

Type B1 バースト誤り訂正

たたみ込み符号の一構成法

大阪大学	工	藤原	値賀人
大阪大学	工	手塚	慶一
電々公社		山崎	文昭
近畿大学	工	笠原	芳郎

§1. 序

B1型バースト誤り訂正たたみ込み符号で、組織的構成が可能なものは岩垂^{(1),(2)} および Massey⁽²⁾等によって与えられている。

またこれまでに回路が示されているたたみ込み符号はすべて符号化回路にフィードバック結線を必要としないもののみであり、Wyner および Ash⁽³⁾の示したB2型バースト誤り訂正符号および Hsu⁽⁴⁾の符号等の、符号化回路にフィードバック結線を必要とするものについては筆者らの知る限り回路実現例は示されていない。

ここでは、符号化回路にフィードバック結線を必要とする

場合のシンドローム計算回路の実現を示している。その結果符号化回路にフィードバック結線が存在しても、シンドローム計算回路にはフィードバック結線は不要であり、したがって、誤りの無限の伝搬が生じないことが明らかになった。またこれは、Massey⁽⁵⁾の示した一般的な符号化およびシンドローム計算法の拡張になる。

つぎに、符号化回路にフィードバック結線を必要とするB1型バースト誤り訂正込み込み符号の一構成法を示している。この方法は岩垂の符号⁽¹⁾と同様の構成の自由度および実現回路の簡率を有する。またガード・スペースは岩垂の符号よりすぐれているが、実現に必要なシフトレジスタの数は概して多くなる。

§2. 一般的回路構成法

いまつぎの形をした行列 B_0 を考える。

$$B_0 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & b-m & b-m+1 & b-m+2 & \dots & b-1 & b \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ b \\ b+1 \\ \vdots \\ N \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccc} g_{0,b-m+1}^{(1)} & g_{0,b-m+1}^{(2)} & \dots & g_{0,b-m+1}^{(b-m)} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_{0,b-m+2}^{(1)} & g_{0,b-m+2}^{(2)} & \dots & g_{0,b-m+2}^{(b-m)} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{0,b}^{(1)} & g_{0,b}^{(2)} & \dots & g_{0,b}^{(b-m)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ g_{1,b-m+1}^{(1)} & g_{1,b-m+1}^{(2)} & \dots & g_{1,b-m+1}^{(b-m)} & g_{1,b-m+1}^{(b-m+1)} & g_{1,b-m+1}^{(b-m+2)} & \dots & g_{1,b-m+1}^{(b-1)} & g_{1,b-m+1}^{(b)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{N-1,b}^{(1)} & g_{N-1,b}^{(2)} & \dots & g_{N-1,b}^{(b-m)} & g_{N-1,b}^{(b-m+1)} & g_{N-1,b}^{(b-m+2)} & \dots & g_{N-1,b}^{(b-1)} & g_{N-1,b}^{(b)} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (1)$$

つぎに Huffman の遅延オペレータ D を用いて, $X^{(j)}(D)$;
 $1 \leq j \leq b-m$ を入力系列, $T^{(j)}(D)$; $1 \leq j \leq b$ を出力系列とす
 ると

$$\left. \begin{aligned} T^{(j)}(D) &= X^{(j)}(D) \quad ; \quad 1 \leq j \leq b-m \\ T^{(j)}(D) &= - \left\{ \sum_{i=1}^{b-m} X^{(i)}(D) G_{ij}^{(i)}(D) + \sum_{i=b-m+1}^b T^{(i)}(D) G_{ij}^{(i)}(D) \right\} \quad ; \quad b-m+1 \leq j \leq b \\ \text{ただし} \\ G_{ij}^{(i)}(D) &= g_{0,j}^{(i)} + g_{1,j}^{(i)} D + \dots + g_{\frac{N}{m}-1,j}^{(i)} D^{\frac{N}{m}-1} \quad ; \quad 1 \leq i \leq b-m \\ G_{ij}^{(i)}(D) &= g_{1,j}^{(i)} D + g_{2,j}^{(i)} D^2 + \dots + g_{\frac{N}{m}-1,j}^{(i)} D^{\frac{N}{m}-1} \quad ; \quad b-m+1 \leq i \leq b \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

