

可解リー群の character と orbit method

山上 滋 (琉球大 理学部)

この小論で問題とするのは、単連結可解リー群の normal 表現の幾何学的構成法 (いわゆる orbit method) についてである。単連結可解リー群のユニタリー表現論は Kirillov の理論を発展させることにより、I 型の場合には [A-K] で既約表現の構成が I 型の判定条件とともに得られ、さらに Pukanszky は I 型とは限らない一般の場合に、指標が定義できる表現 (normal 表現と呼ばれる) を orbit method 風に記述することに成功した ([P 1]、[P 2])。彼の理論の要点は

- 1) $\text{Prim}(G)$
- 2) $C^*(G)$ の character
- 3) generalized orbit

がすべて同一視できるところにある。1) と 2) の対応は $C^*(G)$ の character から G のユニタリー表現を GNS 構成法で作リ、その表現の核をとればよい。2) と 3) との対応は generalized orbit に対して G の normal 表現 (の同値類) を構成することによつて与えられる。

ここで generalized orbit から作られる normal 表現を注意して見てやると character から定まる GNS 表現とは一般に一致しないことがわかる。あるいは normal 表現の quasi-equivalence class の中で generalized orbit から作られる表現の位置が明確でなく、generalized orbit の幾何学的必然性もはつきりしない。そこで次ぎの問題を考察したい。

(i) $C^*(G)$ の character の GNS 表現と直接結び付けられるような幾何学的対象は何か。

さらに、

(ii) generalized orbit を含む広い幾何学的対象を設定し、nor-

mal 表現の幾何学的構成法を一般化し、そのような表現相互の同値性を判別する不変量（これは表現の multiplicity に相当するものである）を幾何学的不変量と結び付けて generalized orbit の幾何学的意味が明らかにされれば申し分ない。

この最後の問題は monomial 表現の multiplicity の幾何学的表示、解析的表示とも関連する問題である。これについては、この講究録のなかの藤原氏の解説を参照されたい。以下では最初の問題について解説を試みる。

上で述べたようにここでの問題は character の GNS 表現の幾何学的構成法である。この表現は、Hilbert algebra が内在しているのが1つの特徴である。Hilbert algebra を幾何学的に作る一般的方法是亜群を経由するものである。Pukanszky に従って、 G の quasi coadjoint orbit (= coadjoint orbit の local closure = Pukanszky の R-orbit) $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ を出発点とする。 $\mathcal{O}$ は G 不変な locally closed manifold で (ii) 任意の G -orbit は $\mathcal{O}$ で dense になっている。(ii) $\mathcal{O}$ は G -orbit を leaf とする葉層構造をもつ。そこでこの G -orbit 葉層から作られる亜群が1つの候補として考えられる。例えばよく使われるホロノミー亜群は今の場合、 G -orbit の定める同値関係（のグラフ） $\{(x, y) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} ; G \cdot x = G \cdot y\}$ に一致する。一方、表現を作るためには G が equivariant に作用する line bundle が必要であるが、一般に G の $x \in \mathcal{O}$ での stabilizer $G(x)$ の infinitesimal character $\text{ix}|_{\mathfrak{g}(x)}$ は $G(x)$ の連結成分までしか積分できないので、ホロノミー亜群のかわりに leaf に沿った道のホモトピー類から作られる亜群 (fundamental groupoid) Γ_0 を考えてみる。 Γ_0 の1つの構成法は $G \times \mathcal{O}$ を同値関係 $(g, x) \sim (g', x') \Leftrightarrow x = x', g^{-1}g' \in G(x)$ でわったものに亜群の構造を

$$t[g, x]_0 = gx, \quad s[g, x]_0 = x$$

$$[g, x] \cdot [g', x'] = [gg', x'].$$

$$[g, x]^{-1} = [g^{-1}, gx].$$

で入れる。 Γ_0 の上には line bundle B_0 を

$$B_0 = G \times \mathcal{O} \times C / \sim, \quad (g, x, z) \sim (g', x', z') \Leftrightarrow x = x', \quad g^{-1}g' \in G(x), \quad z' = z e^{-i \times (g^{-1}g')}$$

で定義できる。さらに B_0 には Γ_0 上の groupoid ring の構造を

$$[g, x, z] \cdot [g', x', z'] = [gg', x', z z'].$$

$$[g, x, z]^{-1} = [g^{-1}, gx, z].$$

$$([g, x, z] \cdot [g, x, z']) = z z'$$

で定義することができる。従って、必要とする測度はすべてルベーク測度（と同値な測度）にとって、 (Γ_0, B_0) から Hilbert algebra を作ることができる（[Y] 参照）。さらに Γ_0 の stabilizer は [Y] の意味で uniformly abelian であることがわかる。まず $G(\mathcal{O}) = \bigsqcup_{x \in \mathcal{O}} G(x) \subset G \times \mathcal{O}$ とおくと $G(\mathcal{O})$ は $G \times \mathcal{O}$ の closed submanifold になることがわかる。 $G(\mathcal{O})$ の連結成分全体の集合を S で表す。 $x \in \mathcal{O}$ に対して $G(x)$ を $G(x) \times \{x\} \subset G(\mathcal{O})$ と同一視することにより、 $G(x) / G(x)_0$ から S への写像が得られるが、これが全単射であることがわかる。さらにこの対応で $G(x) / G(x)_0$ の群構造を S に入れたものは $x \in \mathcal{O}$ の取り方によらないこともわかる。従って

