

原子核の集団運動と自己無撞着集団座標の方法

筑波大・物理学系 橋本幸男

1. Introduction

原子核は有限の大きさを持った量子力学的多体系である。原子核を構成している核子は自分達の間の核力でのみ束縛されている（自己束縛系）。そのために、原子核に生じる集団運動、即ち、原子核平均場の運動は、強い非線形性を持つ。特に集団運動の振幅が大きくなると非線形性はますます重要になってくる。このような、平衡状態から大きく離れた原子核の集団運動を記述する目的で、自己無撞着集団座標の方法（SCC法）が研究されてきた。^{1), 2), 3)}

SCC法は主に時間依存ハートレー・フォック（TDHF）の枠内で定式化されてきた。ここでもTDHFを利用してSCC法の考え方を簡単に述べる。

2. 自己無撞着集団座標の方法

簡単のために、集団運動はひと組の集団変数 $\eta^*(t)$, $\eta(t)$ によって記述されるとする。

TDHFは、次の方程式から出発する。

$$\delta \langle \phi(t) | \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) | \phi(t) \rangle = 0 \quad (1)$$

ここで、 $|\phi(t)\rangle$ は単一スレーター行列で、ハートレー・フォック基底状態 $|\phi_0\rangle$ と

$$|\phi(t)\rangle = \exp(i\hat{F}(t)) |\phi_0\rangle, \quad (2)$$

$$\hat{F}(t) = \sum_{\mu i} (f_{\mu i}(t) a_{\mu}^{\dagger} b_i^{\dagger} + f_{\mu i}^*(t) b_i a_{\mu}) \quad (3)$$

の関係がある。 $a_{\mu}^{\dagger}(b_i^{\dagger})$ は粒子（空孔）の生成演算子である。又、 $\mu(i)$ は粒子（空孔）の準位を表わし、 $\hbar=1$ とした。

$f_{\mu i}(t)$ は、複素数で時間を含んでいる。この $\{f_{\mu i}(t), f_{\mu i}^*(t)\}$ が張る空間は、TDHF相空間と呼ばれる。SCC法は、この多次元から成るTDHF相空間の中に、最適な集団運動部分空

間を構成する。SCC の基本方程式は、

$$\delta \left\{ e^{itE_0} \langle \phi_0 | \hat{H} - i \frac{\partial}{\partial t} | \phi_0 \rangle e^{-itE_0} \right\} = 0, \quad (4a)$$

$$\delta \left\{ e^{itE_0} \langle \phi_0 | \hat{U}(\eta^*, \eta) \left(\hat{H} - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{U}^{-1}(\eta^*, \eta) | \phi_0 \rangle e^{-itE_0} \right\} = 0, \quad (4b)$$

$$\hat{U}(\eta^*, \eta) = \exp(-i\hat{G}(\eta^*, \eta)), \quad (5)$$

$$\hat{G}(\eta^*, \eta) \equiv \sum_{\mu i} \left\{ g_{\mu i}(\eta^*, \eta) a_{\mu}^{\dagger} b_i^{\dagger} + g_{\mu i}^*(\eta^*, \eta) b_i a_{\mu} \right\} \quad (6)$$

である。(4a)式はハートレー・フォック基底状態 $|\phi_0\rangle$ (エネルギー E_0) によって満足される。(4b)式を満たすようにユニタリー変換 $\hat{U}(\eta^*, \eta)$ の関数形を決定する。そのために、 η^*, η による巾展開を用いる。

$$g_{\mu i}(\eta^*, \eta) = \sum_{rs} x_{\mu i}(r, s) \eta^{*r} \eta^s \quad (7)$$

この展開式を(4b)式に入れ、正準変数条件

$$\frac{1}{2} \eta^* = \langle \phi_0 | \hat{U}(\eta^*, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \hat{U}(\eta^*, \eta) | \phi_0 \rangle \quad (8)$$