と表わせる。

したがって符号化回路は図 1 に示す回路で与えられる。

つぎに送信系列 $T^{(j)}(D)$ に誤り系列 $E^{(j)}(D)$

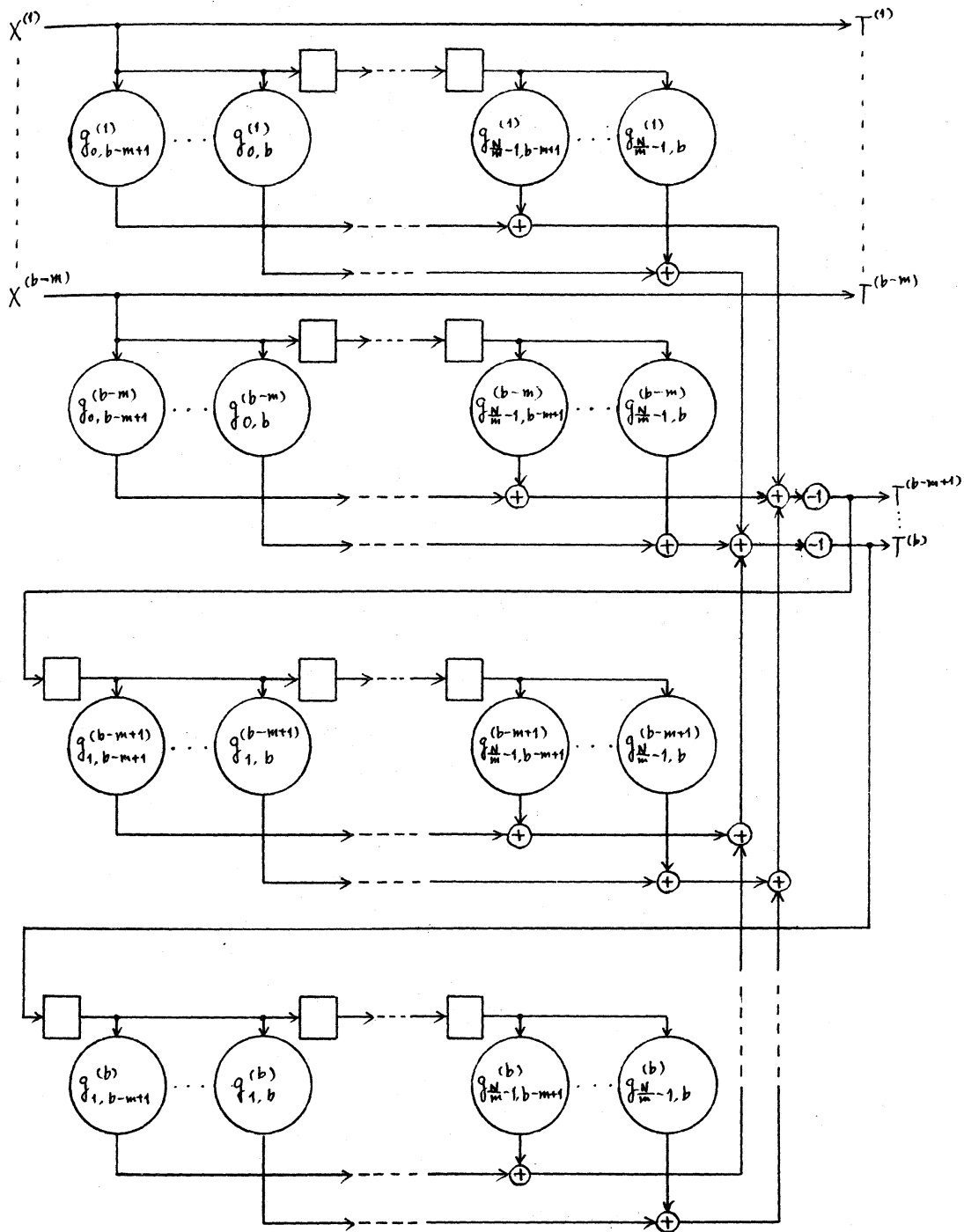
$$E^{(j)}(D) = e_0^{(j)} + e_1^{(j)} D + e_2^{(j)} D^2 + \dots \quad (3)$$

