

Dissipative Periodic Systems (Levinson-Massera の等式)

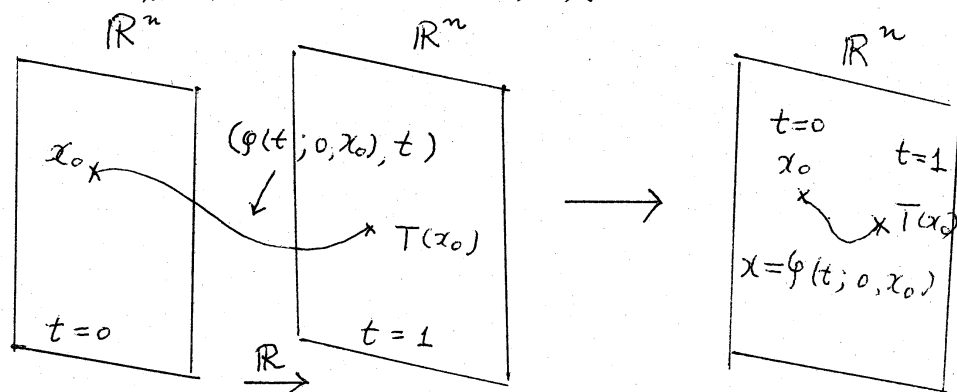
名大 教養部 白岩 謙一

§1. $\mathbb{R}^n$ のような微分方程式を考える.

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ここで, $f(t, x)$ は C^1 級の $\mathbb{R}^n$ に値をとる関数で, t に関して周期 1 の周期関数であるとする. そして, さらに, 方程式 (1) は任意の初期条件 $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ に対して, その解の最大存在区間が $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ となるものとする. そして, そのような解を $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ と表わす.

いま写像 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $T(x_0) = \varphi(1; 0, x_0)$ と定義する. こゝを方程式 (1) の Poincaré 変換という.



命題1 T は C^1 級微分同相写像で, 恒等写像と isotopic である. しかもって, 特に orientation を保つ.

証明 T が全写射で $T^{-1}(x_0) = \varphi(0; 1, x_0)$ となる. また, $f(t, x)$ が C^1 級だから, T と T^{-1} は C^1 級である. すなわち, T は C^1 級微分同相写像である.

次に, $T_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($0 \leq t \leq 1$) を $T_t(x_0) = \varphi(t; 0, x_0)$ と定義すると, これは C^1 級微分同相写像で $T_0 = 1_{\mathbb{R}^n}$ (恒等写像) $T_1 = T$ となる. したがって, T_t の定義する写像 $\mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ は C^1 級である. すなわち, T は $1_{\mathbb{R}^n}$ と isotopic.

命題2 $\varphi(t+1; 0, x_0) = \varphi(t; 0, T(x_0))$, $t \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$

証明 $x(t) = \varphi(t+1; 0, x_0)$ が (1) の解であることは $f(t, x)$ の t による周期性からわかる. したがって $x(0) = \varphi(1; 0, x_0) = T(x_0)$ と解の一意性から上の等式が得られる.

系1 $\varphi(t+k; 0, x_0) = \varphi(t; 0, T^k(x_0))$, $k \in \mathbb{Z}$

系2 (1) の解 $x(t)$ が周期長 (k は自然数) の周期解

$\Leftrightarrow x(0)$ が T^k の fixed point

$\Leftrightarrow x(0)$ が T の周期長 k の periodic point

注意1 周期が有理数の周期解 $x(t)$ に対して, $x(0)$ は T の周期点である.

注意2 周期が無理数の周期解 $x(t)$ に対して, $x(0)$ は T の recurrent point である. しかもって, 特に non-wandering

である。

定義 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ の不動点 p に対して, その微分 (ヤコビ行列) を $DT(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ とする。いま $DT(p)$ の固有値の絶対値がすべて 1 と異なるとき, p を T の *hyperbolic* (双曲型) 不動点という。

$DT(p)$ の固有値の絶対値がすべて 1 より大きいとき, p を *source* といい, これらがすべて 1 より小さいとき, p を *sink* という。また, 絶対値が 1 より大きいものと 1 より小さいものの両方が存在するとき, p を *saddle* という。

