

学 位 審 査 報 告 書

(ふ り が な) 氏 名	まつえ かなめ 松江 要
学位 (専 攻 分 野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学位 授 与 の 日 付	平成 年 月 日
学位 授 与 の 要 件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科 数学・数理解析 専攻
(学位論文題目) Rigorous verification of bifurcations of differential equations via the Conley index theory (Conley 指数理論を用いた微分方程式の解の分岐の数値検証)	
論 文 調 査 委 員	(主査) 國府 寛司 教 授 穴倉 光広 教 授 加藤 毅 教 授

京都大学	博士 (理 学)	氏 名	松江 要
論文題目	Rigorous verification of bifurcations of differential equations via the Conley index theory		

(論文内容の要旨)

主論文では, 連続力学系における平衡点のサドルノード分岐, ピッチフォーク分岐と定性的に類似した分岐現象の一般化を, Conley 指数と呼ばれる位相不変量と, 不変集合の勾配的分解を表す Morse 分解によって定式化した. また, 具体的な偏微分方程式のなす力学系に対し, 提案した分岐現象を数値検証により確かめられる事を示した.

X を局所コンパクト距離空間, $\varphi : (0, \infty) \times X \rightarrow X$ を X 上の semiflow とする. S を φ についての孤立不変集合で, N を孤立化近傍に持つものとする. この時, S の Conley 指数を $CH_*(S) = CH_*(S, \varphi) := H_*(N_1, N_2)$ なる相対ホモロジー群で定義する. ここに, (N_1, N_2) は S の index pair である.

以下の状況を考える. $\Lambda := [\lambda_-, \lambda_+]$ として,

- $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $\lambda \in \Lambda$ に関して連続的に依存する X 上の semiflow の族とする.
- 群 $\mathbb{Z}_2$ が X に作用する, すなわち $g \in \mathbb{Z}_2$ に対し $g\varphi_\lambda(t, x) = \varphi_\lambda(t, gx)$ が成り立つ.
- $\Phi : [0, \infty) \times X \times \Lambda \rightarrow X \times \Lambda$ を $\Phi(t, x, \lambda) := (\varphi_\lambda(t, x), \lambda)$ で定義される $X \times \Lambda$ 上のパラメータ付けされた semiflow とする.

定義. N を Φ の連結な孤立化近傍で, 各 λ に対して N^λ が連結, さらに semiflow の不変集合への制限 $\varphi^\lambda|_{\text{Inv}(N^\lambda)}$ が flow になっているとする. この時, 次の (CPF1)–(CPF5) を満たす N を $[\lambda_-, \lambda_+]$ 上で C-ピッチフォーク型であるという:

(CPF1) $CH_*(\text{Inv}(N^{\lambda_-}), \varphi^{\lambda_-}) \neq 0$ であり, $\text{Inv}(N^{\lambda_-})$ は $\mathbb{Z}_2$ -非対称な Morse 成分を含む Morse 分解を持たない.

さらに, 互いに素な φ_{λ_+} -孤立化近傍 $N_0^{\lambda_+}, N_1^{\lambda_+}, N_2^{\lambda_+}$ が存在して, 次を満たす:

(CPF2) 孤立不変集合の集まり $\{\text{Inv}(N_0^{\lambda_+}), \text{Inv}(N_1^{\lambda_+}), \text{Inv}(N_2^{\lambda_+})\}$ は, 次のいずれかの許容的順序を持つ $\text{Inv}(N^{\lambda_+})$ の Morse 分解となっている:

- (S) $\text{Inv}(N_0^{\lambda_+}) < \text{Inv}(N_2^{\lambda_+}), \quad \text{Inv}(N_1^{\lambda_+}) < \text{Inv}(N_2^{\lambda_+}),$
 (U) $\text{Inv}(N_0^{\lambda_+}) > \text{Inv}(N_2^{\lambda_+}), \quad \text{Inv}(N_1^{\lambda_+}) > \text{Inv}(N_2^{\lambda_+}).$

(CPF3) $\text{Inv}(N_j^{\lambda_+})$ ($j = 0, 1, 2$) は次を満たす:

$$\text{Inv}(N_i^{\lambda_+}) \cap \text{Fix}(\mathbb{Z}_2) = \emptyset, \quad g\text{Inv}(N_i^{\lambda_+}) = \text{Inv}(N_{1-i}^{\lambda_+}) \quad (i = 0, 1),$$

$$g\text{Inv}(N_2) = \text{Inv}(N_2).$$

ただし, $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2) = \{x \in X \mid gx = x, \forall g \in \mathbb{Z}_2\}$ と定義する.

(CPF4) $CH_*(\text{Inv}(N_i^{\lambda+}), \varphi^{\lambda+}) \neq 0$ ($i = 0, 1$).

(CPF5) 非自明な Conley 指数を持つ $\mathbb{Z}_2$ -対称な孤立不変集合 $S \subset \text{Inv}(N_2^{\lambda+})$ が存在する.