が付加され

$$\begin{aligned} R^{(j)}(D) &= T^{(j)}(D) + E^{(j)}(D) \\ &= (t_0^{(j)} + e_0^{(j)}) + (t_1^{(j)} + e_1^{(j)}) D + \dots \quad ; \quad 1 \leq j \leq b \end{aligned} \quad (4)$$

が受信されたとすると, 受信側ではシンドローム

$$S^{(k)}(D) = s_0^{(k)} + s_1^{(k)} D + s_2^{(k)} D^2 + \dots$$



$\oplus$: mod. q 加算器, $\ominus$: 符号反転

图1. Rn_A 段型符号化回路

$$= \sum_{i=1}^{b-m} R^{(i)}(D) G_{b-m+k}^{(i)}(D) + \sum_{i=b-m+1}^b R^{(i)}(D) G_{b-m+k}^{(i)}(D) + R^{(b-m+k)}(D) ; 1 \leq k \leq m \quad (5)$$

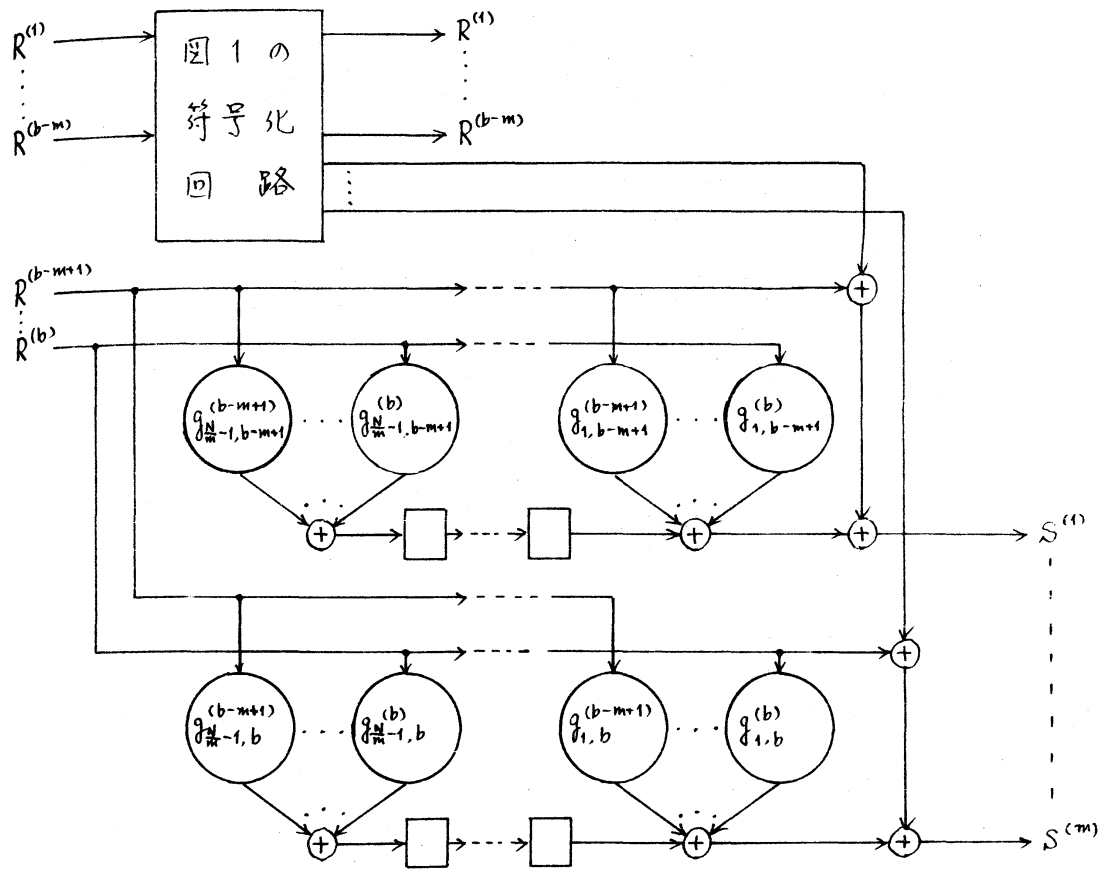
を計算する。ここに式(2)および(4)を式(5)に代入すると

$$S^{(k)}(D) = \sum_{i=1}^{b-m} E^{(i)}(D) G_{b-m+k}^{(i)}(D) + \sum_{i=b-m+1}^b E^{(i)}(D) G_{b-m+k}^{(i)}(D) + E^{(b-m+k)}(D) ; 1 \leq k \leq m \quad (6)$$

