

C^* 環論と位相力学系

東京都立大理 高山 淳 (Jun Tomiyama)

1. はじめに. 力学系 $\Sigma = (X, G)$ が与えられると, それから変換群 C^* 環と呼ばれる C^* 環 A_Σ がつくれる. ここで一般には X は局所コンパクト空間で G は局所コンパクト群である. 従って Σ は flow であつても, 又離散力学系であつてもよい. そして "原理的には" Σ を与えることと C^* 環 A_Σ を与えることは等価と見とられる. C^* 環論においては変換群 C^* 環は重要な位置を占めており理論に豊富な材料を与えている. その代表的なものには単位円周上の無理数角の回転 G_θ よりつくられた無理数 C^* 環 A_θ である. A_θ は単位元をもつ可分単純 C^* 環であるが豊富な projection をもち, AF 環 (有限次 C^* 環の増大列からつくられる C^* 環) の中に埋めこめる等々豊かな構造が見出されている.

さて A_Σ を C^* 環として研究すること自体はその方向として

は Σ のカラスとして研究と論議するわけであるが、 A_Σ もカラスの研究の代数的アプローチととらえることも出来る。しかしこのような立場をとったとすると本来原理的に等価な構造と Σ の A_0 の構造の豊かさを比べるカラス $\Sigma_0 = (T, \sigma_0)$ にとつて何を意味しているのであらうか？ C^* 環 A_Σ の構造についての研究は非常に多い。しかし上の持る立場からの結果は次の2つだけである。1つは $\Sigma = (X, \sigma)$ (X はコンパクト空間) の場合、 Σ の極小性と A_Σ の単純性が同値という結果で他の1つは最近の A_Σ が AF 環に埋めこめるためのカラスとしての条件をとった Rimsner の結果 ([3]) である。そしてこの2つとも A_0 のそれぞれの特長のカラスとしての背景を示しているが他の特長の(カラスとしての)解析にはとておぼろげである。

本稿はこのような Σ と A_Σ との相互関係の立場からの研究の一端を示すものである。

2. C^* クラス積一位相変換群 C^* 環. このより以後はコンパクト空間 X 上に離散群 G が位相同型群として作用しているカラス $\Sigma = (X, G, \sigma_s)$ を考える。 C^* 環 A_Σ は技術的には次のようにして作られる。まず σ_s により $C(X)$ に σ_s を起した $*$ -同型 α_s とかく、即ち $\alpha_s(f)(t) = f(\sigma_s^{-1}t)$ 。これによる G の $C(X)$ への作用 α が考えられる。このことを $\{C(X), G, \alpha\}$ は一般に C^* -カ

系と呼ばれている。 $k(G, C(X))$ を G 上の有限個の G の元以外
は 0 とする $C(X)$ に値をとる関数 $x(s)$ の集合とする。こ
のとき $k(G, C(X))$ は作用 α の "ひねり" を入れた次のような演算
により単位元をもつ $*$ -ノルム環になる。即ち $x, y \in k(G, C(X))$
について

$$xy(t) = \sum_s x(s) \alpha_s(y(s^{-1}t))$$

$$x^*(s) = \alpha_s(x(s^{-1})^*), \quad \|x\|_1 = \sum_s \|x(s)\|.$$

このようにノルム環のヒルベルト空間上の有界線形作用系
環 $B(H)$ の π への表現は (準同型 π で $\pi(a) = \pi(a)^*$ とするもの)
常に $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ をみたすことが知られている。そこで
 $k(G, C(X))$ に新しいノルム

