

熱対流における攪乱の非線形相互作用

京大 数理研 後藤 金英
相模工業大学 水島 二郎

§1. Introduction

図1のように、2枚の鉛直平板の間に流体が満たされている。2枚の平板の温度 T_1 と T_2 が異なっていれば、 T_1 と T_2 の差がいかに小さくても、流体中に対流が発生する（自然対流、一次対流）。2枚の平板の長さ（ x 方向）が有限のとき、つまり、上と下の端が固体壁で閉じられているときには、 x 方向に温度勾配ができる（Elder, 1965）。ここでは、有限深さの影響は x 方向の温度勾配 β を系全体につけ加えることでおきかえ、平板は無限であると仮定する。

平板間の温度差を大きくしていくと、自然対流は不安定となる。自然対流の不安定性には2つの形が存在する。一つは定常波攪乱による不安定性で、もう一つはTS波攪乱による不安定性である（Mizushima & Gotoh, 1976, Bergholz, 1978）。いずれの不安定性が起るかは、 x 方向の温度勾配、

ス平板間の温度差の α に依存して決まる。 α のパラメータ G と m を $G = \rho g L^3 \Delta T / \nu^2$, $4m^4 = \beta \alpha G$ と定義すると、その安定性は図2で示される。図2ではプラントル数の $(= \nu / \kappa)$ が10のときの安定性を示している。ここで、 ρ は流体の体積膨張率、 g は重力加速度、 L は平板間の距離、 ΔT はス平板の温度差、 ν は流体の動粘性係数、 β は ΔT と L で無次元化した α 方向の温度勾配である。

それでは、いずれの攪乱にも不安定であるパラメータ領域では、どのようなことが起るのか。二つの攪乱が同時に成長するのか、一方の攪乱が他方によっておさえられ、一つだけ成長するのか、あるいは互いに成長したり、減衰したりすることを交互に周期的にくり返すのか。ここでは、攪乱の主流へのはね返りだけを考慮に入れて(導線形)、二つの攪乱に不安定であるパラメータ領域での攪乱の競合について調べた。

§2-1. 定式化と線形問題

無次元量を用いて運動方程式、連続の式、流体の熱膨張の式、熱伝導の方程式を書くと次のようになる。ただし、運動方程式には Boussinesq 近似を用いることにする。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p + (pG)^{-1}(1+p)g + G^{-1}\nabla^2 u, \quad (2.1)$$

$$\nabla u = 0, \quad (2.2)$$

$$p = -pT, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u \cdot \nabla) T = (\sigma G)^{-1}\nabla^2 T. \quad (2.4)$$

境界条件は次の通りである。

$$u(\pm 1, y, z) = 0, \quad T(\pm 1, y, z) = \pm 1 + \beta z \quad (2.5)$$

定常解を $u = [0, 0, W_s(x)]$, $T = T_s(x) + \beta z$, $p = P_s(x)$ とおくと,

$W_s(x)$, $T_s(x)$, $P_s(x)$ はそれぞれ次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} W_s(x) &= -0.5 m^{-2} \operatorname{Im}[f(x, m)], \\ T_s(x) &= \operatorname{Re}[f(x, m)], \\ P_s(x) &= (pG)^{-1}(0.5\beta p z^2 - z) + \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

ここで, $f(x, m) = \sinh[(1+i)m x] / \sinh[(1+i)m]$.

$m \rightarrow 0$ の極限で定常速度分布 $W_s(x)$, 定常温度分布 $T_s(x)$ は次のように簡単な形になる。

$$\left. \begin{aligned} W_s(x) &= \frac{1}{6} x(1-x^2), \\ T_s(x) &= x. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

また, $m \rightarrow \infty$ の極限では, $W_s(x)$, $T_s(x)$ の形は境界層的な形となり, $x=1$ の近くで, 変数 $\xi = m(1-x)$ を用いて次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} W_s(\xi) &= 0.5 m^{-2} e^{-\xi} \sin \xi, \\ T_s(\xi) &= e^{-\xi} \cos \xi. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

線形安定性を調べるために、(2.6)の定常解 $u_s = [0, 0, w_s(x), T_s(x), P_s(x)]$ に無限小攪乱 $\hat{u} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$, $\hat{T}$, $\hat{P}$ を重ね合わせ、 $u = u_s + \hat{u}$, $T = T_s + \hat{T}$, $P = P_s + \hat{P}$ を (2.1) ~ (2.4) に代入し、攪乱に關して非線形の項を無視すると、 $\hat{u}, \hat{T}, \hat{P}$ に關する線形方程式を得る。定常解 w_s と T_s は y と z に依存しないので、攪乱は次のようにフーリエ成分に分解し、各々個別に取り扱うことができる。

$$[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T}, \hat{P}] = [\phi(x), \psi(x), \chi(x), \theta(x), p(x)] \times \exp[ij(z - ct) + i\delta y] \quad (2.9)$$

