

完全 m 組グラフの $claw$ 分解について

新居 英高専 潮 和彦
広島経済大 田沢新成
広島大・理 山本純恭

1. はじめに

mn 個の点と $\binom{m}{2}n^2$ 本の線からなる完全 m 組グラフ $K_m(n, n, \dots, n)$ ($m \geq 2$) を考える。 $c+1$ 個の点と c 本の線からなる完全 2 組グラフ $K_2(1, c)$ を c - $claw$ (または c - $star$) とよぶ。

ここでは、 $K_m(n, n, \dots, n)$ を、互いに線を共有しない ($line$ - $disjoint$ な) c - $claw$ の和に分解すること (c - $claw$ 分解) を考える。

2. c - $claw$ 分解

$K_m(n, n, \dots, n)$ の mn 個の点を v_{ik} ($i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n$) とし、2 点間の隣接関係に適当な方向を与え、その隣接関係を与える $mn \times mn$ の隣接行列を

$$M = \|m_{ik, j\ell}\| \quad i, j = 1, 2, \dots, m; k, \ell = 1, 2, \dots, n$$

$$m_{ik,jl} = \begin{cases} 1 & v_{jl} \text{ が } v_{ik} \text{ に隣接しているとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とする。ただし, $ik = (i-1)n + k$ とする。このとき, M は m^2 個の $n \times n$ の部分行列 $M_{ij} = \|m_{ik,jl}\| \quad k, l = 1, 2, \dots, n$ をもち,

$$m_{ik,il} = 0 \quad \text{したがって} \quad M_{ii} = 0$$

$$m_{ik,jl} + m_{jl,ik} = 1 \quad (i \neq j)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n m_{ik,jl} = \binom{m}{2} n^2$$

をみたしている。

M の ik 行上にある c 個の 1 の集合は, v_{ik} を根とする c -claw に対応している。従って, 次の補題を得る。

補題 1 $K_m(n, n, \dots, n)$ が c -claw 分解可能であることは, 隣接関係を適当に方向づけて, $K_m(n, n, \dots, n)$ の隣接行列 M のどの行和も c の倍数となるようにできることと同値である。

与えられた行和をもつ隣接行列 M の存在に関して, 次の補題を得る。

補題 2 $\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} = \binom{m}{2} n^2$ をみたす非負の整数 $\alpha_{ik} (i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n)$ を行和にもつ $K_m(n, n, \dots, n)$ の方向をもった隣接行列 $M = \|m_{ik,jl}\|$ が存在するための必要十分条件は, $\alpha_{i1} \geq \alpha_{i2} \geq \dots \geq \alpha_{in} \quad (i=1, 2, \dots, m)$ とするとき, すべての $p=1, 2, \dots, mn$ について, p

の $0 \leq p_i \leq n$ をみたす任意の分割 $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_m$ に対して, 不等式

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{p_i} \alpha_{ik} \leq (m-1)np - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_m^2) \quad (1)$$

が成り立つことである。

証明 mn 個の点の集合 $N = \{v_{ik} \mid i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n\}$ と, $\binom{m}{2}n^2$ 本の方向をもった線の集合 $A = \{(ik, jl) \mid 1 \leq i < j \leq m; 1 \leq k, l \leq n\}$ で定義されるネットワーク $[N; A]$ を考える。ここに, (ik, jl) は v_{ik} から v_{jl} への向きをもった線とする。

A 上で定義される整数値関数 $f(ik, jl)$ が存在して,

$$\sum_{j>i} \sum_{l=1}^n f(ik, jl) + \sum_{j<i} \sum_{l=1}^n \{1 - f(jl, ik)\} = \alpha_{ik} \quad \forall v_{ik} \in N \quad (2)$$

$$0 \leq f(ik, jl) \leq 1 \quad (ik, jl) \in A$$

をみたすことは, $j > i$ に対しては, $m_{ik, jl} = f(ik, jl)$, $j < i$ に対しては, $m_{ik, jl} = 1 - f(jl, ik)$ とおき, さらに, $m_{ik, ik} = 0$ とおくことにより, α_{ik} を行和にもつ $m \times m$ の隣接行列 $M = \|m_{ik, jl}\|$ が存在することと同値である。