を考慮しつつ各巾ごとに(4b)式が成り立つように展開係数 $x_{\mu i}(r, s)$ を低次項から決めて行けばよいことになる。そのとき、境界条件として

$$g_{\mu i} (1 \text{ 次}) = -i(\phi_{\mu i} \eta + \phi_{\mu i}^* \eta^*) \quad (9)$$

となることを要請する。ここで、 $\phi_{\mu i}$, $\phi_{\mu i}^*$ は乱雑位相近似 (RPA) での粒子・空孔対の振幅である。これらの条件により決定された $g_{\mu i}(\eta^*, \eta)$ の具体的な形は、文献1)に詳しい。

ところで、(4b)を書き換えると、

$$\delta \langle \phi_0 | \hat{U} \hat{H} \hat{U}^{-1} - i \dot{\eta} \hat{O}^{\dagger}(\eta^*, \eta) + i \dot{\eta}^* \hat{O}(\eta^*, \eta) | \phi_0 \rangle = 0, \quad (10)$$

$$\hat{O}^+(\eta^*, \eta) \equiv \hat{U} \frac{\partial}{\partial \eta} U^{-1}$$

$$\hat{O}(\eta^*, \eta) = -\hat{U} \frac{\partial}{\partial \eta^*} \hat{U}^{-1}$$

となる。この形は、原子核が変形し、 x -軸のまわりに一様回転している場合の、克蘭キング模型の方程式

$$\delta \langle \phi(\omega_{\text{rot}}) | \hat{H} - \omega_{\text{rot}} \cdot \hat{J}_x | \phi(\omega_{\text{rot}}) \rangle = 0, \quad (11)$$

$$\langle \phi(\omega_{\text{rot}}) | \hat{J}_x | \phi(\omega_{\text{rot}}) \rangle = I$$

に似ている。ここで、 ω_{rot} は、 x -軸のまわりの角速度、 I は系の角運動量を表わす。第二項の、 $-\omega_{\text{rot}} \cdot \hat{J}_x$ が、回転により粒子運動に変化を起こす部分である。それに対応するのは、(10) 式の $-i\eta \hat{O}^+ + i\eta^* \hat{O}$ の部分であり、これが、集団運動と粒子運動との結合を表現している。(10) 式では、集団運動の動き方と、集団運動を構成している粒子運動 ($\hat{O}^+$ と $\hat{O}$) とが自動的に決まっていく。これは、(11) 式が「 x -軸のまわりの」「一様な」回転を表わす、という外からの条件で導かれているのと対照的である。

3. SCC 法と正準変換

TDHF 相空間中に集団運動部分空間を作り出す SCC 法を、正準変換の見方で書き直すこともできる。

TDIF 相空間は、 $f_{\mu i}$ から $C_{\mu i}$ への変数変換、

$$C_{\mu i} = i \sum_{\nu} \left(\frac{\sin \sqrt{f f^\dagger}}{\sqrt{f f^\dagger}} \right)_{\mu \nu} f_{\nu i} \quad (12)$$

によって正準変数 $\{C_{\mu i}, C_{\mu i}^*\}$ で特徴付けられる。³⁾ $C_{\mu i}$ は、正準方程式

$$i\dot{C}_{\mu i} = \frac{\partial H}{\partial C_{\mu i}^*}, \quad i\dot{C}_{\mu i}^* = -\frac{\partial H}{\partial C_{\mu i}}, \quad (13)$$

$$H = \langle \phi_0 | e^{-i\hat{F}} \hat{H} e^{i\hat{F}} | \phi_0 \rangle$$

を満たす。この $C_{\mu i}$ は、RPA 型の変数変換

$$D_{\lambda}^* = \sum_{\mu i} (\psi_{\lambda}(\mu i) C_{\mu i}^* - \varphi_{\lambda}(\mu i) C_{\mu i}) \quad (14)$$