$j(>0)$ と δ はそれぞれ z, y 方向の波数であり、 $c = c_r + i c_i$ とおくと c_r は位相速度、 $j c_i$ は増巾率である。 c_i が正、ゼロ、負であるに従って、攪乱は増巾、中立、減衰する。 $m \neq 0$ のときには二次元攪乱が最も不安定であるという証明はできないが、簡単のために二次元攪乱 ($\delta = 0, j = \alpha$) のみを考える。(2.9) で $\delta = 0, j = \alpha$ とおいたものを攪乱に対する線形方程式に代入し、 ψ, χ, p を消去すると、 ϕ, θ に關する次の方程式を得る。

$$(W_s - c)(D^2 - \alpha^2)\phi - (D^2 W_s)\phi = (i\alpha G)^{-1} \{ (D^2 - \alpha^2)\phi - D\theta \} \quad (2.10)$$

$$(W_s - c)\theta + (D T_s)\phi = (i\sigma\alpha G)^{-1} \{ (D^2 - \alpha^2)\phi + 4m^4 D\phi \} \quad (2.11)$$

境界条件は次のようになる。

$$\phi(\pm 1) = D\phi(\pm 1) = \theta(\pm 1) = 0. \quad (2.12)$$

(2.10)~(2.12)の固有値問題を $C_r = 0$ とおいて解くと中立曲線が得られる。 $\sigma = 10$ のときに、この固有値問題を解いて得られた臨界Grashof数 G_c が図2に描かれている。図2では G_c のカーブの branch は二つある。一つは定常波攪乱による不安定 (ST不安定) に対応するもので、もう一つは T.S.波攪乱による不安定 (TS不安定) に対応するものである。二つのカーブは $m = 1.6$ で交わっている。

§2-2. 準線形問題

場の量を平均流と攪乱に分解する。

$$u = \bar{u} + \tilde{u}, \quad p = \bar{p} + \tilde{p}, \quad T = \bar{p}z + \bar{T} + \tilde{T},$$

$$\text{ここで, } \bar{x} = \frac{1}{4L_y L_z} \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_z}^{L_z} x \, dy \, dz$$

ただし、攪乱は y, z に對して周期的とし、その周期を $2L_y, 2L_z$ とする。これらを (2.1)~(2.4) に代入し、平均をとると、 $\bar{u}, \bar{p}, \bar{T}$ を決める式ができる。 $\bar{u} = [0, 0, \bar{W}(x, t)]$, $\bar{T} = \bar{T}(x, t)$ を仮定する。

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} - \frac{1}{G} \left(\bar{T} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \bar{u} \tilde{w} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + (\bar{\rho} \bar{W} - \frac{1}{\sigma G} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2}) + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\tilde{u} \tilde{T}} = 0. \quad (2.14)$$

攪乱の式は (2.1) ~ (2.4) から (2.13), (2.14) を引いた次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla) \bar{u} + ((\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u} - \overline{(\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u}}) \\ = -\nabla \tilde{p} - \frac{1}{G} \tilde{T} g + \frac{1}{G} \nabla^2 \tilde{u}, \\ \nabla \tilde{u} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \tilde{T} + (\tilde{u} \cdot \nabla) \bar{T} + ((\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{T} - \overline{(\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{T}}) + \bar{\rho} \tilde{w} \\ = \frac{1}{\sigma G} \nabla^2 \tilde{T} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

攪乱を $\tilde{u} = \sum_{\sigma, p} u_{\sigma p} \exp[i(\sigma y + p z)]$ のように Fourier 分解する。
エネルギー式を作ると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 |u_{\sigma p}|^2 dx &= - \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} (u_{\sigma p} w_{\sigma p}^* + u_{\sigma p}^* w_{\sigma p}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{G} (T_{\sigma p} w_{\sigma p}^* + T_{\sigma p}^* w_{\sigma p}) \right\} dx - \frac{2}{G} \int_{-1}^1 \left(\left| \frac{\partial u_{\sigma p}}{\partial x} \right|^2 + \alpha^2 |u_{\sigma p}|^2 \right) dx \\ &\quad + (\text{三次の項}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 |T_{\sigma p}|^2 dx &= - \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} (u_{\sigma p} T_{\sigma p}^* + u_{\sigma p}^* T_{\sigma p}) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\rho} (w_{\sigma p} T_{\sigma p}^* + w_{\sigma p}^* T_{\sigma p}) \right\} dx - \frac{2}{\sigma G} \int_{-1}^1 \left(\left| \frac{\partial T_{\sigma p}}{\partial x} \right|^2 + \alpha^2 |T_{\sigma p}|^2 \right) dx \\ &\quad + (\text{三次の項}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