(2) から

$$\sum_{j>i} \sum_{l=1}^n f(ik, jl) - \sum_{j<i} \sum_{l=1}^n f(jl, ik) = \alpha_{ik} - n \cdot (i-1) \quad (3)$$

を得る。

$$S = \{v_{ik} \mid \alpha_{ik} - n(i-1) \geq 0\}$$

$$T = \bar{S} = N - S = \{v_{ik} \mid \alpha_{ik} - n(i-1) < 0\}$$

と、

$$\Delta(i_k) = \alpha_{ik} - n(i-1) \quad v_{ik} \in S$$

$$d(i_k) = -\alpha_{ik} + n(i-1) \quad v_{ik} \in T$$

$$c(i_k, j_l) = 1 \quad (i_k, j_l) \in A$$

とすると, Feasibility theorem [1], [2] および, Integrality theorem [1] より,

$$\sum_{j \geq i} \sum_{k=1}^n f(i_k, j_l) - \sum_{j \leq i} \sum_{k=1}^n f(j_l, i_k) \leq \Delta(i_k) \quad v_{ik} \in S \quad (4)$$

$$\sum_{j \leq i} \sum_{k=1}^n f(j_l, i_k) - \sum_{j \geq i} \sum_{k=1}^n f(i_k, j_l) \geq d(i_k) \quad v_{ik} \in T \quad (5)$$

$$0 \leq f(i_k, j_l) \leq 1 \quad (i_k, j_l) \in A$$

をみたす整数値関数 $f(i_k, j_l)$ が存在するための必要十分条件は, 任意の $X \subset N$ に対して,

$$\sum_{v_{ik} \in T \cap \bar{X}} d(i_k) - \sum_{v_{ik} \in S \cap \bar{X}} \Delta(i_k) \leq |(X, \bar{X})| \quad (6)$$

が成り立つことである。なお, $\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} = \binom{m}{2} n^2$ であるから, $\sum_{v_{ik} \in S} \Delta(i_k) = \sum_{v_{ik} \in T} d(i_k)$ が成り立つから, (6) で $\bar{X} = N$ のときには, 等号が成立し, さらに, (4)(5) では等号が成立する。(6)は

$$-n|\bar{X}| + n \sum_{v_{ik} \in \bar{X}} i - |(X, \bar{X})| \leq \sum_{v_{ik} \in \bar{X}} \alpha_{ik} \quad (7)$$

と同値である。 $|\bar{X}| = p'$, $|\{i_k | v_{ik} \in \bar{X}\}| = p'_i \quad i=1, 2, \dots, m$ とすると, $p' = p'_1 + p'_2 + \dots + p'_m$ である。

$$\begin{aligned}
& -n|\bar{X}| + n \sum_{v_{ik} \in \bar{X}} i - |(X, \bar{X})| \\
& = -np' + n(p'_1 + 2p'_2 + \cdots + mp'_m) - \{(n-p'_1)(p'_2 + p'_3 + \cdots + p'_m) + \\
& \quad (n-p'_2)(p'_3 + p'_4 + \cdots + p'_m) + \cdots + (n-p'_{m-1})p'_m\} \\
& = \frac{1}{2}p'^2 - \frac{1}{2}(p_1'^2 + p_2'^2 + \cdots + p_m'^2)
\end{aligned}$$

であるから, (7) は

$$\frac{1}{2}p'^2 - \frac{1}{2}(p_1'^2 + p_2'^2 + \cdots + p_m'^2) \leq \sum_{v_{ik} \in \bar{X}} \alpha_{ik} \quad (8)$$