となり、これよりシンδροームは誤りのパターンの検出に必要な有限時間の間 ($G^{(i)}(D)$ の次数に相当) の誤りへのみ依存し、誤りの影響が無限に伝搬することはない。またこのシンδροーム計算回路を図2に示す。

符号化回路にフィードバック結線が必要としない場合には、受信した情報系列より作成した検査系列より、受信した検査系列を減じてシンδροームを得ることができる。しかし符号化回路にフィードバック結線が必要とする場合には、この方法では正しいシンδροームが得られないことが式(2)および(5)よりわかる。

つぎに符号化回路の故障による誤りが生じた場合の検査系列と、誤りがない場合の検査系列との間の差は無限に続き得るか、受信側のシンδροームは最初の誤った検査ディジットを受信したときのみ“0”でなく、それ以後はすべて“0”



⊕: mod. q 加算器

図2. シンドローム計算回路

となり、誤りのシンドロームに対する影響は伝搬しない。何故ならば、符号化回路は最初に誤った検査ディジットをもとにして、それ以後のシンドロームが“0”になるように以後の検査ディジットを決定するためである。したがって符号化

回路の故障による誤りの，シンδροームに対する影響は，フィードバック結線を必要としない場合と同じであり，特に問題とはならない。

§3. B1型バースト誤り訂正符号の構成

ここで提案するB1型バースト誤り訂正符号は冗長度 $(1/b)$ であり，訂正可能なバースト誤りの長さ 1 が $(b+1)$ に等しい場合には，行列 B_0 はつぎの式で与えられる。

$$B_0 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & b-1 & b \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b-1 \\ b \\ b+1 \\ b+2 \\ b+3 \\ b+4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 3b-2 \\ 3b-1 \\ 3b \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad ; N=3b \quad (7)$$

行列 B_0 の第1列から第 $(b-1)$ 列までは情報ディジット

に対応し、第 b 列は検査ディジットに対応している。すなわち行列 B_0 は $m = 1$ の組織的なたみ込み符号を定義している。またこの行列 B_0 はつぎのような性質を有する。

- (1) 第 j 列 ($1 \leq j \leq b$) は第 $(b+1-j)$ 行と第 $(3b+2-2j)$ 行にのみ “1” を有する。
- (2) 各列に含まれる “1” は、第 j 列では互に $(2b+1-j)$ 行離れている。
- (3) 各行はたかだか1個の “1” を有し、したがって各情報ディジットおよび検査ディジットに生じな誤り $e_0^{(1)}, e_0^{(2)}, \dots, e_0^{(b)}$ がシンδροームにつくるパターンが互に重なり合って打ち消されることはない。
- (4) $m = 1$ として、式 (7) に示す B_0 を用いて短縮されたパリテ検査行列 A_N を構成した場合、最初の $2b$ 列においていかなる連続した $(b+1)$ 列の行列をとっても、各行にはたかだか1個の “1” を有するのみである。

行列 B_0 の以上の性質により、長さ $(b+1)$ までの B_1 型バースト誤りが生起しても、それらの誤りがシンδροーム系列につくるパターンが打ち消されることなく、しかもそれらの誤りのパターンは、誤りが第何番目の送信系列に生じなによってすべて異なる長さをもつことがわかる。したが

って式(7)の行列 B_0 によって定義される伝み込み符号は、長さ $(b+1)$ までの B_1 型バースト誤りを訂正できる。

§4. 符号化回路

ここで簡単のため $b=4$ の場合を考えると式(7)の行列 B_0 は式(8)で与えられるものとなり、この場合の短縮パリティ検査行列 A_N を図3に示す。

行列 A_N の最終行はすべての送信系列

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$T^T = [t_0^{(1)} t_0^{(2)} t_0^{(3)} t_0^{(4)} t_1^{(1)} t_1^{(2)} \dots] \quad (9)$$