一方、平均量の式は $\partial/\partial t$ の項を省略して次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \bar{T} = \sigma G \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\delta, p > 0} (u_{\delta p} w_{\delta p}^* + u_{\delta p}^* w_{\delta p}),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} - 4m^2 \bar{W} = \sigma G \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\delta, p > 0} (u_{\delta p} T_{\delta p}^* + u_{\delta p}^* T_{\delta p}).$$

$f = \bar{T} - 2im^2 \bar{W}$, $M = (1+i)m$ とおくと, 上式の解は次のようになる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sinh Mx}{\sinh M} + \cosh Mx \int_{-1}^x g(x') \cosh Mx' dx' \\ &\quad - \sinh Mx \int_{-1}^x g(x') \sinh Mx' dx' - \frac{\sinh M(x+1)}{2 \sinh M} \int_{-1}^1 g(x') \cosh Mx' dx' \\ &\quad + \frac{\sinh M(x+1)}{2 \cosh M} \int_{-1}^1 g(x') \sinh Mx' dx'. \end{aligned}$$

ここで, $g(x) = \sigma G \sum_{\delta, p > 0} (u_{\delta p} T_{\delta p}^* + u_{\delta p}^* T_{\delta p}) - 2im^2 G \sum_{\delta, p > 0} (u_{\delta p} w_{\delta p}^* + u_{\delta p}^* w_{\delta p}).$

エネルギー-式中の $\partial \bar{W} / \partial x$, $\partial \bar{T} / \partial x$ は次式から得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_0 + I(g),$$

$$\begin{aligned} I(g) &= g + M \left\{ \sinh Mx \int_{-1}^x g \cosh Mx' dx' - \cosh Mx \int_{-1}^x g \sinh Mx' dx' \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cosh M(x+1)}{2 \sinh M} \int_{-1}^1 g \cosh Mx' dx' + \frac{\cosh M(x+1)}{2 \cosh M} \int_{-1}^1 g \sinh Mx' dx' \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

$u_{\delta p}$, $\theta_{\delta p}$ の空間分布を線形理論の固有関数で近似する。

$$\left. \begin{aligned} u_{\delta p} &= i\alpha a_\alpha(t) \phi_\alpha(x) \exp(-i\alpha Crt), \quad v_{\delta p} = 0, \quad p = \alpha, \quad \delta = 0 \\ w_{\delta p} &= -a_\alpha(t) \partial \phi_\alpha / \partial x \exp(-i\alpha Crt), \\ T_{\delta p} &= b_\alpha(t) \theta_\alpha(x) \exp(-i\alpha Crt). \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

(2.19)を(2.16), (2.17), (2.18)に代入して, $a_\alpha(t), b_\alpha(t)$ の発展を支配する式を得る。(2.16), (2.17)では三次の項を無視する。

$$g(x) = \sum_{\alpha' > 0} \left\{ 2\alpha' G m^2 |a_{\alpha'}|^2 \left(\phi_{\alpha'}^* \frac{d\phi_{\alpha'}}{dx} - \phi_{\alpha'} \frac{d\phi_{\alpha'}^*}{dx} \right) + 2\alpha' G \sigma (a_{\alpha'} b_{\alpha'}^* \phi_{\alpha'} \theta_{\alpha'}^* - a_{\alpha'}^* b_{\alpha'} \phi_{\alpha'}^* \theta_{\alpha'}) \right\}.$$