$$\|x\|_\infty = \sup \|\pi(x)\| \quad (\pi \text{ は } * \text{-表現のすべてを動く})$$

を定義する。 $\|x\|_\infty$ は定義から $*$ 環のノルムの特性 $\|x^*x\| = \|x\|^2$ をもつがその完備化された $*$ 環が A_Σ であり、 $*$ 環論
では $C(X)$ のスカラー環として通常 $C(X) \rtimes_\alpha G$ と記される。そこで $C(X)$
の元 f について G の単位元 e 上で f , 他では 0 とする関数 f
と同一視すれば、 $C(X)$ は $k(G, C(X))$ の自己共役部分環従って A_Σ
の自己共役部分環として isometric に埋めこめる。実際 A_Σ の
単位元は $C(X)$ のそれの A_Σ への埋めこみである。更に $s \in G$ に
ついて $s \neq 1$, 他では 0 とする関数 δ_s を取ると、 δ_s は A_Σ の
unitary 元で次の共変式をみたす。

$$\delta_s f \delta_s^* = \alpha_s(f) \quad s \in G$$

一般に $C(X)$ の $B(H)$ への表現 π と G の unitary 表現 u があり
て

$$u_s \pi(f) u_s^* = \pi(\alpha_s(f))$$

とされているとき、これを $\{C(X), G, \alpha\}$ の共変表現といる。 A_G は上のルール4つ定義と δ_s の性質から

(a) $\{C(X), G, \alpha\}$ の共変表現について universal 特性をもつ。

ことがわかる。ここで $x \in K(G, C(X))$ は $x(s) = f_s$ とすれば

$$x = \sum_s f_s \delta_s \quad (\text{有限和}) \quad \text{とかけらる。この意味で上の積はこの}$$

展開による自然な積になっている。即ち

$$xy = \left(\sum_s x(s) \delta_s \right) \left(\sum_t y(t) \delta_t \right) = \sum_{s,t} x(s) \delta_s y(t) \delta_t$$

$$= \sum_t x(s) \alpha_s(y(t)) \delta_{st} = \sum_t \left(\sum_s x(s) \alpha_s(y(s^{-1}t)) \right) \delta_t$$

とたがって次が成り立つ。

(b) $\{ \sum_s f_s \delta_s \mid f_s \in C(X) \}$ は A_G の稠密な自己共役部分環である。
又 $\{ \delta_s \mid s \in G \}$ は $C(X)$ 上1次独立である。

(c) A_G より $C(X)$ へのルール41の射影 E が存在し。

$$E(x) = x(e) \quad x \in K(G, C(X)).$$

この写像 E は正値写像 ($x \geq 0$ かつ $E(x) \geq 0$) であるが、
($x \geq 0$ で $E(x) = 0$ かつ $x = 0$) には一般にすぎず、このこと
が A_G と $C(X)$ との関係が稀薄にし A_G の解析を困難にしている。

そこで更に縮約交換群の環 $A_{G,r} = C(X) \rtimes_r G$ (縮約 C^* -クロス積)
が考えられる。 $A_{G,r}$ は (b) の性質と (c) の代りに (共変表現

$\{\pi, \lambda\}$ によって $f \in C(X)$ と $\pi(f)$ とを同一視して) 次の (c') の性質をみたしている。

(c') A_{Σ_r} より $C(X) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Sigma_r, \lambda_r) = f_e$ とするより容易に 1.4.1 の射影が存在する。

A_{Σ_r} の定義の詳細は略するがその解析には上の条件と共に $a \in A_{\Sigma_r}$ によって $a(s) = \mathcal{E}(a\lambda_s^*)$ とおくと $C(X)$ の元 $\{a(s)\}$ が次のように a を完全に定まるといふ点に留意しなければならない。

$$1^\circ a(s) = 0 \quad \forall s \in G \Rightarrow a = 0$$

$$2^\circ a^*(s) = \alpha_s(a(s^{-1}))^*,$$

$$ab(s) = \sum_t a(t) \alpha_t(b(t^{-1}s))$$

(一般に右辺の和は無限和になりその収束は 1.4.4 位相で行う。他の各所凸位相だが和自体は右辺の定義から部分 C^* 環 $C(X)$ に属する)

A_Σ は X が 1 点の時には群 C^* 環 $C^*(G)$ に、又 A_{Σ_r} は縮約群 C^* 環 $C_r^*(G)$ に属する。 A の性質から A_Σ から A_{Σ_r} へは当然 $*$ 準同型があるが、これが同型になるのは群 C^* 環のときと同様に