$n=2$ のとき, $\det DT(p) > 0$ (命題 1 からわかる) に注意すると, *hyperbolic* な不動点は次の 4 種類である。

$DT(p)$ の固有値 (特性根) を λ_1, λ_2 とする

- (a) $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$ completely unstable (source)
- (b) $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$ completely stable (sink)
- (c) $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ directly unstable (saddle)
- (d) $\lambda_2 < -1 < \lambda_1 < 0$ inversely unstable (saddle)

T の周期点 p に対しても, その最小周期 k を用いて, T^k の不動点と考え, p が T^k の *hyperbolic* な不動点のとき, これを T の *hyperbolic periodic point* と定義する。そして, *source*, *sink*, *saddle* 等が不動点の場合と同様に定義される。

以下簡単のため, 不動点についてのみに考察するが, 周期点の場合も同様なことが成立する.

いま, $p \in T$ の不動点とする. このとき, $DT(p)$ は次のように求むることができる.

(1) の解 $x = \varphi(t; 0, p)$ は周期 1 の周期解である. そこで, (1) の $\varphi(t; 0, p)$ に関する変分方程式を考える.

$$(2) \quad \dot{x} = D_x f(t, \varphi(t; 0, p)) x$$

そこで, $D_x f(t, x)$ は $f(t, x)$ の x に関する偏微分 (ヤコビ行列) である.

(2) は仮定から, 周期 1 の連続な周期関数を係数にもつ線形常微分方程式である. そこで, この基本行列を $W(t)$ とすると, 次の命題が成立する.

命題 3 $DT(p) = W(1) W(0)^{-1}$

証明 変分方程式の定義と, T の定義から容易に確かめられる.

命題 4 p が hyperbolic $\iff$ (2) の characteristic exponents はすべてその real parts が 0 でない.

証明 Floquet 理論を用いて示す.

定義 $p \in \mathbb{R}^n$ を T の hyperbolic な不動点とする. いま, $L = DT(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ の絶対値が 1 より大きい固有値に対する一般化された固有空間の直和と $\mathbb{R}^n$ の共通部分を E^u とよぶ.

き, 絶対値 λ_i より小さい固有値に対する一般化された固有空間の直和と $\mathbb{R}^n$ の共通部分を E^s とおく.

命題5 (a) $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, $L(E^s) = E^s$, $L(E^u) = E^u$

(b) $L = DT(p)$ の特性根 (固有値) を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とするとき,

$$\dim E^s = \#\{ \lambda_i \mid |\lambda_i| < 1 \}, \dim E^u = \#\{ \lambda_i \mid |\lambda_i| > 1 \}$$

(c) 適当な定数 c ($c > 0$), λ ($0 < \lambda < 1$) があって

$$\|L^k(x)\| \leq c\lambda^k \|x\|, x \in E^s \quad \left\{ \begin{array}{l} (k \geq 1) \end{array} \right.$$

$$\|L^{-k}(x)\| \leq c\lambda^k \|x\|, x \in E^u$$

定義 $p \in T$ の hyperbolic 不動点とするとき,

$$W^s(p) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{k \rightarrow \infty} T^k(x) = p \}$$

$$W^u(p) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{k \rightarrow \infty} T^{-k}(x) = p \}$$

とき, $W^s(p)$ を p の stable manifold, $W^u(p)$ を p の unstable manifold とする.

定理 (Stable Manifold Theorem) 適当な 1-1 immersion $\phi^s: E^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ があって, 次のことが成立する.

$$(a) \quad \phi^s(E^s) = W^s(p) \quad (b) \quad \phi^s(0) = p \quad (c) \quad \dim W^s(p) = \dim E^s$$

命題5 および上の定理の証明については, 白岩[6]を参照のこと.

注意3 Unstable Manifold に対して τ 上と同様の定義が成立する. また, hyperbolic な periodic point に対して τ も, 同様のことが成立する.

§2 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を連続写像とし, $p \in \mathbb{R}^n$ を不動点とする.

"す, $1-T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $(1-T)(x) = x - T(x)$ と定義すると $(1-T)(p) = 0$ となる.

p を T の isolated fixed point とする. すなわち, p の適当な近傍 U があって, $T(x) = x$ となるような U の点は p 以外に存在しないとする. すると, $(1-T)(U - \{p\}) \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ となる. (したがって, $1-T$ は $\mathbb{Z}$ 係数のホモロジ一群の間の写同型写像

$$(1-T)_*: H_n(U, U - \{p\}) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$$

をひき起す.