この手続きでは, $d|a_\alpha|^2/dt, d|b_\alpha|^2/dt$ に対する式しか得られない。 $a_\alpha b_\alpha^*$ の位相, $\psi \equiv \arg(a_\alpha b_\alpha^*)$ の時間発展を記述する式が必要なので, T と渦度の ψ 成分の積平均から $d(a_\alpha b_\alpha^*)/dt$ に対する式を作り, その式から $d\psi/dt$ に対する式を導く。その結果次のように $|a_\alpha|^2, |b_\alpha|^2, \psi$ の時間発展を支配する式を得る。

$$\begin{aligned} L_{uu0} \frac{d}{dt} |a_\alpha|^2 &= - \left(\frac{\alpha}{m^2} L_{uu1} + \frac{2}{G} L_{uu3} \right) |a_\alpha|^2 - \frac{2}{G} \operatorname{Re}[L_{uu2} a_\alpha b_\alpha^*] \\ &\quad - \sum_{\alpha' > 0} \alpha \alpha' G \left\{ 2 N_{uu1} |a_\alpha|^2 |a_{\alpha'}|^2 + \frac{\sigma}{m^2} \operatorname{Re}[N_{uu2} |a_\alpha|^2 a_{\alpha'} b_{\alpha'}^*] \right\}, \quad (2.20) \\ L_{\theta\theta 0} \frac{d}{dt} |b_\alpha|^2 &= 2\alpha \operatorname{Im}[L_{\theta\theta 1} a_\alpha b_\alpha^*] + 2\beta \operatorname{Re}[L_{uu2} a_\alpha b_\alpha^*] \\ &\quad - \frac{2}{\sigma G} L_{\theta\theta 2} |b_\alpha|^2 + \sum_{\alpha' > 0} \left\{ 4m^2 \alpha \alpha' G \operatorname{Im}[N_{\theta\theta 1} |a_{\alpha'}|^2 a_\alpha b_\alpha^*] \right. \\ &\quad \left. + \sigma \alpha \alpha' G \operatorname{Re}[N_{\theta\theta 2} a_{\alpha'} b_{\alpha'}^* a_\alpha b_\alpha^* - N_{\theta\theta 3} a_{\alpha'}^* b_{\alpha'} a_\alpha b_\alpha^*] \right\}, \end{aligned}$$

(2.21)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi = \text{Im} \left[\frac{1}{a_\alpha b_\alpha^*} \frac{1}{L_{u00}} \left[\left(-\frac{i\alpha}{2m^2} L_{u01} + \frac{1}{\sigma G} L_{u04} \right) a_\alpha b_\alpha^* \right. \right. \\ \left. \left. - (i\alpha L_{u02} + \beta L_{u03}) |a_\alpha|^2 + \frac{1}{G} L_{u05} |b_\alpha|^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{\alpha' > 0} i\alpha\alpha' G \left\{ (N_{u01} |a_{\alpha'}|^2 + \frac{\sigma}{4m^2} N_{u02} a_{\alpha'} b_{\alpha'}^* + \frac{\sigma}{4m^2} N_{u03} a_{\alpha'} b_{\alpha'}^* \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times a_\alpha b_\alpha^* + (2m^2 N_{u04} |a_{\alpha'}|^2 + \frac{i\sigma}{2} N_{u05} a_{\alpha'} b_{\alpha'}^* - \frac{i\sigma}{2} N_{u06} a_{\alpha'} b_{\alpha'}^*) |a_\alpha|^2 \right\} \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

ここで, $a_\alpha b_\alpha^* = |a_\alpha| \cdot |b_\alpha| \cdot e^{i\psi}$.

係数を書き表わすために次の functional を定義する。

$$F_\alpha(x) = I(\phi_\alpha^* \frac{d\phi_\alpha}{dx} - \phi_\alpha \frac{d\phi_\alpha^*}{dx}), \quad F_0 = M \frac{\cosh Mx}{\sinh M}$$

$$G_\alpha(x) = I(\phi_\alpha \theta_\alpha^*), \quad H_\alpha(x) = I(\phi_\alpha^* \theta_\alpha).$$

これらを用いて係数は次のように書ける。

$$L_{u00}(\alpha) = \int_{-1}^1 (|\frac{d\phi_\alpha}{dx}|^2 + \alpha^2 |\phi_\alpha|^2) dx,$$

$$L_{u01}(\alpha) = \int_{-1}^1 \text{Im}[\phi_\alpha^* \frac{d\phi_\alpha}{dx}] \text{Im}[F_0] dx,$$

$$L_{u02}(\alpha) = \int_{-1}^1 \theta_\alpha^* \frac{d\phi_\alpha}{dx} dx,$$

$$L_{u03}(\alpha) = \int_{-1}^1 (|\frac{d^2\phi_\alpha}{dx^2}|^2 + 2\alpha^2 |\frac{d\phi_\alpha}{dx}|^2 + \alpha^4 |\phi_\alpha|^2) dx,$$