定理 1. G が amenable のとき、上が同型になる。

したがって amenable 群 (たとえば可換群) については $A_\Sigma = A_{\Sigma_r}$ によって (a) と (c') の両方の特性が使えることになる。上の $\{a(s) \mid s \in G\}$ は a の Fourier 係数と呼ぶ。実際 $G = \mathbb{Z}$ で X が

一点のときは, Z は amenable なから

$$A_Z = A_{\Sigma_Y} = C^*(Z) = C_r^*(Z) = C(T) \quad (T \text{ は トーラス})$$

とする. ϕ は正規化されたルベフ測度で ϕ 積分によるので上の $\{a(s)\}$ は関数 a のフーリエ係数になっている. これから ϕ 可換のフーリエ展開の意味で a と $\{a(s)\}$ との対応 $a = \sum_s a(s) \lambda_s$ とかくことも多い.

変換群 C^* 環 (一般には C^* クロスク) の構成は元々は $L(G, C(X))$ の関数が主体なのでカラム系が離散系でなく連続系のとときには $C(X)$ を A_Z の部分環と考えることも, またユニタリー元 ϕ_s を A_Z の元と考えることも出来る. 要するに A_Z をもつと拡大した C^* 環の中で実現されるので, A_Z の構成の議論はいささか局面が変わることと注意しておく.

本稿のさうな立場で問題を考えるとときには通常のカラム系で課される可算性の条件は必ずしも容認出来る. ことがあることも強調せねばならない. C^* 環的には可算性は $C(X)$ の可分性 (それと G の可算性) の問題になる. しかし C^* 環の中でも特に可換 von Neumann 環は有限次元以外に可分になる. その上 shift 作用系の問題 ([1]) のさうにそれと $C(X)$ と同一視した時の, コンパクト空間 X 上のカラム系が対象になることがあるからである.

A_Z の構成にまつて最後に次のさうな観点をのべておく. 位

相空間 X を代数的にとり扱えばその上の連続関数環 $C(X)$ と考えることである。 X に更に群 G の作用 α があるとき $\{X, G, \alpha\}$ と考えることは G の $C(X)$ への作用 $\{C(X), G, \alpha\}$ と考えることと同値である。そこで $\{C(X), G, \alpha\}$ が忠実な共変表現 $\{\pi, u\}$ をもつとすると、 $\{C(X), G, \alpha\}$ と考えることは $\{\pi(C(X)), u(G)\}$ としてそれらで生成した C^* 環と考えることと同値である。この C^* 環は G の作用が自明である限り必然的に非可換になるが、(ついでに生成 C^* 環から (a), (b), (c) という一連の条件を生成の性質をもつものを選んでのが A_∞ である) ときとる。(条件で π と $\pi|_G$ は同一視している)。

3. G の軌道と A_∞ の既約表現。 C^* 環としての A_∞ はその表現の構造が未だ問題になるが、それと G の軌道の性質との関係を考えてみる。表現を構成する具体的な方法としては C^* 環 A 上の正値汎関数 φ による GNS-表現 (Gelfand-Newmark-Segal) がある。

$$N_\varphi = \{x \in A \mid \varphi(x^*x) = 0\} \quad \text{と置く。}$$

N_φ は φ の正値性から導びかれる Schwarz の不等式によって A の左イデアルになる。そこで γ を商写像 $A \rightarrow A/N_\varphi$ として A/N_φ の内積を

$$(\gamma_\varphi(x), \gamma_\varphi(y)) = \varphi(y^*x)$$

で入れこれを完備化したヒルベルト空間を H_φ とする. $a \in A$ について A/N_φ 上の有界線形作用素 $\pi_\varphi(a)$ を $\pi_\varphi(a)\zeta_\varphi(x) = \zeta_\varphi(ax)$ と定義しこれを H_φ 上に拡大したものを又 $\pi_\varphi(a)$ とかくことにすると, π_φ は A の H_φ 上への表現とす. φ は H_φ の vector ζ_φ によって $\varphi(a) = (\pi_\varphi(a)\zeta_\varphi | \zeta_\varphi)$ とかける. $1 \in A$ のときには $\zeta_\varphi = \zeta_\varphi(1)$ である. $\{H_\varphi, \pi_\varphi, \zeta_\varphi\}$ の3つ組を φ の GNS 表現と呼ぶ. ここで $[\pi_\varphi(A)\zeta_\varphi] = H_\varphi$ である.