ここで, $H_n(U, U - \{p\}) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ である. $\mathbb{R}^n$ に orientation を定めれば, この群の生成元 $0_U, 0_{\mathbb{R}^n}$ が一意に定まる. (したがって, 適当な $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$(1-T)_*(0_U) = m \cdot 0_{\mathbb{R}^n}$$

が成立する. この m は U のとり方によらずに無変数である. ここで, p が T に決する (fixed point) index といい, $\text{index}_T(p)$ または $\text{index}(p)$ と表わす.

命題6 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を C^1 級微分同相写像とし, $p \in \mathbb{R}^n$ を hyperbolic な不動点とする. このとき, 次のことが成立する.

(a) p は T の isolated fixed point である.

(b) $\text{index}_T(p)$ は次のように決まってくる.

$$\text{index}_T(p) = \begin{cases} +1, & \det(1_{\mathbb{R}^n} - DT(p)) > 0 \\ -1, & \det(1_{\mathbb{R}^n} - DT(p)) < 0 \end{cases}$$

証明 Hartmanの定理(白岩 [6])により, T が hyperbolic な同型写像 T , $p=0$ のときに証明すれば十分である. $T = \bar{T}$, $\bar{T}$ の場合, $1-T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は同型写像となるから, $\det(1_{\mathbb{R}^n} - DT(p))$ が正になるか負になるかにしただけで, $1-T$ は $\mathbb{R}^n$ の orientation を保つたり, 反対にしたりする. $\bar{T}$ のときはすぐわかる.

命題 7 命題 6 と同じ仮定の下で, 次のことが成立する.

$$\text{index}_T(p) = \begin{cases} +1, & 1 \text{ より大きな } DT(p) \text{ の実固有値の個数が偶数} \\ -1, & \text{奇数} \end{cases}$$

系 1 命題 6 と同じ仮定の下で, 次のことが成立する.

$\dim E^u = n$ とし, $L_u = DT(p)|_{E^u}: E^u \rightarrow E^u$ とする.

(a) $\det L_u > 0$ ならば $\text{index}_{T^k}(p) = (-1)^n$, $k \geq 1$.

(b) $\det L_u < 0$ ならば $\text{index}_{T^{2k+1}}(p) = (-1)^{n+1}$, $k \geq 0$

$$\text{index}_{T^{2k}}(p) = (-1)^n, \quad k \geq 1$$

系 2 命題 6 と同じ仮定の下で, 次のことが成立する.

(a) p が source ならば, $\text{index}_{T^k}(p) = (-1)^n$, $k \geq 1$

(b) p が sink ならば, $\text{index}_{T^k}(p) = 1$, $k \geq 1$

命題 7 は命題 6 を用いてわかる. 実際, $1_{\mathbb{R}^n} - DT(p)$ は Jordan の標準形を用いて表わし, その行列式の符号を $DT(p)$

の特性根(固有値)を用いて計算することによって, 命題7の結果を得る.

系1は命題7と簡単な線形代数の計算によって求めることができる. 系2は系1と $\det L > 0$ からわかる.

例 $n=2$ とすると系2から次のことがわかる.

p が completely stable または completely unstable ならば

$$\text{index}_{T^k}(p) = 1, \quad k \geq 1$$

また, 系1から次のことがわかる.

p が directly unstable ならば $\text{index}_{T^k}(p) = -1, \quad k \geq 1$

p が inversely unstable ならば $\text{index}_{T^k}(p) = \begin{cases} +1, & k: \text{odd} \geq 1 \\ -1, & k: \text{even} \geq 2 \end{cases}$

定理 (Poincaré-Hopf-Lefschetz) $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を連続写像とし, T の不動点はすべて isolated とする. 115, n 次元円球と同相な $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K があって, 次の条件

(a) $T(K) \subset K$,

(b) T の不動点はすべて K に含まれる.

をみたすならば, 次の等式が成立する.

$$\sum_{T(p)=p} \text{index}_T(p) = 1$$

系 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を C^1 級微分同相写像, k を自然数とする. 115 周期 k の T の周期点はすべて hyperbolic とし,

n 次元閉球と同相な $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K があって, 次の

$$(a) \quad T^k(K) \subset K$$

(b) 周期長 k の T の周期点はすべて K に含まれる,

が成立するとき, 次の等式が成立する,

$$\sum_{T^k(p)=p} \text{index}_{T^k}(p) = 1$$

系は上の定理からすぐわかる. また, 定理の証明は Dold [1] を参照されたい.