が満足しなければならないパリティ検査式を表わし、また $t_i^{(1)} \sim$

$t_i^{(3)}$ は情報ディジットを、 $t_i^{(4)}$ は検

査ディジットを表わす。一般に第 i ブロックの検査ディジット $t_i^{(4)}$ は

$$t_i^{(4)} = -\{t_{i-1}^{(3)} + t_{i-2}^{(2)} + t_{i-3}^{(1)} + t_{i-5}^{(4)} + t_{i-7}^{(3)} + t_{i-9}^{(2)} + t_{i-11}^{(1)}\} \pmod{g(10)}$$

と表わされる。

つぎに Huffman の遅延オペレータ D を用いて表わすと、式

$$A_N = \begin{bmatrix} 0001 \\ 00100001 \\ 010000100001 \\ 1000010000100001 \\ 00001000010000100001 \\ 000100001000010000100001 \\ 0000000100001000010000100001 \\ 00100000000100001000010000100001 \\ 000000100000000100001000010000100001 \\ 010000000100000000100001000010000100001 \\ 0000010000000100000000100001000010000100001 \\ 00000010000000100000000100001000010000100001 \\ 1000000010000000010000000100001000010000100001 \end{bmatrix}$$

図3. 短縮パリティ, 検査行列

(1) および (2) より

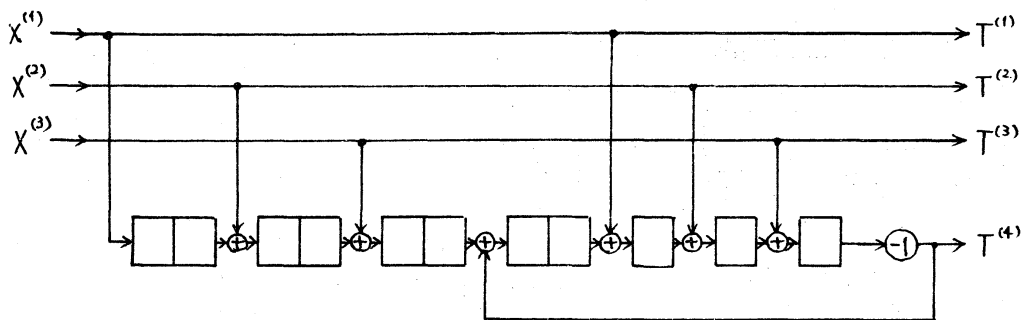
$$T^{(j)}(D) = X^{(j)}(D) \quad ; 1 \leq j \leq 3$$

$$T^{(4)}(D) = \left\{ \sum_{i=1}^3 X^{(i)}(D) G^{(i)}(D) + T^{(4)}(D) G^{(4)}(D) \right\}$$

ただし

$$G^{(1)}(D) = D^3 + D^{11}, \quad G^{(2)}(D) = D^2 + D^9, \quad G^{(3)}(D) = D + D^7, \quad G^{(4)}(D) = D^5$$