$x \in \mathcal{O}$ ごとに群の同型 $i_x: S \rightarrow G(x)/G(x)_0$ が得られるが、 $G(x)/G(x)_0$ は $(\Gamma_0)_x^\times = \{[g, x]_0; g \in G(x)\}$ と自然に同一視されるので結局 $i_x: S \rightarrow (\Gamma_0)_x^\times$ とみなしてよい。この同型の族 $\{i_x\}_{x \in \mathcal{O}}$ が Γ_0 の stabilizer の uniformity を与える。そこで [Y] の結果が使えて S の subgroup Σ があって (Γ_0, B_0) から作られた Hilbert algebra は $\Sigma^\wedge$ をパラメータにして直和分解される。今、我々がほしいのは因子表現であるから、 Γ_0 では covering の取り方が大きすぎる。正しい covering を得るために $G(x)$ の subgroup $\underline{G}(x)$ を

$$i_x(\Sigma) = \underline{G}(x)/G(x)_0.$$

で定義して

$$\Gamma = G \times \mathcal{O} / \sim, \quad (g, x) \sim (g', x') \Leftrightarrow x = x', \quad g^{-1}g' \in \underline{G}(x)$$

とおく。 Γ は Γ_0 のときと同様に亜群になる。 $\underline{G}(x)$ は一般に連結とは限らないので、line bundle を作るためには $\underline{G}(x)$ の character 指定しなくてはならない。そのために、

$$G^*(\mathcal{O}) = \{(x, \chi); x \in \mathcal{O}, \chi \text{ は } G(x) \text{ の unitary character で } d\chi = i x \mid_{\eta(\alpha)} \text{ となるもの}\}$$

とおく。 $\underline{G}(x)$ は reduced stabilizer $\overline{G}(x)$ に含まれることが示せるので、この集合は空ではない。 $G^*(\mathcal{O})$ には G を $g(x, \chi) = (gx, \chi \text{ Ad } g^{-1})$ で作用させることができる。さらに $G^*(\mathcal{O})$ に位相を $(\chi_i, x_i) \rightarrow (\chi, x)$ とは「 $x_i \rightarrow x$ かつ $(x_i, g_i) \rightarrow (x, g)$ in $G(\mathcal{O})$ となる列 $\{g_i\}$ に対して $\chi_i(g_i) \rightarrow \chi(g)$ が成り立つ」ことと定義して

やれば $\forall \omega \in G^*(x) = \{(x, x) \in G^*(\mathcal{O})\}$

- 1) $\mathcal{O}$ から $G^*(\mathcal{O})$ への連続な G -equivariant 切断で ω を通るものが1つだけ存在する。
- 2) それを s_ω で表すとき $G^*(x) \times \mathcal{O} \ni (\omega, y) \mapsto s_\omega(y) \in G^*(\mathcal{O})$ は同相 (言い替えれば $G^*(\mathcal{O})$ は $\Sigma \times \mathcal{O}$ と同相) になる、

ことがわかる。以上のことから、 $G^*(\mathcal{O})$ における G -orbit の閉包 Ω は $\mathcal{O}$ の上に同相に project される。以下 Ω を固定する (場合によっては Ω と $\mathcal{O}$ とを同一視する)。さて Ω に対して Γ 上の line bundle B を

$$B = G \times \mathcal{O} \times \mathbb{C} / \sim, \quad (g, x; z) \sim (g', x'; z') \\ \Leftrightarrow x = x', \quad g^{-1}g' \in \underline{G}(x), \quad z' = z \cdot x(g^{-1}g')^{-1}$$

で定義し B のときと同じように groupoid ring の構造を入れておく。このとき

(Γ, B) から作られる Hilbert algebra は factor を生成する

ことがわかる。factor を生成する Hilbert algebra は得られたが、このままでは G の表現としては大きすぎて character が定義できない。

Γ を削るためにまず $G \times G$ の Γ への作用を $(g_1, g_2) [g, x] = [g_1 g g_2^{-1}, g_2 x]$ で定める。 $\Gamma \ni [g, x] \rightarrow (gx, x) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ を考えると、 Γ の $G \times G$ -orbit は $G \times G$ の coadjoint orbit の covering になっていることがわかるので、