$$N_{u01}(\alpha, \alpha') = \int_{-1}^1 \text{Im}[\phi_\alpha^* \frac{d\phi_{\alpha'}}{dx}] \text{Im}[F_{\alpha'}] dx,$$

$$N_{u02}(\alpha, \alpha') = \int_{-1}^1 \text{Im}[\phi_\alpha^* \frac{d\phi_{\alpha'}}{dx}] (G_{\alpha'} - H_{\alpha'}^*) dx,$$

$$L_{000}(\alpha) = \int_{-1}^1 |\theta_\alpha|^2 dx,$$

$$L_{\theta\theta 1}(\alpha) = \int_{-1}^1 \theta_{\alpha}^* \phi_{\alpha} \operatorname{Re}[F_0] dx,$$

$$L_{\theta\theta 2}(\alpha) = \int_{-1}^1 (|\frac{d\phi_{\alpha}}{dx}|^2 + \alpha^2 |\theta_{\alpha}|^2) dx,$$

$$N_{\theta\theta 1}(\alpha, \alpha') = \int_{-1}^1 \theta_{\alpha}^* \phi_{\alpha} \operatorname{Re}[F_{\alpha'}] dx,$$

$$N_{\theta\theta 2}(\alpha, \alpha') = \int_{-1}^1 \theta_{\alpha}^* \phi_{\alpha} (G_{\alpha'} + H_{\alpha'}^*) dx,$$

$$N_{\theta\theta 3}(\alpha, \alpha') = \int_{-1}^1 \theta_{\alpha}^* \phi_{\alpha} (G_{\alpha'}^* + H_{\alpha'}) dx,$$

$$L_{u\theta 0}(\alpha) = \int_{-1}^1 (\frac{d\theta_{\alpha}^*}{dx} \frac{d\phi_{\alpha}}{dx} + \alpha^2 \theta_{\alpha}^* \phi_{\alpha}) dx,$$

$$L_{u\theta 1}(\alpha) = \int_{-1}^1 \operatorname{Im}[F_0] (\frac{d\phi_{\alpha}}{dx} \theta_{\alpha}^* + \phi_{\alpha} \frac{d\theta_{\alpha}^*}{dx}) dx,$$

$$L_{u\theta 2}(\alpha) = \int_{-1}^1 \phi_{\alpha}^* (\frac{d^2 \phi_{\alpha}}{dx^2} - \alpha^2 \phi_{\alpha}) \operatorname{Re}[F_0] dx,$$

$$L_{u\theta 3}(\alpha) = \int_{-1}^1 \frac{d\phi_{\alpha}^*}{dx} (\frac{d^2 \phi_{\alpha}}{dx^2} - \alpha^2 \phi_{\alpha}) dx,$$

$$L_{u\theta 4}(\alpha) = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d\theta_{\alpha}^*}{dx} (\frac{d^3 \phi_{\alpha}}{dx^3} - \alpha^2 \frac{d\phi_{\alpha}}{dx}) + \alpha^2 \theta_{\alpha}^* (\frac{d^2 \phi_{\alpha}}{dx^2} - \alpha^2 \phi_{\alpha}) \right\} dx \\ \times (\sigma + 1) - [D\theta_{\alpha}^* D^2 \phi_{\alpha}]_{-1}^{+1},$$

$$L_{u\theta 5}(\alpha) = \int_{-1}^1 \theta_{\alpha}^* \frac{d\theta_{\alpha}}{dx} dx,$$

$$N_{u\theta 1}(\alpha, \alpha') = \int_{-1}^1 \operatorname{Im}[F_{\alpha'}] (\frac{d\phi_{\alpha}}{dx} \theta_{\alpha}^* + \phi_{\alpha} \frac{d\theta_{\alpha}^*}{dx}) dx,$$

$$N_{u\theta 2}(\alpha, \alpha') = \int_{-1}^1 (G_{\alpha'} - H_{\alpha'}^*) (\frac{d\phi_{\alpha}}{dx} \theta_{\alpha}^* + \phi_{\alpha} \frac{d\theta_{\alpha}^*}{dx}) dx,$$

$$N_{u\theta 3}(\alpha, \alpha') = \int_{-1}^1 (G_{\alpha'}^* - H_{\alpha'}) (\frac{d\phi_{\alpha}}{dx} \theta_{\alpha}^* + \phi_{\alpha} \frac{d\theta_{\alpha}^*}{dx}) dx,$$