単位元をもつ A_Σ のような C^* 環上では正値汎関数が $\|\varphi\| = 1$ とするのと $\varphi(1) = 1$ とは同値になるので, このような正値汎関数(以下 *state* と呼ぶ)の全体 $S(A_\Sigma)$ は共役空間の弱*コンパクトな凸集合をつくっている. したがって端点を充分沢山持つ加えこれを *pure state* といい, φ が *pure state* することと GNS 表現 $\{H_\varphi, \pi_\varphi, \zeta_\varphi\}$ が既約なこととは同値である.

さて $x \in X$ の G 軌道を $O(x)$ とかく. すると

$$X_n = \{x \in X \mid |O(x)| = n\}, \quad X^n = \{x \in X \mid |O(x)| \leq n\},$$

G_x を x の isotropy 群とする. A_Σ 上の *state* の φ では X の点 x の評価から得られる $C(X)$ 上の *pure state* φ_x (i.e. $\varphi_x(f) = f(x)$) を A_Σ まで拡大したものがカテゴリーの情報と自然になるからと考へる. そこでその GNS 表現の構造から次のような G_x の表現からの A_Σ の誘導(共変)表現 $\rho_{x,u}$ を定義する. u は G_x の H_u 上へのユニタリ表現, $R = \{Y_\alpha\}$ (ただし $Y_0 =$

$e)$ π を coset 空間 G/G_x の代表元集合, γ として

$$H = \ell^2(G/G_x) \otimes H_u = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \otimes H_u \quad (\text{ヒルベルト和}).$$

と置く. ここで $\{e_{\alpha}\}$ は $\ell^2(G/G_x)$ 上の直交基底である. γ として

$C(X)$ の表現と G のユニタリ表現を

$$\pi_x^R(f)(e_{\alpha} \otimes \xi) = f(\gamma_{\alpha} x) e_{\alpha} \otimes \xi \quad (\gamma_{\alpha} x \in \gamma_{\alpha} x \text{ とかく}).$$

$$L_u^R(s)(e_{\alpha} \otimes \xi) = e_{\beta} \otimes u_t \xi \quad (s \gamma_{\alpha} = \gamma_{\beta} t \quad t \in G_x)$$

と定義すると $\{\pi_x^R, L_u^R\}$ は共変表現とする A_L の表現を定義

する. ここでユニタリ同値の意味でこの表現は R のとり方

(と議論 $\{e_{\alpha}\}$ のとり方) に関係しないのでこれを以下 $\rho_{x,u} =$

$\pi_x \times L_u$ とかく.

命題 2 (a) $\phi \in \varphi_x$ の A_L への state 拡大とすると ϕ の GN S 表現は上の形をしている.

(b) $\rho_{x,u}$ が既約となるのは u が既約のとき, γ と γ' のみ.

ここで H_{ϕ} の中で $e_{\alpha} \otimes H_u$ に対応する部分空間は

$$\{\xi \in H_{\phi} \mid \pi_{\phi}(f)\xi = f(x)\xi, \quad \forall f \in C(X)\}$$

である.

