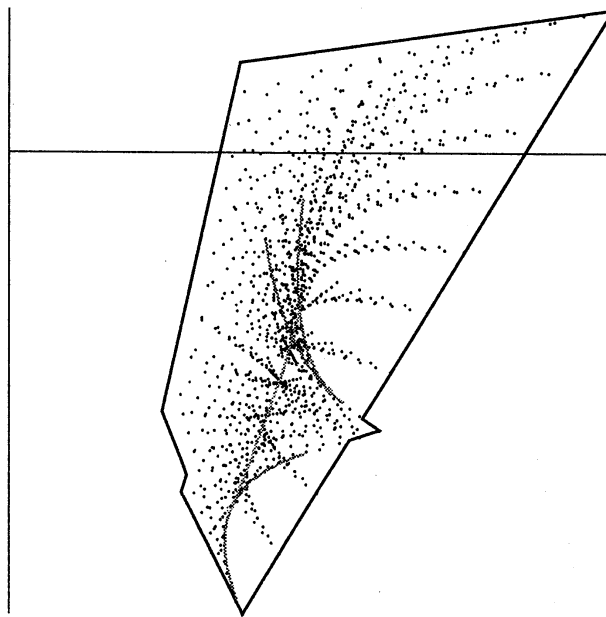


図4 外部境界が  $V(g(\bullet; I); \Omega(I, T_1))$  だけでまゐる  $V(g(\bullet; I); [0, 1]^3)$  の例

式 (28) における係数  $C_{k_1 k_2 k_3}$  を乱数で 600 組発生させたところ,  $m = 3$  の場合,  $V(g(\bullet; I); \hat{\Omega}(I, T_3))$  が外部境界に現れるものは, 10 組だけであった. また,  $m = 4$  の場合, 500 組のうちはっきり  $V(g(\bullet; I); \hat{\Omega}(I, T_r))$ ,  $r \geq 3$ , が外部境界に現れるものは, 3 組,  $V(g(\bullet; I); \hat{\Omega}(I, T_2))$  と殆んど重なっているものが 13 組であった. このように, 経験的には,  $V(g(\bullet; I); \hat{\Omega}(I, T_r))$ ,  $r \geq 3$ , が外部境界に現れるものはかなり少ない.

さて, 次に式 (28) の  $g$  ではなく, 元の  $f$  を考える. 便宜上, 次のように定義する.

#### 定義 1

1)  $z_{ik}^k \in V_{Z_k}$ ,  $k \in [1..m]$  とする. このとき,  $v^\ell = [z_{i1}^1, z_{i2}^2, \dots, z_{im}^m]^T$  を  $Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_m$  の端点と呼び,  $Z$  の端点の集合を  $\mathcal{V}_Z$  で表す.

2)  $L_{ik}^k = \text{conv}[z_{i_s}^k, z_{i_t}^k] \in E_{Z_k}$  とし,  $v^{k_s}, v^{k_t} \in \mathcal{V}_Z$  を  $j \neq k$  のとき,  $v_j^{k_s} = v_j^{k_t} = z_{i_j}^j$  であり,  $v_k^{k_s} = z_{i_s}^k$ ,  $v_k^{k_t} = z_{i_t}^k$  である  $Z$  の端点であるとする. このとき,  $v^{k_s}$  と  $v^{k_t}$  を結ぶ線分を  $Z$  の辺であるといい,  $Z$  の辺の集合を  $\mathcal{E}_Z$  で表す. ■

上のように  $\mathcal{E}_Z$  を定義すると, 式 (21) 右辺第 2 項は,

$$\text{outbd } \mathbf{V}(f; \mathcal{E}_Z) = \text{outbd } \left( \bigcup_{I \in \mathcal{I}} \bigcup_{T_1} \mathbf{V}(g(\bullet; I); \Omega(I, T_1)) \right)$$

となる.

多重線形関数に対しては, 写像定理 [22] によって

$$\text{conv } \mathbf{V}(f; Z) = \text{conv} \{f(v) \mid v \in \mathcal{V}_Z\}$$

が成り立つ<sup>2</sup>. したがって,

$$\mathbf{V}(g(\bullet; I); [0, 1]^m) \subseteq \text{conv} \{g(x; I) \mid x \in \Omega(I, T_0)\}$$

が成り立つ. このことを利用すると, 以下のような方法が考えられる.