$$N_{u\theta 4}(\alpha, \alpha') = \int_{-1}^1 \phi_{\alpha}^* (\frac{d^2 \phi_{\alpha}}{dx^2} - \alpha^2 \phi_{\alpha}) \operatorname{Re}[F_{\alpha'}] dx,$$

$$Nu05(\alpha, \alpha') = \int_{-1}^1 \phi_{\alpha'}^* \left(\frac{d^2 \phi_{\alpha}}{dx^2} - \alpha^2 \phi_{\alpha} \right) (G_{\alpha'} + H_{\alpha'}^*) dx,$$

$$Nu06(\alpha, \alpha') = \int_{-1}^1 \phi_{\alpha'}^* \left(\frac{d^2 \phi_{\alpha}}{dx^2} - \alpha^2 \phi_{\alpha} \right) (G_{\alpha'}^* + H_{\alpha'}) dx.$$

3. 数値計算と結果.

第一の例として, $\sigma = 10.0$, $m = 1.6$, $G = 900.0$ で計算した。
このときの固有値は次の通りである。

ST WAVE	$\alpha_c = 1.20$	$\alpha G_c = 1080.0$	$C_r = 0.0$	$C_i = 0.0010607$
TS WAVE	0.32	288.0	0.04753	0.000095

いろいろな初期条件の組合せに対して攪乱の発展を追う数値計算を行ったが、結果の一部を図3, 4に示す。これらの例では、温度攪乱のSTモードは初めからゼロとおいた。

それは、この成分をゼロとしないで行ったどの計算例でも、この成分が急速に減衰し、減衰した成分を残しておくと数値計算上の困難を来すが、厳密にゼロとおくとこの困難は除かれるからである。

二つの図から(他の計算例も同様)どの場合も振巾、位相差とも有限時間内に平衡値に達することがわかる。その値は次のようになった。

	$ a_\alpha ^2$	$ b_\alpha ^2$	$\arg(a_\alpha b_\alpha^*)$
ST WAVE	9.06×10^{-7}	0	—
TS WAVE	3.6×10^{-7}	3.6×10^{-7}	4.1×10^{-3}

この結果は超臨界状態における平衡状態の可能性を示しているといえる。更に、このことが鉛直流体層における自然対流の固有の性質であるかどうかを断言するためには、パラメータ G と m のより広範囲の値について計算を行う必要がある。

References

- Gotoh, K. and Mizushima, J.: J. Phys. Soc. Japan 34 (1973) pp1408-1413.
- Mizushima, J. and Gotoh, K.: J. Fluid Mech. 73 (1976) pp65-75.
- Bergholz, R. F.: J. Fluid Mech. 83 (1978) pp743-768.
- Elder, J. E.: J. Fluid Mech. 23 (1965) pp77-98.

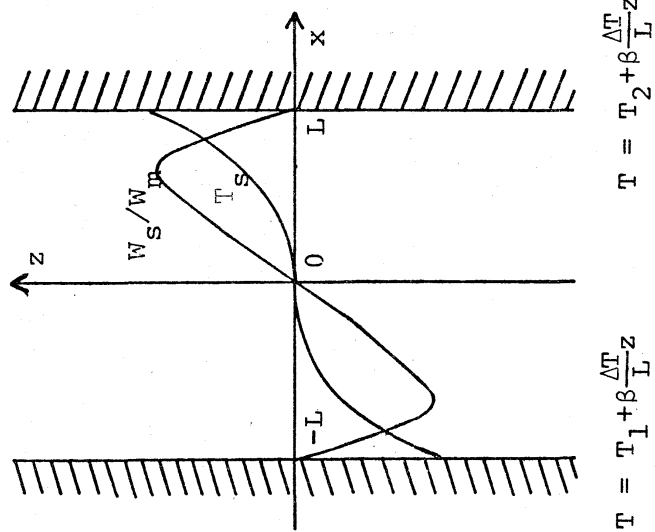


Fig. 1. An example of the unperturbed

velocity profile and temperature

distribution. $m = 2.0$. $W_m = \max_{0 < x < l} W_s(x)$.