定理 3. $\rho_{x,u}$ と $\rho_{y,v}$ がユニタリ同値になるための条件は

$O(x) = O(y)$ であつて $y = \gamma_0 x$ とおいたとき, G_x の 2 つの表現

$t \rightarrow u_t$ と $t \rightarrow U_{r_0,t} r_0^{-1}$ がユニタリ同値になることである。

このことから具体的な力学系について φ_x と φ_y の state 拡大の GNS 表現がユニタリ同値になるかが判定出来る。例として無理数回転 σ_θ においては isotropy 群はすべて自明であるから、条件は $O(x) = O(y)$ のみになる。

上の表現は A_Σ の表現としては非常にわかり易い形をしているが一般には Σ と Σ の既約表現でも上のよう形をしているとは限らない。例えば $L^2(T)$ 上に $C(T)$ の表現として掛算作用素 $\pi(f)g = fg$ をとり、ユニタリ $U_\theta(x) = f(x-\theta)$ と定義した $\{C(T), \Sigma, \alpha_\theta\}$ の共変既約表現 (即ち A_θ の既約表現) はこの形にはなっていない。C*-環論としては A_Σ にしてももっと一般の誘導表現が定義され、 A_Σ の既約表現が常にこの形になるための条件などが議論されているが、それには軌道空間 X/G が常識的測度論的にかなり良い空間になっている必要がある。 X/G はたしかに原理的には A_Σ の表現の構造になっているのであるが explicit を対応とすると、 σ_θ の場合でもこの意味では非常に“悪い”空間になっているので (Connes の非可換積分論を用いる方法もあるが) この辺の解析は今の所進んでいない。

点 x が有限軌道をもつとき $p_{x,u}$ を有限型の表現と呼び、上

にのべたことを考慮すれば下の結果がそう自明なものである
ことも伺える。

定理4. χ の元がすべて有限軌道をもてば A_Σ の既約表現は
すべて有限型である。逆も成り立つ。

ここで有限型既約表現は G_Σ の表現の結合があるので一般に
は有限次元にほころぶ。が例えば G が可換のときには G_Σ の
既約表現は1次元にほころぶので有限型と有限次元とは同じにほ
ろぶ。そしてこのときには G_Σ の character にほころぶ。
ここで χ 全体に条件をつけなくても A_Σ の有限次元既約表現は
 $\rho_{\chi, \mu}$ の形にほころぶことを言うので、 G が可換のときには次元を
固定すれば A_Σ の n 次元既約表現の空間は複素空間 $X_n/G \times \hat{G}_\Sigma$
として実現出来る。しかし異なる次元を合せるとその軌道の
位相のちがいが問題になり、 G の作用に何か好条件を仮定しなけ
れば表現空間の global を実現結果は期待出来る。

$\mathbb{C}^*$ 環の種類としてはすべての既約表現が有限次元にほころぶ
が有限次元 $\mathbb{C}^*$ 環の次に簡単な構造をもつと知られている。
即ち A_Σ については G が可換のときにはカラス系が上の定理のよ
うにほころんでいる時である。しかしカラス系としてほころぶであ
るか？

§4. A_Σ のイデアルの構造と G の作用 この節全体で G の X への作用は effective とする。即ち $s \neq e$ のとき s は X 上の位相同型として恒等写像ではなるとする。この作用の時と同様に X 上の G 軌道が全射稠密であるとき Σ が極小とすることにする。また X の任意の空でない開集合 U, V をとると

$$\exists s \in G : sU \cap V \neq \emptyset$$

とすると Σ は regionally transitive, X に稠密な軌道が存在すると Σ を位相推移的と呼ぶことにする。 C^* 環論では上の regionally transitive が位相推移的と呼ばれることが多い。 X を距離空間とすれば、 G が可算なときには両者の区別がないことはよく知られているが、我々の立場ではむしろこの違いが大事な問題になる。

さて上の称相に対して A_Σ の C^* 環としての基本称相は単純か、prime か primitive かということにする。ここで prime とは A_Σ の閉イデアル I, J が $I \cap J = \{0\}$ なら I または J が 0 イデアルということ、 A_Σ が忠実なファクター表現 (表現の生成するノイミニ環の中心が自明) をもつことと^{ほぼ}同値である。

A_Σ が忠実な既約表現をもつとき primitive とする。なお A_Σ のイデアル I は商 C^* 環 A/I が prime, primitive のときそれぞれ prime, primitive と呼ぶ。1 節で述べたように単純性については、 $\Sigma = (X, \sigma)$ のとき Σ の極小性と同値で