**procedure CHECK\_CONV\_HULL**

Step 1.  $\text{outbd } \mathbf{V}(f; \mathcal{E}_Z) \in \mathcal{P}$  を計算する;

Step 2.  $\text{outbd } \mathbf{V}(f; \mathcal{E}_Z)$  の任意の端点がある  $v \in \mathcal{V}_Z$  に対する  $f$  の像であるならば (これは,  $\text{outbd } \mathbf{V}(f; \mathcal{E}_Z)$  の任意の端点が  $E, E' \in \mathcal{E}_Z$  に対する線分  $\mathbf{V}(f; E), \mathbf{V}(f; E)'$  の交点によって作り出された新しい点でないことを意味する<sup>3</sup>),  $\text{outbd } \mathbf{V}(f; Z) = \text{outbd } \mathbf{V}(f; \mathcal{E}_Z)$  であるので終了する;

Step 3. 各  $I \in \mathcal{I}$  に対して,  $\text{conv} \{g(x; I) \mid x \in \Omega(I, T_0)\} \subseteq \text{outbd } \mathbf{V}(f; \mathcal{E}_Z)$  であるかどうかを判定し, もしそうならば, この  $I$  については,  $\hat{\Omega}(I, T_r)$  の計算を省略する; そうでなければ, FIND-OMEGA を用いて  $\hat{\Omega}(I, T_r)$  を計算する;

例を示す. 式 (3) で与えられる  $f$  を考える. 実際は,  $Z_i, i \in [1.5]$  は, 複素平面における軸に平行な長方形であるが, このままではわかりにくいので, これらを適当な 4 角形とし,  $Z_6 = \{10\}$  として計算すると, 図 5 のようになる.

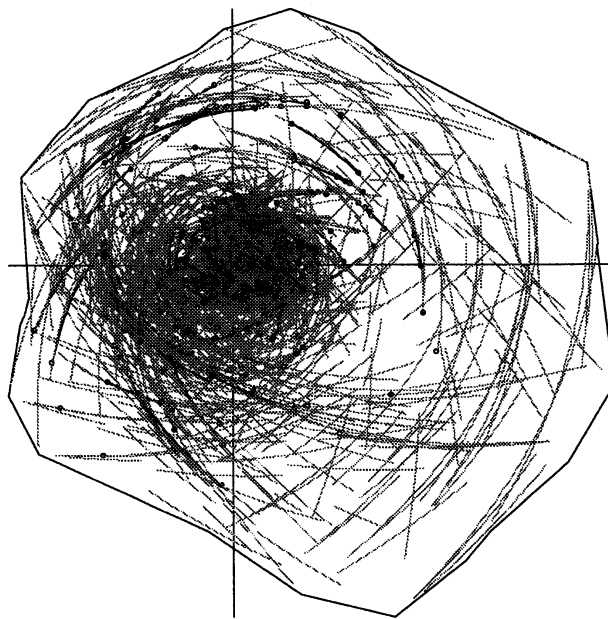


図 5 式 (3) の  $f$  に対する  $\mathbf{V}(f; Z)$ .

<sup>2</sup> 文献 [22] では,  $m = 2$  の場合を示しているが,  $m \geq 2$  の場合に対しても成り立つことは容易に証明できる.

<sup>3</sup> これは,  $\text{outbd}$  を計算するプログラムで検出するようになっている.

この例では、結果的に  $\text{outbd } \mathbf{V}(f; Z) = \text{outbd } \mathbf{V}(f; \mathcal{E}_Z)$  となっているが、CHECK\_CONV\_HULL の Step 2 の条件は満たしていない。図 5 は、CHECK\_CONV\_HULL を用いて計算したものであり、計算時間は、733.933(sec) で、1024 の組合せの内、924 の場合が、Step 3 の条件を満足し、 $\hat{\Omega}(I, T_r)$  の計算を省略することができた。一方、CHECK\_CONV\_HULL を用いずに計算した場合、計算時間は 6543.883(sec) であった。

したがって、CHECK\_CONV\_HULL を用いて計算時間を約 1/10 に短縮できており、CHECK\_CONV\_HULL が効果があることが確認できる。