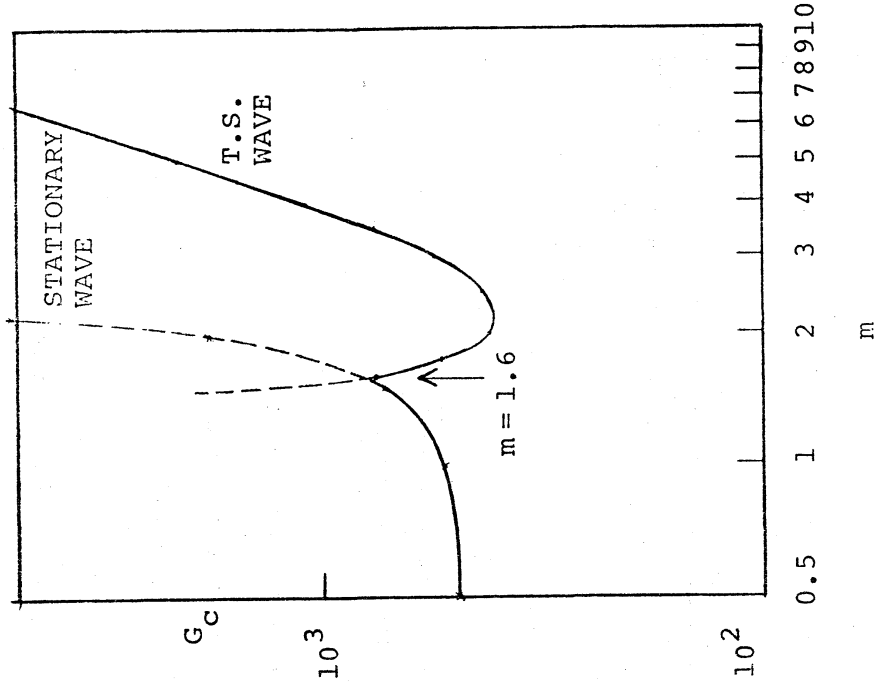


Fig. 2. Change of the critical Grashof number G_c with m . $\sigma = 10.0$.

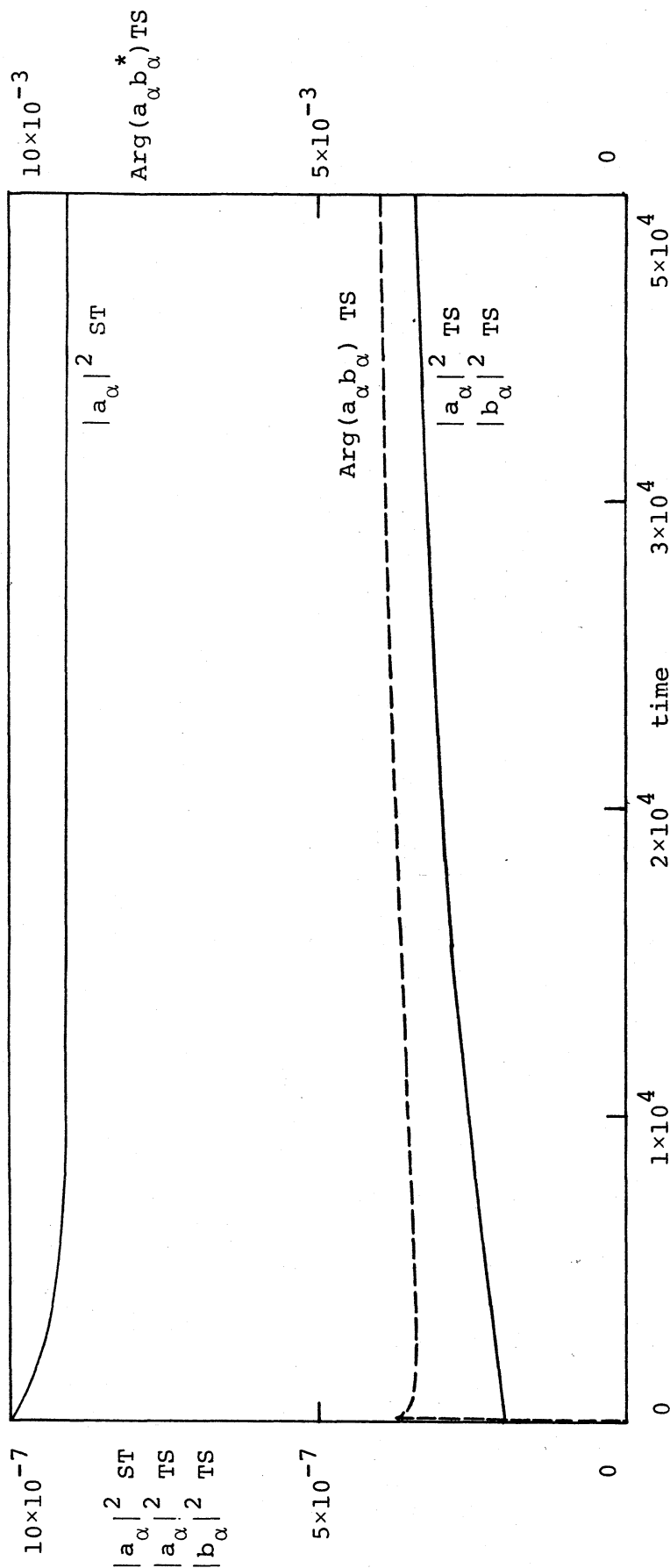


Fig. 3. Development of the square amplitudes of the velocity and temperature fluctuations and the phase difference between them.