となる。

$|\{k \mid v_{ik} \in X\}| = p_i \quad i=1, 2, \dots, m$ とすると, $p_i = n - p'_i \quad (i=1, 2, \dots, m)$, $p_1 + p_2 + \cdots + p_m = P = mn - p'$ であり, $\alpha_{i1} \geq \alpha_{i2} \geq \cdots \geq \alpha_{in} \quad (i=1, 2, \dots, m)$, $\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} = (m)n^2$ であるから, (8) は

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{p_i} \alpha_{ik} \leq (m-1)np - \frac{1}{2}p'^2 + \frac{1}{2}(p_1'^2 + p_2'^2 + \cdots + p_m'^2) \quad (9)$$

と同値となる。

$K_m(n, n, \dots, n)$ の c -claw 分解に対して, 次の定理を得る。

定理 3 $K_m(n, n, \dots, n)$ が c -claw 分解可能であるための必要十分条件は,

$$(i) \quad c \mid (m)n^2, \quad \text{かつ}$$

$$(ii) \quad mn \geq 2c$$

である。

証明 (必要性) 条件 (i) は明らかに必要である。次に,

$mn < 2c$ のとき, $K_m(n, n, \dots, n)$ が $b = \binom{m}{2}n^2/c$ 個の c -claw に分解されたとする。このとき, $b < (m-1)n$ となるから, どの c -claw の根でもない点が存在し, その次数は $(m-1)n$ より小さい。一方, すべての点の次数は, どれも $(m-1)n$ であるから矛盾である。従って, (ii) は必要である。

(十分性) $c | \binom{m}{2}n^2$ より, $\binom{m}{2}n^2/c = mna + nb + g$ とおく。ここに, $a = \lfloor \frac{(m-1)n}{2c} \rfloor$, $0 \leq b < m$, $0 \leq g < n$ である。 $mn \geq 2c$ であるから, ① $2c \leq mn < 2c+n$, ② $2c+n \leq mn$ の2通りの場合に分けて, c -claw 分解が可能であることを示す。

I. $2c \leq mn < 2c+n$ の場合 この場合, $a=0, b=m-1$ であり, かつ, 一般に, $(m-1)n \geq \frac{mn}{2}$ であるから, $(m-1)n \geq c$ である。

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} c & 1 \leq ik \leq (m-1)n+g \\ 0 & (m-1)n+g+1 \leq ik \leq mn \end{cases}$$

とおけば, $\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} = \binom{m}{2}n^2$ をみたす。補題2を用いて, この $\{\alpha_{ik}\}$ が feasible であることを示す。

すべての $p=1, 2, \dots, mn$ について, p の $0 \leq p_i \leq n$ をみたす任意の分割 $p = p_1 + p_2 + \dots + p_m$ に対して,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} p_i = (p_0 + g')c$$

となる。ここに, $p_0 = p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1}$, $g' = \min(p_m, g)$ である。

一方, $p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{m-1}^2 \geq \frac{p_0^2}{m-1}$ を用いれば

$$(m-1)np - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_m^2) \geq (m-1)n(p_0 + p_m) - \frac{1}{2}p_0^2 - p_0p_m + \frac{p_0^2}{2(m-1)}$$

となる。さらに、 $\binom{m}{2}n^2/c = (m-1)n + g$ を用いれば、

$$\begin{aligned} (m-1)n p - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_m^2) - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{p_i} \alpha_{ik} \\ \geq \left\{ (m-1)n - p_0 \right\} \cdot \left\{ \frac{m-2}{2(m-1)} p_0 + p_m - \frac{mn}{2} + c \right\} + (g - g')c \end{aligned}$$

となる。

$$f(p_0) = \left\{ (m-1)n - p_0 \right\} \cdot \left\{ \frac{m-2}{2(m-1)} p_0 + p_m - \frac{mn}{2} + c \right\} + (g - g')c$$