と表わされ, したがって符号化回路は図4で与えられる。



⊕: mod. 2 加算器, ⊖: 符号反転

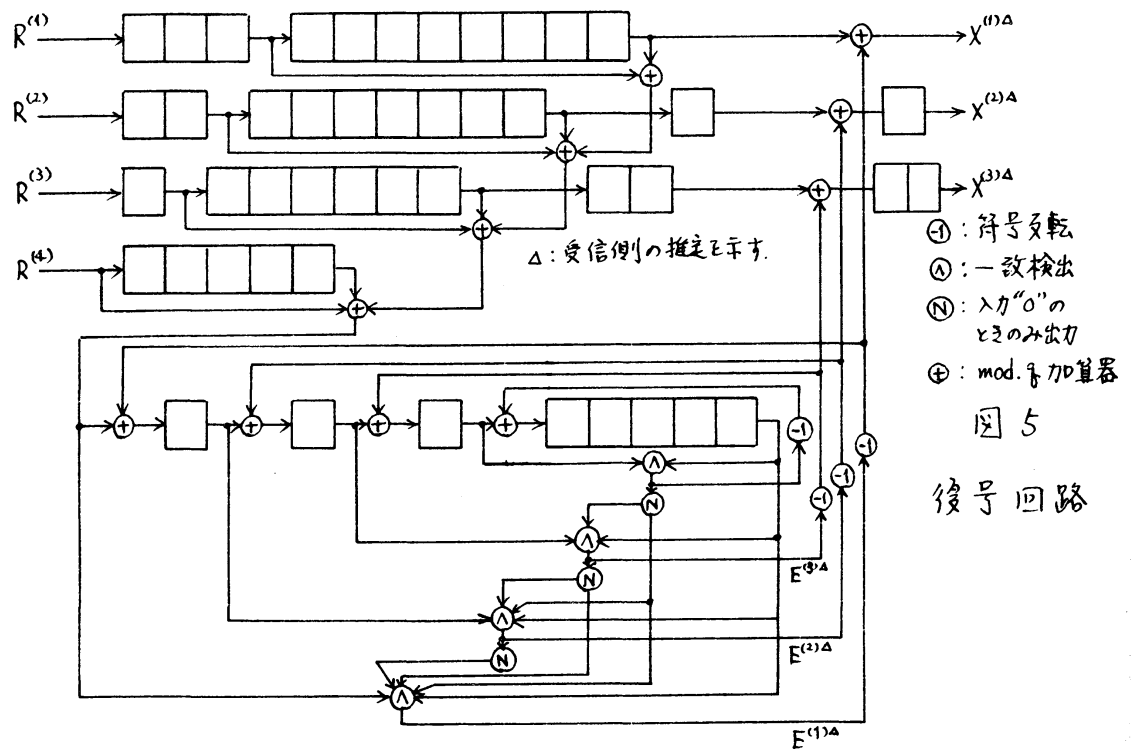
図4. 符号化回路

§5. 復号回路

式(5)および(6)より本符号のシンドローム $S(D)$ は

$$\begin{aligned}
 S(D) &= \sum_{i=1}^4 R^{(i)}(D) G^{(i)}(D) + R^{(4)}(D) \\
 &= \sum_{i=1}^4 E^{(i)}(D) G^{(i)}(D) + E^{(4)}(D) \\
 &= D^3(1+D^8)E^{(1)}(D) + D^2(1+D^7)E^{(2)}(D) + D(1+D^6)E^{(3)}(D) \\
 &\quad + (1+D^5)E^{(4)}(D) \quad (12)
 \end{aligned}$$

となる。また式(12)より、各誤り系列 $E^{(i)}(D)$ はすべて異なった長さのパターンをシンドローム系列につくることがわかる。したがって本符号の復号回路は図5のよう示される。



§ 6. Interlace

行列 B_0 の非零元を有する行の下に $(r-1)$ 行の $[0]$ 行を挿入して $(2l+b)$ 行 (ただし $l=rb$) b 列の行列 B'_0 を構成すると、この行列により構成される符号は長さ $(l+1)$ までのバースト誤りを訂正できる。

6. 1 ガード・スペース

行列 B'_0 の行数は $(2l+b)$ であり、最終の $(r-1)$ 行は $[0]$ であるので、最悪の場合、すなわちブロックの第1ディジットで誤りが終った場合を考えると、つぎに生じる誤りは先に生じた誤りによるシンδροームを打ち消してはならないので、その後には $(2l+b-r)$ ブロックの誤りのない区間が必要であり、またそれに最初のブロックの誤りのない区間 $(b-1)$ ディジットを加えるとガード・スペース g が得られる。

$$\begin{aligned} g &= (2l+b-r)b + b - 1 \\ &= (2b-1)l + b^2 + b - 1 \end{aligned} \quad (13)$$

また上式より

$$\frac{g}{l} = 2b - 1 + \frac{1}{r} \left(b + 1 - \frac{1}{b} \right) \quad (14)$$

となり、冗長度が $1/b$ 、すなわち能率 R が $R = (b-1)/b$ の場合の Gallager⁽⁶⁾ のガード・スペースの下限

$$\frac{g}{l} \geq \frac{1+R}{1-R} = 2b-1 \quad (15)$$

を r を大, すなわち l を大とすれば漸近的に満足する。

6.2 必要なシフトレジスタ数

符号化回路を構成するのに必要なシフトレジスタ数 E は

$$E = 2l + b - r \quad (16)$$

を与えられ, 復号回路に必要なシフトレジスタ数 D は, 情報系列の遅延に $(b-1)E$, 検査系列の遅延に $(l+1)$ およびシンドロームレジスタに $(l+b)$ 必要であるので

$$D = 2lb + b^2 - l + r + 1 \quad (17)$$

となり, 必要な全レジスタ数は

$$E + D = (2b+1)l + b^2 + b + 1 \quad (18)$$

となる。

6.3 誤りの伝搬

誤った訂正を受けたために生じた非零元が, シンドロームレジスタから押し出されるためには, 最大 $(l+b+1)$ 個のシン

ドロームが0であることが必要であるので、誤りの伝搬を阻止するために必要なガード・スペース g_{add} は

$$\begin{aligned} g_{add} &= l + b + 1 \quad (\text{ブロック}) \\ &= b(l + b + 1) \quad (\text{ディジット}) \end{aligned} \quad (19)$$