主定理では, C-ピッチフォーク型の孤立化近傍内で, 以下で示されるような分岐が起こる事を示した. N^λ の空でない不変集合である 各 Morse 成分 M_i^λ ($i = 0, 1, 2$) に対して, 次の 2 条件を満たす N^λ の部分集合 $N_0^\lambda, N_1^\lambda, N_2^\lambda$ が存在するような λ の集合を Λ_{PF} とする:

(PF1) $i = 0, 1, 2$ に対して, N_i^λ は M_i^λ を含む孤立化近傍である.

(PF2) $\{\text{Inv}(N_0^\lambda), \text{Inv}(N_1^\lambda), \text{Inv}(N_2^\lambda)\}$ は (CPF2)-(CPF5) を満たす.

主定理. N を $[\lambda_-, \lambda_+]$ 上の C-ピッチフォーク型孤立化近傍とし, 集まり $\mathcal{M}_\lambda := \{M_0^\lambda, M_1^\lambda, M_2^\lambda\}$ を, (CPF2), (CPF3) と (CPF5) を満たす $\text{Inv}(N^\lambda)$, $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ の Morse 分解, $\lambda^* := \inf \Lambda_{\text{PF}}$ とする. この時, 次の (1)–(3) が成立する.

(1) $\lambda^* \neq \lambda_+$.

(2) $\lambda \leq \lambda^*$ と $\mathcal{M}_\lambda$ に対して, $CH_*(M_0^\lambda) = CH_*(M_1^\lambda) = 0$ が成立し, $\{M(p)\}_{p \in P}$ が M_0^λ または M_1^λ の Morse 分解ならば, 全ての $p \in P$ に対して $CH_*(M(p)) = 0$ となる.

(3) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, アトラクタの $\lambda \rightarrow \lambda^* + 0$ における上極限集合から, リペラーの $\lambda \rightarrow \lambda^* + 0$ における上極限集合への ϵ 鎖が存在する.

この定理は, 孤立不変集合の Morse 分解の勾配的, 回帰的構造の $\lambda = \lambda_*$ での変化を ϵ -鎖を用いて定式化したものである. この分岐現象は平衡点のピッチフォーク分岐の一般化となっており, これを「C-ピッチフォーク分岐」と呼ぶ. 主論文ではサドル・ノード分岐に対応する「C-サドル・ノード分岐」についても同様の定式化を与えた.

これらの概念の偏微分方程式への応用として, 熱対流モデルの一つである Swift-Hohenberg 方程式の定常解の分岐現象について提案手法による数値検証を試みる事により, あるパラメータ区間上 C-ピッチフォーク型孤立化近傍で, 自明定常解を含むものと含まないものを構成する事に成功した.

以上が本論文の主要結果である.

(論文審査の結果の要旨)

申請者の研究は、力学系の分岐に関するものである。熱対流や生物の個体数変化など、パラメータに依存する多くの力学系において、パラメータの変化に応じて力学系の不変集合の構造が変化する分岐現象が見られ、それを研究する分岐理論は力学系理論の主要な研究分野の一つとなっている。通常はモデル方程式の解析により、生じる分岐の条件を記述できるが、時間発展による状態の変化が予測困難な振る舞いをするカオス的な不変集合など、複雑な構造を持つ不変集合の分岐を捉えることは困難である。申請者の結果は、このような分岐問題の解析に対して新たな視点を与えたものであり、理論・応用共に今後の発展が期待される結果である。

近年、論文 [1] において、離散時間の力学系のパラメータ族の大域構造を、不変集合の代数的不変量の情報を有した有限有向グラフに置き換えて数学的厳密に検証する位相計算法が提案された。そこでは Conley-Morse グラフと呼ばれる位相的情報と組合せ的情報の融合による、力学系の大域的構造の新たな見方を提唱している。主論文では [1] でのアイデアに基づき、基本的な分岐であるサドル・ノード分岐、ピッチフォーク分岐に定性的に類似した分岐を、不変集合の回帰的・勾配的構造の変化として定式化した。これは通常の意味の分岐の一般化となっており、複雑な構造を持つ不変集合の分岐も同様の考え方で捉えられる可能性がある。さらに、具体的な偏微分方程式のなす無限次元力学系の分岐を、この定式化と計算機援用解析を援用して検証する事に成功した。これは本論文で与えた概念が無限次元も含む高次元の力学系の分岐の検証にも応用できることを意味する。

[1] で考察されたモデルに見られるような複雑な形状を持つ不変集合やその分岐は、無限次元も含めた、高次元の力学系にも現れることが予想され、解析的な手法に替わる位相的手法、かつ計算機も援用する [1] や主論文のような力学系の現象の捉え方が将来一般性な手法となる事が期待される。このような大域的な分岐を位相的に解釈しなおし、その検証法を与える先駆けとなったことが、本研究の重要な貢献であるといえよう。

[1] Z. Arai, W. Kalies, H. Kokubu, K. Mischaikow, H. Oka and P. Pilarczyk, A database schema for the analysis of global dynamics of multiparameter systems, *SIAM J. Appl. Dyn. Sys.*, **8**(2009), no.3, 757–789.

以上により、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について平成 23 年 1 月 25 日に試問を行った結果、合格と認めた。