§3 ここで Levinson-Massera の等式とその一般化について示す.

定義 方程式 (1) が dissipative (D-system)

$\Leftrightarrow$ 適当な正数 R と自然数 N があって, (1) の任意の解 $x(t)$ に対して, 次のことが成立する.

適当な $t_0 \in \mathbb{R}$ に対して, $\|x(t_0)\| \leq R$ および

$$\|x(t)\| \leq R, \quad t \geq t_0 + N$$

例1 (Levinson-Langenhop-Opial) 次の方程式

$$(3) \quad \ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t)$$

において, $f(x, v)$, $g(x)$, $e(t)$ は C^1 級とし, 以下は次の条件 (a) ~ (d) を満たすものとする.

(a) $e(t)$ は周期 1 の周期関数で, $E = \max |e(t)|$ とおく.

(b) 適当な正数 m, a があって, 次の不等式が成立する.

$$f(x, v) \geq m \quad \text{for } |x| \geq a, \quad |v| \geq a$$

(c) 適当な正数 M があって, $f(x, v) \geq -M$

$$(d) \liminf_{x \rightarrow \infty} g(x) > Ma + E, \quad \limsup_{x \rightarrow -\infty} g(x) < -(Ma + E)$$

方程式 (3) は次の方程式と同値である.

$$(3)' \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x, y)y - g(x) + e(t) \end{cases}$$

(3)' は D-system である. (Opial [5])

例 2 (Duffing's Equation) 次の方程式

$$(4) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t)$$

にあって, $f(x), g(x), e(t)$ は次の条件を満たすものとする.

(a) $e(t)$ は周期 1 の周期関数で C^1 級で, $E = \max |e(t)| < \infty$.

(b) 適当な正数 c があって, $f(x) \geq c$ となる.

(c) $g'(x) \geq 0$ である, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) > E, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) < -E$

方程式 (4) は次の方程式と同値である.

$$(4)' \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x) + e(t) \end{cases}$$

(4)' は D-system である. (例 1, 白岩 [7])

2 次の D-system

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y) \\ \dot{y} = g(t, x, y) \end{cases}$$

に対して, $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ をその Poincaré 変換とする.

いま, 各自然数 k に対して, 周期 k の周期点 x はすべて *hyperbolic* とすると, 周期 k の周期点の位数は有限となる.

そこで, 自然数 q に対して,

$C(q) = \# \{ \text{最小周期 } q \text{ の completely stable または completely unstable な周期点} \}$

$I(q) = \# \{ \text{最小周期 } q \text{ の inversely unstable 周期点} \}$

$D(q) = \# \{ \text{最小周期 } q \text{ の directly unstable 周期点} \}$

とおくと, 次の定理が成立する.

定理 (Levinson - Massera) 次の仮定と記号のもとで, 次の等式が成立する.

$$C(1) + I(1) = D(1) + 1$$

$$q: \text{奇数 } (q > 1) \text{ なら } C(q) + I(q) = D(q)$$

$$q: \text{偶数 なら } C(q) + I(q) = D(q) + 2I\left(\frac{q}{2}\right)$$

この定理の証明は Massera [4] を参照されたい.

この定理を一般の次元 n に拡張しよう. このため, 次のような定義を用意しよう.

定義 方程式 (1) が D' -system

$\Leftrightarrow n$ 次元相球と同相な $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K があって, 次の性質が成立する,

(a) (1) の任意の解 $x(t)$ に対して, 適当な $t_0 \in \mathbb{R}$ があって, $x(t_0) \in K$.

(b) (1) の任意の解 $x(t)$ に対して, 次のことが成立する.
 $x(t_1) \in K$ ならば, $x(t) \in K, \forall t \geq t_1$

定義から, 次の命題は明らかである.

命題 8 D' -system は D -system である.

例 3 例 1, 例 2 の D -system は実は D' -system である.

例えば Opial [5], 白岩 [7] を参照のこと.