となる。

6.4 従来の符号との比較

以下に示す添字 B は, Berlekamp⁽⁷⁾ の B_2 型バースト誤り訂正符号を B_1 型バースト誤り訂正符号として用いた場合を, 添字 I は岩垂の符号⁽⁴⁾ の場合を示す。

$$\left. \begin{aligned} g_B - g &= (b-1)^2, \quad g_I - g = b(b-3) \\ E_B + D_B - (E + D) &= b^2 - \frac{2l}{b} - 3, \quad E_I + D_I - (E + D) = b^2 - l - 2b - 4 \\ g_{addB} - g_{add} &= (b-1)l + b^2 - 2b, \quad g_{addI} - g_{add} = b(b-3) \end{aligned} \right\} (20)$$

またこれらの符号のガード・スペース, 必要なシフトレジスタ数および誤りの伝搬を阻止するために必要な余分のガード・スペースの計算例を表1に示す。

§7. 結言

行列 B_0 の検査ディジットに対応する列に複数個の非零元を

有する場合は、符号化回路にはフィードバック結線が必要とするが、シンドローム計算回路にはフィードバック結線は不要であり、したがって誤りの伝搬の点で符号化回路にフィードバック結線が必要としない符号に比べて特に不利になることはないことを示した。また同時に、符号化回路にフィードバック結線を有するB1型長み込み符号を示している。本符号は従来知られている、任意の訂正能力を有する（ b を任意に選べる）組織的構成が可能な符号の中で、最も短いガード・スペースを与えるものである（ただし $b \geq 4$ ）。

表1. 従来の符号との比較

ブロック 長 b	バースト 長 l	ガード・スペース			所要シフトレジスタ数			余分に必要ガード・スペース		
		g	g_I	g_B	$E+D$	E_I+D_I	E_B+D_B	g_{add}	g_{addI}	g_{addB}
3	3	26	26	30	34	30	38	21	21	30
	30	161	161	165	223	192	209	102	102	165
	300	1511	1511	1515	2113	1812	1919	912	912	1515
5	5	74	84	90	86	92	105	55	65	90
	50	479	489	495	581	542	583	280	290	495
	500	4529	4539	4545	5531	5042	5353	2530	2540	2545
10	10	299	369	380	321	387	416	210	280	380
	100	2009	2079	2090	2211	2187	2288	1110	1180	2090
	1000	19109	19179	19190	21111	20187	21008	10110	10180	19190
20	20	1189	1529	1550	1241	1577	1636	820	1160	1560
	200	8209	8549	8570	8621	8777	8998	4420	4760	8580
	2000	78409	78749	78770	82421	80777	82818	40420	40760	78780

謝辞 終りに、有益なご助言を頂いた大阪大学工学部の並原正雄講師に深謝する。また熱心なご討論を頂いた中西暉助手をはじめとする、大阪大学工学部通信工学教室第2講座の方々に深謝する。

文 献

- (1) Y. Iwadare: "On type-B1 burst-error-correcting convolutional codes", IEEE Trans., IT-14, p.577 (July 1968).
- (2) R. G. Gallager: "Information theory and reliable communication", Wiley (1968).
- (3) A. D. Wyner and R. B. Ash: "Analysis of recurrent codes", IEEE Trans., IT-9, p.143 (July 1964).
- (4) H. T. Hsu: "A new class of recurrent codes", IEEE Trans., IT-15, p.592 (Sept. 1969).
- (5) J. L. Massey: "Threshold decoding", MIT Press (1963).
- (6) R. G. Gallager: "Binary codes for burst error correction", IEEE Trans., IT-12, p.273 (April 1966).
- (7) E. R. Berlekamp: "Notes on recurrent codes", IEEE Trans., IT-10, p.257 (July 1964).