Γ は symplectic foliation の構造をもつ ([P] 参照)

ことがわかる。そこで Γ の適当な polarization を用意して、 (Γ, B) を '量子化' することにより表現のサイズを小さくしよう。

$f = \{f_x\}_{x \in \mathcal{O}}$ を $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$ の subalgebra の family で

- (i) f_x は $x \in \mathcal{O}$ での positive polarization で Pukanszky condition をみたす、
- (ii) $f_{gx} = \text{Ad } g(f_x)$, $g \in G$, $x \in \mathcal{O}$,
- (iii) $E = \{f_x \cdot x\}_{x \in \mathcal{O}}$ は $T^{\mathbb{C}}\mathcal{O}$ の C^∞ -subbundle,

となるものを考える。今 $E \boxtimes \overline{E}$ を $(t, s) : \Gamma \rightarrow \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ でひきもどすことにより Γ の polarization P を定めることができる。さらに $\mathcal{O}/G$ の横断測度 Λ を用意すれば、 (Γ, B) を P により量子化して Hilbert space $\mathcal{H}(\mathcal{O}, f, \Lambda)$ が得られる。そこで (Γ, B) に対応する Hilbert algebra の構造をうつしてやることにより、 $\mathcal{H}(\mathcal{O}, f, \Lambda)$ の dense subspace として Hilbert algebra $\mathcal{G}(\mathcal{O}, f, \Lambda)$ が得られる。

$\mathcal{G}(\mathcal{O}, f, \Lambda)$ は factor を生成する。

$\mathcal{H}(\mathcal{O}, f, \Lambda)$ における左移動から定められる G のユニタリー表現を $\rho(\mathcal{O}, f, \Lambda)$ で表す。

$\rho(\mathcal{O}, f, \Lambda)$ は $\mathcal{G}(\mathcal{O}, f, \Lambda)$ の right multiplication と可換。

さて $a \in C^*(G)$ に対して $\mathcal{G}(\mathcal{O}, f, \Lambda)^2$ 上の con-

jugate linear functional を

$$\sum_i \xi_i \eta_i^* \rightarrow \sum_i (\xi_i | \rho(\Omega, f, \Lambda)(a) \eta_i)$$

で定める。これが $\mathcal{H}(\Omega, f, \Lambda)$ の bonded linear functional になる、すなわち、 $\exists \xi \in \mathcal{H}$

$$\sum_i (\xi_i | \rho(\Omega, f, \Lambda)(a) \eta_i) = \sum_i (\xi_i \eta_i^* | \xi)$$

となるような $a \in C^*(G)$ 全体を考えて、対応する ξ 全体を $C^*(G) \cap \mathcal{G}(\Omega, f, \Lambda)$ で表す。 $\rho(\Omega, f, \Lambda)$ が求める character 表現であるかどうかは

Question: $C^*(G) \cap \mathcal{G}(\Omega, f, \Lambda)$ は $\mathcal{H}(\Omega, f, \Lambda)$ で dense か?

ということになる。この問題は易しくないが、上が成り立つ f, Λ の存在は [A-K], [P] に従えば容易に示せる。 $\mathcal{M}$ を $[\mathcal{O}, \mathcal{O}]$ を含む $\mathcal{O}$ の nilpotent ideal とする。このとき f が $\mathcal{M}$ -admissible という概念を想像どおり定義することができて

$\mathcal{M}$ -admissible な f が存在する

ことがわかる。さらに Λ に対しても

Λ として C^∞ なものが取れる。そしてこのような Λ は定数倍を除いて一意的である ([P])。

f を $\mathcal{N}$ -admissible, Λ を C^∞ とすると
 $C^*(G) \cap \mathcal{Q}(\Omega, f, \Lambda)$ は $\mathcal{K}(\Omega, f, \Lambda)$
 で dense である。このとき得られる character は (Ω, Λ)
 だけにより f の取り方にはよらない。それを $\tau_{\Omega, \Lambda}$
 で表せば
 $\tau_{\Omega, \Lambda} = \tau_{\Omega', \Lambda'} \Leftrightarrow \Omega = \Omega', \Lambda = \Lambda'.$

この結果により、 $C^*(G)$ の character の新しい parametrization が得られた。ここの Ω と Pukanszky の generalized orbit とはある意味で Fourier 変換の関係にある（[Y] 参照）。この辺の事情はもっと詳しく解析されるべきであるが、曖昧なことをこれ以上書いてもしょうがないので、ここはひとまずおしまいにする。

参考文献

[A-K] Auslander and Kostant, Polarization and unitary representations of solvable groups, Invent. Math. 14(1971)255-354.

[P] Pukanszky, Unitary representation of Lie groups and generalized symplectic geometry, Proc. Symp. Pure Math. 38(1982), Part 1.

[Y] Yamagami, On factor decomposition of an ergodic groupoid (preprint).