## 6 おわりに

本文では、不確かさのパラメータを含む関数の値集合の外部領域に囲まれた領域の精度良い推定を計算する効率良い方法を提案した。定理 1, 補題 3, 5, は、以前に発表したもの [14] であるが、補題 4, 6 は新しい結果である。定理 2 自体は、[14] で与えられているものとはほぼ同様であるが、補題 4 と組み合わせることにより、4 節で提案したアルゴリズム FIND\_OMEGA では、超立方体  $[0, 1]^m$  の 2-フェイスでは、一般には、 $\Omega(I; T_r)$  全体で  $\hat{\Omega}(I, T_2)$  を探索する必要があるが、それ以上の  $r$ -フェイス  $\Omega(I; T_r)$  においては 1 パラメータサーチで十分であることが保証された点が本論文の主要な結果である。なお、多重線形関数の場合は、2-フェイスにおいても、補題 8 で、 $\hat{\Omega}(I, T_2)$  は線分になることがわかっているため  $\Omega(I; T_r)$  を探索する必要はない。

今後検討すべき点としては、以下のようなものが挙げられる。

- 1) 補題 4 では、仮定 1 を仮定しているが、これは、補題 4 の結論を導くための十分条件であり、さらに必要条件に近い条件が導出できる可能性がある。
- 2) 5 節では、多重線形関数の場合についてのみ述べたが、多変数多項式の場合についても同様なことができる可能性がある。そのためには、写像定理に相当するような結果が必要であるが、例えば、文献 [23], [24] にそのような結果が示されている。
- 3) 本文で提案した方法では、辺の組み合わせ毎に超立方体  $[0, 1]^m$  を考えるので、同じ  $\hat{\Omega}(I, T_r)$  が複数回計算される。これは、複体を表すようなデータ構造を作成することによって回避できる可能性がある。
- 4) 本文で採用しているアプローチとは別のアプローチで、

$$f(z) = \frac{z \text{ の線形関数}}{z \text{ の線形関数}}$$

で与えられる場合の  $f$  の値集合の境界は  $\mathcal{E}_Z$  の像で定められることがわかっているが [25], [26], これらのアプローチと本文でのアプローチを結合することができる可能性がある。

- 5) 実用上、最も頻繁に出てくる伝達関数のクラスは、

$$f(z) = \frac{z \text{ の多重線形関数}}{z \text{ の多重線形関数}}$$

であるが、これに対する効率のよい方法を考える必要がある。

## 参考文献

- [1] B. Barmish: *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan (1994).
- [2] J. J. Anagnost, C. A. Desoer and R. J. Minnichelli: Kharitonov's theorem and a graphical stability test for linear time-invariant systems, *Electron. Res. Lab., Univ. California, Berkeley, Memo, UCB/ERL M88/75* (1988).

- [3] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat and L. H. Keel: *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall (1995).
- [4] B. R. Barmish and R. Tempo: The robust root locus, *Automatica*, Vol. 26 pp.283-292 (1990).
- [5] 河村, 太田, 田川, 羽根田: ロバスト根軌跡法, 電気関連学会関西支部連合大会予稿集, S13 (1995).
- [6] I. Horowitz: *Synthesis of Feedback Systems*, Academic Press 1963.
- [7] J. Ackermann A. Bartlett, D. Kaesbauer, W. Sienel and R. Steinhauser: *Robust Control Systems with Uncertain Physical Parameters*, Springer-Verlag, Berlin (1993).
- [8] T. E. Djaferis: *Robust Control Design: A Polynomial Approach*, Kluwer Academic Pub. (1995).
- [9] F. N. Bailey, D. Panzer and G. Gu: Two algorithms for frequency domain design of robust control systems, *Int. J. Control*, Vol.48, No.5, pp.1787-1806 (1988).
- [10] Y. Ohta, F. Kawamura, A. Isogai, K. Tagawa and H. Haneda: Robust servosystem design by using PIA, *Proc. IECON94*, pp.1876-1881 (1994).
- [11] 佐伯正美: 2ディスク型混合感度問題の最適 PID 制御器の設計法, システム制御情報学会論文誌, Vol. 7, No. 12, pp. 520-527 (1994).
- [12] 太田, 李, 田川, 羽根田: 複数のロバスト仕様をみたす PID 制御器の設計, システム制御情報学会論文誌, 11 巻, 1 号 pp.26-34 (1998).
- [13] Y. Ohta, L. Gong and H. Haneda: Polygon interval arithmetic and design of robust control systems, *Proc. of 29th Conf. on Decision and Control*, pp.1065-1067 (1990).
- [14] Y. Ohta and M. Nagahara: On the computation of value sets of functions including uncertain parameters, 第 27 回制御理論シンポジウム pp.151-156 (1998).
- [15] Y. Ohta, L. Gong and H. Haneda: Polygon interval arithmetic and interval evaluation of value sets of transfer functions, *IEICE Trans. on Fundamentals*, Vol. E77-A, No. 6, pp.1033-1042 (1994).
- [16] Y. Ohta, H. Kakiuchi, M. Watabiki, K. Tagawa and H. Haneda: NPPIA for Fast Computation of Almost Correct Estimate of Value Sets of Transfer Functions, Proceedings of the 35th CDC, pp.2878-2883 (1996).
- [17] Y. Ohta: Non-convex Polygon Interval Arithmetic as a Tool for the Analysis and Design of Robust Control Systems, *J. of Reliable Computing*, Special Issue on Applications to Control, Signals and Systems, Vol. 6, No.3 (2000) to appear.
- [18] A. S. B. Holland: *Complex Function Theory*, Elsevier North Holland (1980).
- [19] L. Bears, *Introduction to Topology*, New York University (1945-1955).
- [20] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt: *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York (1970).
- [21] H. Edelsbrunner: *Algorithms in Combinatorial Geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.
- [22] C. V. Hollot, D. P. Looze and A. C. Bartlett: Parametric uncertainty and unmodelled dynamics : analysis via parameter space method, *Automatica*, Vol. 26, pp.269-282 (1990).

