

氏 名	木 上 淳 き がみ じゅん
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	理 博 第 1089 号
学位授与の日付	昭 和 63 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理学研究科 数学専攻
学位論文題目	A Harmonic Calculus on the Sierpinski Spaces (シルピンスキー空間上の調和カルキュラス)

論文調査委員 (主 査) 教 授 山 口 昌 哉 教 授 池 部 晃 生 教 授 渡 辺 信 三

論 文 内 容 の 要 旨

申請者の論文はフラクタルの一種であるシルピンスキーガスケットを一般化したシルピンスキー空間上での調和関数、ラプラス作用素及びそれを用いたポアッソン方程式の解法を述べている。

シルピンスキーガスケットは正三角形から、その4分の1の正三角形を上下逆にしてはじめての正三角からとり、残った3つの正三角形から同じ操作で更に4分の1になった正三角形をぬくという操作を無限につづけた結果得られる閉集合であるが、これは2次元空間での2-単体からつくった一つの閉集合と見られる。このように考えるとN-単体から同様のものが得られると同時にN=1の場合には、一つの区間がそのように構成できる。そこでこのようなものをシルピンスキー空間とよぶことにする。

N=1の場合には、ラプラス作用素は通常の2階差分となるが、このとき、そのポアッソン方程式のデイリクレ問題については、畑と山口のマルチグリッド差分という方法が、この問題の解に新しい解釈を与えていた。そこで申請者は、上に述べたシルピンスキーガスケットは、通常の区間の概念を拡張したものに過ぎないという認識にもとづき、通常の微分が定義できないような一般のシルピンスキー空間にもこの考えを拡張することに成功したのである。マルチグリッド差分は、微分の代用として、無限個の差分方程式をつぎつぎと細くなるメッシュに対して同時に考えることであるが、シルピンスキーガスケットの例を見ても、その差分法を考察することは簡単ではない。申請者は、ガスケットの有理点に2種類あり、内点にあたるものとして、各段階で4つの近傍ノードをもつものと、2つの近傍ノードしかないもの（境界点）を区別し、この内点に対して、通常を中心差分に似た差分法を考案し、これを無限個用いることにより、シルピンスキー空間上の調和関数の概念に到達したものである。

この調和関数を用いて、区分的調和関数による連続関数の展開を用いることによってラプラス作用素を定義し、しかる後、ポアッソン方程式のデイリクレ問題の解を区間の場合と同様な方法によって与えた。これは、具体的な計算法をも与えるものである。申請者は、更に進んでこの空間上の関数について、境界上の法線微分にあたる量も定義し、空間上の関数のラプラシアンとこの量の関係である Gauss-Green の

定理が成立する条件と定理の証明とを与えている。これを用いることによりノイマン境界値問題も解けることとなる。要約すれば、解のなめらかさを除いて、ほとんどすべての二階楕円型作用素の性質をもつ、ラプラス作用素をこの複雑な空間上に定義し証明したことになる。参考論文1はカオス的力学系におけるインターミッテンシーの研究であり、2は、1次元力学系での例としての個体群のダイナミックスにおけるポピュレーションフラッシュのおこることの予告と力学系としての性質の関連性を述べている。3はフラクタルの生成に関する独自の原理と関数の本質的特異点および自然境界との関連を解明した。

論文審査の結果の要旨

申請者の論文はシルピンスキー空間とよばれる閉集合の上で、調和関数、ラプラス作用素等を定義し、更にこのラプラシアンによるポアッソン方程式の解の存在、一意性、これを解くアルゴリズムをディリクレ境界条件、ノイマン境界条件のもとで示したものである。

近年、物理学をはじめとする自然科学の諸分野でフラクタルとよばれる複雑な構造と集合が、たとえば不純物をいたるところに含む材料等のモデルとして考えられるようになって来た。特にシルピンスキー空間の一例であるシルピンスキーガasketはそのようにしばしば固体物理学者によって用いられて来ている。

そこで、このような集合上の微積分とは如何なるものかということが数学者に対して問いかけられているが、それに対する一つの答が申請者の論文である。上の空間は特別な場合として単なる区間を含むが、この場合には畑、山口の仕事が普通の微分法の別解釈としてマルチグリット差分法による定式化を与えている。申請者はこれを一般のシルピンスキー空間上に独特の洞察により拡張したものであり、学問上きわめて重要な考察である。

参考論文3篇はいずれもカオス、フラクタルについての独創的な研究である。

以上によって、この論文は理学博士の学位論文としての価値があると認めた。

なお主論文及び参考論文に報告されている研究業績を中心とし、これを関連した分野について試問した結果合格と認めた。