によって、新変数 D_{λ} へ移ることができる。そのとき、ハミルトニアンは、

$$H = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda}^{(\text{RPA})} D_{\lambda}^* D_{\lambda} + (D_{\lambda}^*, D_{\lambda} \text{ の高次項}) \quad (15)$$

となり、二次の部分が対角的になる。この D_{λ} も正準変数である。この D_{λ} から一般の変数 η_{λ} への変換を、

$$D_{\lambda} = \exp(i\Gamma) \eta_{\lambda}, \quad D_{\lambda}^* = \exp(i\Gamma) \eta_{\lambda}^* \quad (16)$$

で考える。ここで、 $\exp(A)B$,

$$\exp(A)B = B + \left\{ A, B \right\}_{\text{P.B.}} + \frac{1}{2} \left\{ A, \left\{ A, B \right\}_{\text{P.B.}} \right\}_{\text{P.B.}} + \dots \quad (17)$$

であり、ポアソン括弧 $\{A, B\}_{\text{P.B.}}$ は、

$$\{A, B\}_{\text{P.B.}} = \sum_{\lambda} \left(\frac{\partial A}{\partial \eta_{\lambda}} \frac{\partial B}{\partial \eta_{\lambda}^*} - \frac{\partial B}{\partial \eta_{\lambda}} \frac{\partial A}{\partial \eta_{\lambda}^*} \right) \quad (18)$$

である。これによって導入された $\eta_{\lambda}, \eta_{\lambda}^*$ も正準変数である。

(16)式によって、ハミルトニアン(15)は、

$$\begin{aligned} H &= \exp(i\Gamma) H(\eta_{\lambda}^*, \eta_{\lambda}) \\ &= H(\eta_{\lambda}^*, \eta) + \left\{ i\Gamma, H \right\}_{\text{P.B.}} + \frac{1}{2} \left\{ i\Gamma, \left\{ i\Gamma, H \right\}_{\text{P.B.}} \right\}_{\text{P.B.}} + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

と書ける。 Γ の関数形を選ぶことにより、新しいハミルトニアンの関数形を調節することができる。そこで、我々は、集団運動ハミルトニアン H_{coll} を分離し、さらに、条件

$$\{H_{\text{coll}}, (H - H_{\text{coll}})\}_{\text{P.B.}} = 0 \quad (20)$$

を満たすような表現を求める。まず、ハミルトニアン(19)を次のように変形する。

$$H = H_{\text{coll}} + H_{\text{diag}} + H_{\text{off}}, \quad (21)$$

$$H_{\text{coll}} = \sum_{n \geq 1} h_d(n) (\eta^* \eta)^n, \quad (22)$$

$$H_{\text{diag}} = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^{(0)} \xi_{\alpha}^* \xi_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_n \sum_{\alpha\beta} \left\{ 2h_{\alpha}^{\beta}(n) \xi_{\alpha}^* \xi_{\beta} + h^{\alpha\beta}(n) \xi_{\alpha} \xi_{\beta} + h_{\alpha\beta}(n) \xi_{\alpha}^* \xi_{\beta}^* \right\} (\eta^* \eta)^n, \quad (23)$$

$$H_{\text{off}} = \frac{1}{2} \sum_{rs} \sum_{\alpha\beta} \left\{ 2h_{\alpha}^{\beta}(rs) \xi_{\alpha}^* \xi_{\beta} + h^{\alpha\beta}(rs) \xi_{\alpha} \xi_{\beta} + h_{\alpha\beta}(rs) \xi_{\alpha}^* \xi_{\beta}^* \right\} \eta^{*r} \eta^s \quad (24)$$