- [23] M. Zettler and J. Garloff: Robust Analysis of Polynomials with Polynomial Parameter Dependency Using Bernstein Expansion, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 43, no.3, pp.425-431 (1998).
- [24] T. J. Rivlin: Bounds on a polynomial, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B. Vol. 74B, pp.47-54 (1970).
- [25] M. Fu: Computing the frequency response of linear systems with parametric perturbations, Systems and Control Letters, Vol. 15, pp.45-52 (1990).
- [26] 太田, 福井, 垣内, 羽根田: ある種の伝達関数の値集合の高精度な推定, 第 26 回 SICE 制御理論シンポジウム pp. 391-394 (1997)

## 付録

(定理 1 の証明)  $K(z) = \{k \in [1..m] \mid z_k \in \text{int } Z_k\}$ ,  $L(z) = [1..m] - K(z)$  とし,

$$\tilde{Z} = \{\tilde{z} \mid \tilde{z}_\ell = z_\ell, \ell \in L(z), z_k \in Z_k, k \in K(z)\}$$

とすると, 明らかに  $z \in \text{ri } \tilde{Z}$  であり,  $z$  を含む相対的開近傍  $G \subseteq \tilde{Z}$  が存在する.  $\tilde{f}$  を  $f$  の  $\tilde{Z}$  への制限とすると, 開写像定理 ([18], p.225) によって,  $\mathbf{V}(\tilde{f}; G)$  は開集合になる. したがって, 式 (6) が成り立つ. 式 (7) は, 式 (6) が成り立つことから明らかである. ■

補題 3 の証明 1)  $\implies$  2), 3)  $\implies$  1) は明らかである. 2)  $\implies$  3) を示す.

2) は  $\tilde{h}^1 = [-h_2^1(x) \ h_1^1(x)]^T \in \mathbf{R}^2$  と  $h^j(x; I) \in \mathbf{R}^2$  が直交することを意味している. 一方,  $\tilde{h}^1$  と  $h^1(x; I)$  は直交しており, 全てのベクトルが 2 次元のベクトルであるので, 3) を得る. ■

補題 4 の証明. 補題 4 を, 陰関数定理と接続の性質 [20] の考え方をを用いて証明する.

仮定からある  $\hat{j} \in [1..m]$  が存在して,  $x$  における  $\psi(x; I)$  の偏微分行列から第  $\hat{j}$  列を取り除いた  $(m-1) \times (m-1)$  行列  $J(x)$  は正則である. 以下, 一般性を失うこと無く,  $\hat{j} = m$  であるとし,

$$x^* = \begin{bmatrix} \xi^* \\ \eta^* \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(x; I) = [J(x) \ \gamma(x)]$$

とおく. ただし,  $\xi^*, \gamma(x) \in \mathbf{R}^{m-1}$  で,  $J(x)$  は  $(m-1) \times (m-1)$  行列である.