は、 $m=2$ のときは、 p_0 に関する一次式で、 $m \geq 3$ のときは、上に凸な2次式である。 $0 \leq p_0 \leq (m-1)n$ であるから、 $f(0) \geq 0$ 、 $f((m-1)n) \geq 0$ が成り立てば、 $f(p_0) \geq 0$ である。実際、 $(m-1)n \geq c$ 、 $p_m \geq g'$ 、 $g \geq g'$ を用いれば、

$$f(0) = (m-1)n \left(p_m - \frac{mn}{2} + c \right) + (g - g')c = (m-1)n p_m - c g' \geq 0$$

$$f((m-1)n) = (g - g')c \geq 0$$

である。従って、補題2から、この $\{\alpha_{ik}\}$ は feasible である。

補題1, 2 から、 $K_m(n, n, \dots, n)$ は c -claw 分解可能である。

II. $2c+n \leq mn$ の場合 この場合、 $a \geq 1$ である。 $nb+g=r$

とおけば、 $ac = \frac{(m-1)n}{2} - \frac{rc}{mn}$ である。

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} (a+1)c & 1 \leq ik \leq r \\ ac & r+1 \leq ik \leq mn \end{cases}$$

とおけば、 $\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} = \binom{m}{2}n^2$ をみたす。この $\{\alpha_{ik}\}$ が feasible であることを示す。

すべての $p=1, 2, \dots, mn$ について、 p の $0 \leq p_i \leq n$ をみたす任意の分割 $p=p_1+p_2+\dots+p_m$ に対して、

(i) $p \leq r$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{p_i} \alpha_{ik} &\leq p \cdot (a+1)c = pac + pc = \left\{ \frac{(m-1)n}{2} - \frac{rc}{mn} \right\} p + pc \\ &= \frac{(m-1)n}{2} p + \frac{pc}{mn} (mn-r) \leq \frac{(m-1)n}{2} p + \frac{pc}{mn} (mn-p) \end{aligned}$$

(ii) $p \geq r$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{p_i} \alpha_{ik} &\leq r \cdot (a+1)c + (p-r)ac = pac + rc = \left\{ \frac{(m-1)n}{2} - \frac{rc}{mn} \right\} p + rc \\ &= \frac{(m-1)n}{2} p + \frac{rc}{mn} (mn-p) \leq \frac{(m-1)n}{2} p + \frac{pc}{mn} (mn-p) \end{aligned}$$

となる。一方, $p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_m^2 \geq \frac{p^2}{m}$ を用いれば,

$$(m-1)np - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_m^2) \geq (m-1)np - \frac{1}{2}p^2 + \frac{p^2}{2m}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} (m-1)np - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_m^2) - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{p_i} \alpha_{ik} \\ \geq (m-1)np - \frac{1}{2}p^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{(m-1)n}{2} p - \frac{pc}{mn} (mn-p) \\ = \frac{(mn-p)p}{2mn} \left\{ (m-1)n - 2c \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

となる。従って, 補題 2 から, α の $\{\alpha_{ik}\}$ は feasible である。

補題 1, 2 から, $K_m(n, n, \dots, n)$ は c -claw 分解可能である。

I, II の結果から, $K_m(n, n, \dots, n)$ の c -claw 分解は完了する。

参考文献

- [1] Ford, L. R. Jr. and Fulkerson, D. R. (1962), *Flows in networks*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.
- [2] Gale, D. (1957), A theorem on flows in networks, *Pacific J. Math.* 7, 1073-1082.

- [3] Ryser, H. J. (1957), Combinatorial property of matrices of zeros and ones, *Canad. J. Math.* 9, 371-377.
- [4] 潮 和彦, 山本純恭 (1975), $K(n, n, \dots, n)$ の claw 分解について—I, II, 日本数学会秋季総合分科会応用数学分科会講演予稿集, 34-40, 41-47.
- [5] 潮 和彦, 山本純恭 (1976), 完全 m 組グラフの claw 分解, 日本数学会年会応用数学分科会講演予稿集, 38-45.
- [6] Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Ushio, K. and Hamada, N. (1975), Design of a new balanced file organization scheme with the least redundancy, *Information and Control* 28, 156-175.
- [7] Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Ushio, K. and Hamada, N. (1975), On claw-decomposition of complete graphs and complete bigraphs, *Hiroshima Math. J.* 5, 33-42.