ここで、 η^* , η は集団変数、 ξ_{α}^* , ξ_{α} ($\equiv \eta_{\alpha}^*$, η_{α}) を残りの変数として区別し、 ξ_{α}^* , ξ_{α} については二次形式までとった。係数 $h_{\alpha}^{\beta}(n)$, $h_{\alpha}^{\beta}(rs)$ 等は低次のものから摂動的に決まってくる。 $\omega_{\alpha}^{(0)}$ と $h_d(1) (\equiv \omega_0^{(0)})$ は RPA エネルギーである。 H_{coll} と H_{diag} は集団変数 η^* , η について対角的である。この段階で、 ξ_{α}^* , ξ_{α} を一次で含むような項は消去されていて (集団運動の分離), H_{coll} が SCC の集団運動ハミルトニアンである。

(22), (23)式が、 $\eta^* \eta$ という組み合わせを含むことに注意して、ハミルトニアンは、

$$H_{\text{sc}} = H_0 + V, \quad (25)$$

$$H_0 = \sum_{n \geq 1} h_d(n) \sigma^n + \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} \zeta_{\alpha}^* \zeta_{\alpha}, \quad (26)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{rs} \sum_{\alpha\beta} \left\{ 2\tilde{h}_{\alpha}^{\beta}(rs; \sigma) \zeta_{\alpha}^* \zeta_{\beta} + \tilde{h}^{\alpha\beta}(rs; \sigma) \zeta_{\alpha} \zeta_{\beta} + \tilde{h}_{\alpha\beta}(rs; \sigma) \zeta_{\alpha}^* \zeta_{\beta}^* \right\} \eta^{*r} \eta^s, \quad (r \neq s), \quad (27)$$

と書き換えることができる。ここで、 ζ_{α}^* , ζ_{α} は ξ_{α}^* , ξ_{α} から一次結合で作った新しい正準変数であり、 $\sigma \equiv \eta^* \eta$ である。

集団運動と内部自由度との結合項 V をうまく繰り込めれば、ハミルトニアンは、

$$H_{\text{sc}} = H_{\text{coll}} + \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha}(\sigma) \zeta_{\alpha}^* \zeta_{\alpha} \quad (28)$$

と等価な形となる。これは、集団運動がうまく分離され、さらに内部自由度も規則的な運

動をしている場合に相当する。しかし、 V を繰り込む過程で、必ず共鳴条件

$$m_0 \Omega_0 - \Omega_{\alpha_0} \pm \Omega_{\beta_0} \approx 0 \quad (29)$$

$$\Omega_0 = \frac{\partial H_{\text{coll}}}{\partial \sigma}$$

が現れる。ここで、 m_0 はある整数である。このような共鳴条件が成り立つような相空間の領域では、集団運動は内部自由度(α_0, β_0 等)と強く結びついて分離できない。そのためにエネルギーの交換が容易になり、例えば集団運動の持っていたエネルギーの一部が内部自由度の励起に転換され、集団運動が減衰することになる。この共鳴条件が密に存在する領域では、我々は、「軌道」をひとつひとつ追いかけることが不可能になってくる⁴⁾。そこでは、「散逸的集団運動」と呼ばれる状況が現れる。そのような集団運動を扱う理論形式が現在急速に発展している⁵⁾。SCC 法による座標系の表現⁽²⁸⁾は、その出発点ともなっている。

参 考 文 献

- 1) T. Marumori, T. Maskawa, F. Sakata and A. Kuriyama, Prog. Theor. Phys. **64**(1980), 1294.
- 2) T. Marumori and F. Sakata, *Particles and Nuclei* (World Scientific, Singapore, 1986).
- 3) F. Sakata, T. Marumori, K. Muramatsu and Y. Hashimoto, Prog. Theor. Phys. **74** (1985), 51 ;
F. Sakata, T. Marumori, Y. Hashimoto, K. Muramatsu and M. Ogura, Prog. Theor. Phys. **76** (1986), 387.
- 4) I. Prigogine, *From Being to Becoming* (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980).
- 5) F. Sakata, M. Matsuo, T. Marumori and Y. Zhuo, Ann. Phys. **194** (1989), 30.