仮定により,  $J(x), \gamma(x)$  は連続で,  $[0, 1]^m$  はコンパクトなので, ある定数  $\Delta > 0$  が存在して,

$$\|J(x)^{-1}\| \|\gamma(x)\| \leq \Delta \quad \forall x \in [0, 1]^m$$

が成り立つことに注意しておこう.

陰関数定理によって,  $\xi^*$  のある近傍  $B_\xi$  と  $\eta^*$  の近傍  $(\alpha^*, \beta^*) \subseteq [0, 1]$ ,  $\alpha^* < \eta^* < \beta^*$  が存在し, 任意の  $\eta \in [\alpha^*, \beta^*]$  に対して,  $\psi(x; I) = \psi((\xi, \eta); I) = 0$  は一意解  $\xi(\eta) \in \overline{B_\xi}$  を持ち,  $\xi: B_m \rightarrow \mathbf{R}^{m-1}$  は連続微分可能であり,

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta}(\eta) = J^{-1}(\chi(\eta))\gamma(\chi(\eta)), \quad \chi(\eta) = \begin{bmatrix} \xi(\eta) \\ \eta \end{bmatrix}$$

である. もし, ある  $\tilde{\eta} \in [\eta^*, \beta^*]$  に対して,  $\chi(\tilde{\eta}) \in \partial[0, 1]^m$  となるならば,  $\tilde{x} = \chi(\tilde{\eta})$  とすればよいので, 任意の  $\eta \in [\eta^*, \beta^*]$  に対して,  $\chi(\eta) \in (0, 1)^m$  の場合を考える.

上と同様な操作を繰り返すと, 単調増加な数列  $\{\beta_j\}$ ,  $\beta_1 = \beta^*$  とそれに対応する  $\{\chi_j(\cdot): [\beta_j, \beta_{j+1}]\}$  が得られることになる (ただし, 作り方から  $\chi_{j-1}(\beta_j) = \chi_j(\beta_j)$  である) が,

1) ある  $j$  と  $\tilde{\eta} \in [\beta_j, \beta_{j+1}]$  に対して  $\chi_j(\tilde{\eta}) \in \partial[0, 1]^m$  ( $\beta_{j+1} \geq 1$  の場合も含む) となり, 繰り返しが終了す

るか,

2) 任意の  $j$  に対して  $\beta_j < 1$  かつ 任意の  $\eta \in [\beta_j, \beta_{j+1}]$  に対して,  $\chi_j(\eta) \in (0, 1)^m$  となるかのいずれかである.

2) の場合は,  $\tilde{\beta} = \lim_{j \rightarrow \infty} \beta_j \leq 1$  であり, 任意の  $k < j$  に対して,

$$|\xi(\beta_j) - \xi(\beta_k)| = \left| \int_{\beta_k}^{\beta_j} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}(\beta) d\beta \right| = \left| \sum_{\ell=k}^{j-1} \int_{\beta_\ell}^{\beta_{\ell+1}} J^{-1}(\chi_\ell(\beta)) \gamma(\chi_\ell(\beta)) d\beta \right| \leq \Delta |\beta_j - \beta_k|$$

となる. したがって,  $\{\xi(\beta_k)\}$  は, コーシー列であり収束し,  $\chi(\tilde{\beta}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_k(\beta_k)$  とおくと,  $\psi$  の連続性から,  $\psi(\chi(\tilde{\beta}); I) = 0$  である.  $\chi(\tilde{\beta}) \in \partial[0, 1]^m$  となる場合は,  $\tilde{x} = \chi(\tilde{\beta})$  とすればよい.

そうでない場合は,  $\tilde{\beta} < 1$  であり,  $\chi(\tilde{\beta})$  において再び陰関数定理を適用できることになるので,  $\{\beta_j\}$  の定め方と  $\tilde{\beta}$  がその極限であるということに矛盾する.

以上によつて,  $\eta$  を  $\eta^*$  から増加させると, ある  $\eta = \hat{\eta}$  に対して,  $\chi(\hat{\eta}) \in \partial[0, 1]^m$  となる. また,  $x^* = \xi(\eta^*)$  である.

同様にすれば,  $\eta$  を  $\eta^*$  から減少させると, ある  $\eta = \hat{\eta}$  に対して,  $\chi(\hat{\eta}) \in \partial[0, 1]^m$  となる.

最後に, 区間  $[\hat{\eta}, \hat{\eta}]$  を  $[0, 1]$  に規格化すれば結論が得られる. ■