例 4 (x, y) 平面上で, 原点から十分はなれた点に対して,
 常にその点を通る単一閉曲線が対応して, $t = t_0$ (t_0 は任意)
 のとき, その単一閉曲線の点を通る解 $(x(t), y(t))$ は t を増
 やすとき, (x, y) 平面上でその単一閉曲線の内部に向かうよ
 うな 2 次元の system を E -system という (吉屋 [2]).

E -system は D' -system である.

定義 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を C^1 級微分同相写像とする. いま,
 $p \in T$ の hyperbolic な不動点とし, $L = DT(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
 による $\mathbb{R}^n$ の直和分解を $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ とする. そして,
 $L_u = DT(p)|_{E^u}: E^u \rightarrow E^u$ とおく.

このとき,

$\det L_u > 0, \dim E^u = \text{even}$ ならば, p を PD 型

$\det L_u > 0, \dim E^u = \text{odd}$ ならば, p を ND 型

$\det L_u < 0, \dim E^u = \text{even}$ ならば, p を PI 型

$\det L_u < 0, \dim E^u = \text{odd}$ ならば, p を NI 型

と定義する.

周期点についても同様に定義する.

定理 方程式 (1) が D -system とし, $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を その Poincaré 変換 とする. そして, すべての自然数 q に対して, 周期 q の周期点はすべて *hyperbolic* とする.

このとき, 各自然数 q に対して, 周期 q の周期点の位数は有限値となる. そこで, 以下

$PD(q) = \# \{ \text{最小周期 } q \text{ の PD 型 周期点} \}$

$ND(q) = \# \{ \text{ " " ND 型 " } \}$

$PI(q) = \# \{ \text{ " " PI 型 " } \}$

$NI(q) = \# \{ \text{ " " NI 型 " } \}$

$N(q) = \# \{ \text{最小周期 } q \text{ の 周期点} \}$

とおくと, 次の等式が成立する.

$$PD(1) + NI(1) = ND(1) + PI(1) + 1$$

$$N(1) = PD(1) + ND(1) + NI(1) + PI(1)$$

$$= 2(ND(1) + PI(1)) + 1$$

q を 1 より大きい 奇数 とすると

$$PD(q) + NI(q) = ND(q) + PI(q)$$

$$N(q) = PD(q) + ND(q) + NI(q) + PI(q)$$

$$= 2(PD(q) + NI(q)) = 2(ND(q) + PI(q))$$

q を 偶数 とすると

$$PD(q) + NI(q) + 2PI(q/2) = ND(q) + PI(q) + 2NI(q/2)$$

$$N(q) = PD(q) + ND(q) + NI(q) + PI(q)$$

$$= 2(ND(q) + PI(q) + NI(q/2) - PI(q/2))$$

系. 上の定理と同じ仮定のもとで, 次のことが成立する.

(a) $N(1)$ は奇数である.

(b) q を 1 より大きい奇数とすると, $N(q)$ は $2q$ で割り切れる.

(c) q を偶数とし, $PI(q/2) = NI(q/2)$ とすると, $N(q)$ は $2q$ で割り切れる. 特に, $PI(q/2) = NI(q/2) = 0$ ならば, $N(q)$ は $2q$ で割り切れる.

この系は上の定理からすぐわかる. また, 上の定理は, 命題 7 系 1, Poincaré - Hopf - Lefschetz の定理等を用いて, Massera [4] と同様に証明できる. 詳細は白岩 [8] に参照されたい.

参考文献

- [1] A. Dold: Fixed point index and fixed point theorem for Euclidean neighborhood retracts, *Topology* 4 (1965), 1-8
- [2] 古屋 茂: 非線型問題 (強制振動論), 共立, 1957
- [3] N. Levinson: Transformation theory of non-linear differential equations of the second order, *Ann. of Math.* 45 (1944), 723-737, Corrections, *ibid.* 49 (1948), 738

[4] J.L. Massera : The number of subharmonic solutions of non-linear differential equations of the second order, *Ann. of Math.* 50 (1949), 118-126

[5] Z. Opial : Démonstration d'un théorème de N. Levinson et C. Langenhop, *Ann. Polon. Math.* 7 (1960), 241-246

[6] 白岩 謙一 : 力学系の理論, 岩波, 1974

[7] " : Boundedness and convergence of solutions of Duffing's Equation, to appear

[8] " : A generalization of the Levinson-Massera's equalities, to appear