あった。しかし極小性は G がどんな群であつても (前述のよう
に) 定義出来るので、この結果がどこまで成り立つかが先づ問
題になる。そこで A_Σ のイデアル構造が

$$I \cap \mathcal{C}(X) \neq \{0\} \iff I \neq \{0\} \quad \dots\dots (A)$$

という形で $\mathcal{C}(X)$ のものに帰着するならば、問題は $\mathcal{C}(X)$ の G 不変
なイデアルの構造、したがつて X の G 不変な閉集合の構造の話を
とり、カラスの状況から色とりとが割り出せる。そこで上
の状況をとりなすようにカラスの条件を考へてみる。

$X_s = \{x \in X \mid sx = x\} \quad (s \in G, \sigma_s \text{ の代りに } s \text{ とかく})$
とかく。次の条件を考へる。

$$\forall s \neq e : X_s \text{ の内点はある} \quad \dots\dots (B)$$

定理 5. $(B) \Rightarrow (A)$ である。逆は例とば G が可換群のと
を成り立つ。ただし G は amenable とする。

系. G を可換群とする。このとき

(1) $\Sigma = (X, G)$ が極小であることと、 A_Σ が単純なことは
同値である。

(2) Σ が regionally transitive なことと A_Σ が ~~prime~~ prime
なことは同値である。

両方の証明ともによりこゝとそこには集合 X_s が G の作用で不変なことが本質的に与っている。そういった例たとえば G が極小のとき $X_s = \phi$ ($s \neq e$) となる、(A) の条件から A_E が単純なことがわかる。

一般に $C(X)$ の G の作用で不変なイデアルから A_E のイデアルを生成することは常に出来るから、 A_E の代数的条件から力学系の条件を導びくことはそう困難ではない。しかし番通は (A) の条件は期待でそれにより A_E のイデアルの状態を記述するのは難しい問題になる。そして (A) に対応する力学系の条件がある問題とされるが、それが少なくとも可換群のときには (B) の条件になるわけである。さて上の (i) は $G = \mathbb{Z}$ の場合の拡張になっているが、 C^* 環の枠組では可換群 G に対しては一般の C^* 環について $B \rtimes_{\alpha} G = B \rtimes_{\alpha} G$ が単純又は prime になるための力学系 (B, G, α) の条件が知られている。しかしそれは Connes spectrum を用いた C^* 環の言葉で与えられている。 C^* 環論としては、 G が可換コンパクト可換群の時にはクロス積の研究が良くされているが非可換群の作用については殆んど理論として手が付いていないのが現状である。しかし amenable な非可換群の作用などは通常力学系でもよく見られるので定理 5 が与える、成立するものが (B) の代りに与える正しい力学系の条件があるかは意味ある問題である。

問 amenable群の作用が極小かつ(B)は成立するか?

§4. その他. 紙数の都合もあつて本稿では測度の役割に全然ふれてゐる例とば不変測度の存在は A_∞ の問題としては $\text{trace}(\tau(xy) = \tau(yx))$ とするよる state) の存在に直接つながらり. その一意性などが議論されてゐる. 例とば A_0 の場合は $C(T)$ 上のルベフ測度と 1 の projection E とをとり $\tau = \mu \cdot E$ が唯一つの trace になっている. 又エルゴード測度の存在やその台の構造も $C(X)$ と A_∞ の双方から眺めた形で問題として, 可算性下では大事な部分になるが, その後述する一般的な議論にふいては, 位相的の問題程に測度論の問題は重大な役割を果たすように思ふ.

文 献

1. 河村-武元: C^* -algebras associated with shift dynamical systems, J. Math. Soc. Japan 36 (1984), 279-293
2. 河村-武元-富山: State extensions in transformation group C^* -algebras, to appear in Acta Sci. Math.
3. M. V. Pimsner: Embedding some transformation group C^* -algebras into AF-algebras, Ergodic theory and Dynam. Sys., 3 (1983), 613-626
4. 富山: Invitation to C^* -algebras and topological dynam. Sys. 1987.