ST and TS denote the stationary and traveling disturbances respectively. $|a_\alpha|^2$ and $|b_\alpha|^2$ denote the square amplitude of velocity and temperature disturbances. $\text{Arg}(a_\alpha b_\alpha^*)$ is the phase difference between the velocity and temperature disturbances.

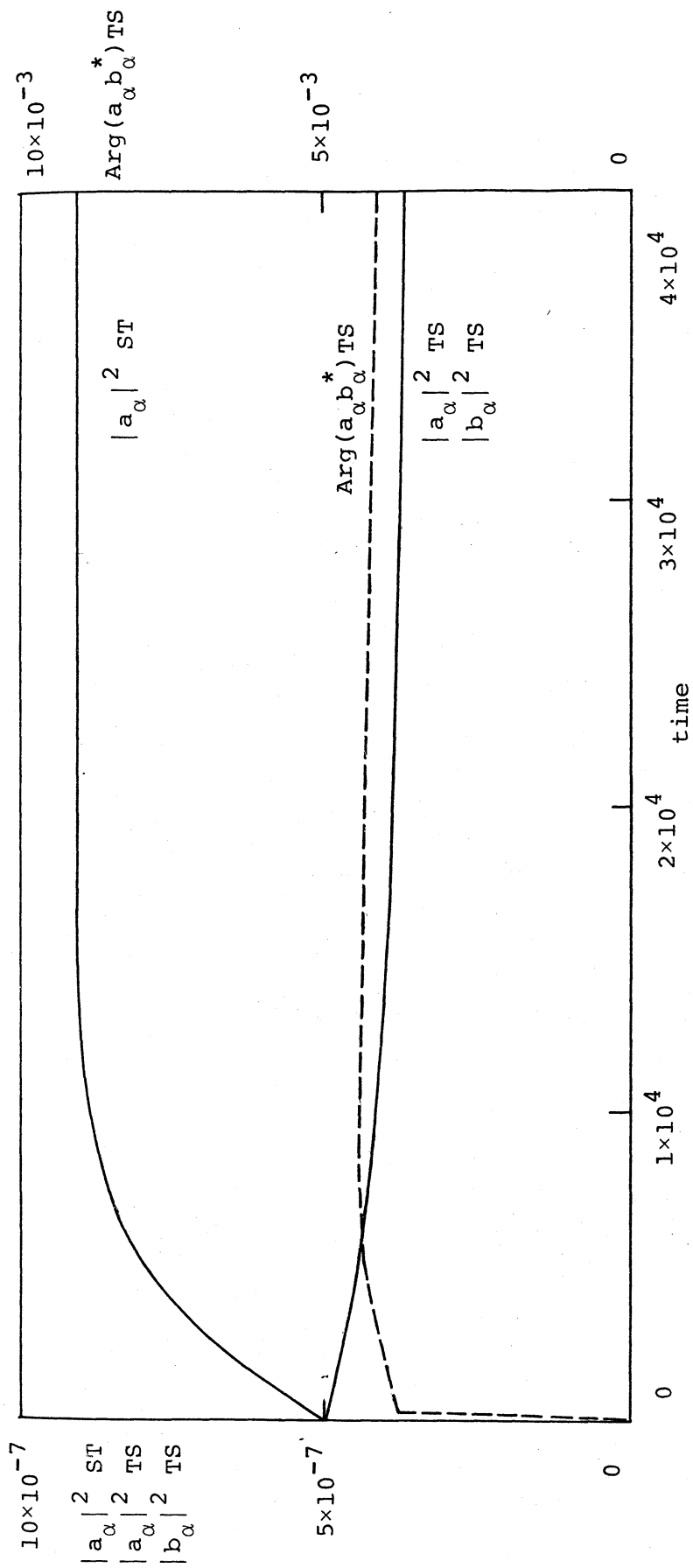


Fig. 4. See legend of figure 3.