

Schrödinger 方程式の解の漸近挙動

東大・教養

北田 均
(Hitoshi Kitada)我々の問題は N -体 Schrödinger 方程式

$$(1) \quad \frac{1}{2i} \frac{du}{dt} + Hu = 0, \quad u(0) = f \quad \text{in } \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n),$$

$$(n = (N-1)\nu, \quad \nu \geq 3)$$

の解 $e^{-itH}f$ の $t \rightarrow \pm\infty$ での漸近挙動を調べることである。ここで H は N -体 Hamiltonian で

$$(2) \quad H = H_0 + V = H_0 + \sum_{\alpha} V_{\alpha}(x_{\alpha})$$

$$(H_0 \text{ は free Hamiltonian})$$

の形をしてゐる。 $\alpha = (i, j)$, $1 \leq i < j \leq N$ は pair で, V_{α} は pair potential と呼ばれる:

$$(3) \quad V_{\alpha}(x_{\alpha}) = V_{\alpha}(x_i - x_j) \quad (x_i, x_j \in \mathbb{R}^{\nu})$$

 x_i は i 番目の粒子の位置 vector である。 i 番目の粒子の質量を $m_i > 0$ と置く。 $\alpha = \{c_1, \dots, c_k\}$ に対して $\{1, \dots, N\}$ の cluster 分解とは,

$$(4) \quad \bigcup_{\ell=1}^k C_\ell = \{1, \dots, N\}, \quad C_\ell \cap C_j = \emptyset \ (i \neq j), \quad C_\ell \neq \emptyset$$

なること。 R^n の Jacobi 座標系 $x = (x_1, \dots, x_{N-1})$ は

$$(5) \quad x_{j+1} = y_{j+1} - \left(\sum_{i \leq j} m_i \right)^{-1} \left(\sum_{i \leq j} m_i x_i \right) \quad (j=1, \dots, N-1)$$

と定義される

cluster 分解 α に対応する Jacobi 座標系 $x = (y_\alpha, x^\alpha)$ は,

また各 cluster C_ℓ 内の Jacobi 座標系 $x^{(C_\ell)} = (x_1^{(C_\ell)}, \dots, x_{|C_\ell|-1}^{(C_\ell)})$

($|C_\ell|$ は set C_ℓ の元の個数) により, $x^\alpha = (x^{(C_1)}, \dots, x^{(C_{k+1})})$ とする

以下各 cluster C_ℓ の重心を一点と見て, この重心向きの Jacobi

座標系をとり, さらに $y_\alpha = (y_1, \dots, y_{|\alpha|-1})$ とし得る。この時

H_0 は

$$(6) \quad H_0 = -\frac{1}{2} \left(\sum_{\ell=1}^{|\alpha|-1} \frac{1}{M_\ell} \Delta_{y_\ell} + \sum_{\ell=1}^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{|C_\ell|-1} \frac{1}{\mu_i} \Delta_{x_i^{(C_\ell)}} \right)$$

と表わされる。但し, M_ℓ, μ_i は reduced mass,

$$R^n = R_{y_\alpha}^{v(|\alpha|-1)} \times R_{x^\alpha}^{v(N-|\alpha|)} \text{ の内積を } \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

$$(7) \quad \begin{aligned} &\langle (y_\alpha, x^\alpha), (y_\alpha, x^\alpha) \rangle \\ &= \sum_{\ell=1}^{|\alpha|-1} M_\ell y_\ell \cdot y_\ell + \sum_{\ell=1}^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{|C_\ell|-1} \mu_i x_i^{(C_\ell)} \cdot x_i^{(C_\ell)} \end{aligned}$$

と置く。 $x = (y_\alpha, x^\alpha)$ は conjugate な運動量と

$$(8) \quad q = (q_\alpha, p^\alpha)$$

$$\begin{cases} q_\alpha = (M_1^{-1} p_{y_1}, \dots, M_{|\alpha|-1}^{-1} p_{y_{|\alpha|-1}}) \\ p^\alpha = (\mu_1^{-1} p_{x_1^{(C_1)}}, \dots, \mu_{|C_{k+1}|-1}^{-1} p_{x_{|C_{k+1}|-1}^{(C_{k+1})}}) \end{cases}$$

と定義すると, H_0 は q, p の関数と表わす:

$$(9) \quad H_0 = -\frac{1}{2} \langle (q_\alpha, p^\alpha), (q_\alpha, p^\alpha) \rangle.$$

cluster 分解 a に於て,

$$(10) \quad A^a = \frac{1}{2} (\langle x^a, p^a \rangle + \langle p^a, x^a \rangle) = \frac{1}{2} (x^a \cdot D^a + D^a \cdot x^a)$$

とある。 $|a|=1$ のとき, $A^a \in A$ である。 A^a は $\mathcal{H}^a \equiv L^2(R_{x^a}^{(N-|a|)/2})$ の selfadjoint operator であり, $[H_0, A] = 2H_0$ である。

cluster 分解 a のとき cluster c_l, c_m の重心 z の位置 vectors $z_k, k=1, \dots, k_a, (k_a = \binom{k}{2}, k=|a|)$ である。

全 Hamiltonian H は

$$(11) \quad H = H_0 + V = H_0 + \sum_{\alpha} V_{\alpha} = H^a + T_a + I_a \\ \equiv (H_0^a + \sum_{\alpha \in a} V_{\alpha}) + T_a + I_a, \quad I_a = \sum_{\alpha \notin a} V_{\alpha}$$

と分解される。すなわち, $\alpha \in a$ は pair $\alpha = (i, j)$ の i, j が a の同一の cluster に属する z を表し, $\alpha \notin a$ は z の外を意味する。
 T_a は cluster a の free energy, H_0^a は cluster a の free energy である。

$P_a \in H^a$ の eigenprojection である。 $|a|=N$ のときは, $P_a = I$ である。

Lemma. $0 < \Lambda_0 < \infty$ とすると $\Lambda_0 > \theta_2 > \theta_3 > \dots > \theta_{N-1} > 0$

と θ_j は,

$$(12) \quad \tilde{f}_a(x) = \phi(|x|^2 < 2\theta_{|a|})^{1/2} \quad (|a|=2) \\ = \left\{ \phi(|x|^2 < 2\theta_{|a|}) \prod_{l=2}^{|a|-1} \left(1 - \sum_{|c|=l, a \in c} \phi(|x|^2 < 2\theta_{|c|}) \right) \right\}^{1/2} \quad (3 \leq |a| \leq N) \\ \leq 1 < 2,$$

$$(13) \quad \sum_{2 \leq |a| \leq N} \tilde{f}_a(x)^2 = 1 \quad \text{on } \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 > \Lambda_0\}.$$

従って, $\lambda_0 \gg \rho_2 \gg \rho_2 \gg \rho_3 \gg \rho_3 \gg \dots \gg \rho_{N-1} \gg \rho_N > 0$

なる ρ_j に対し, $|x|^2 > \lambda_0$ の時

$$(14) \sum_{2 \leq |a| \leq N} \tilde{f}_a(x)^2 \prod_{k=1}^{k_a} \phi(|q_k|^2 > \rho_{|a|}) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{2 \leq |a| \leq N} f_a(x)^2 = 1.$$

但し, $\phi(\lambda > \rho)$ は $\{\lambda | \lambda > \rho\}$ の滑らかな特異関数.

これは Sogut-Soffer [2] の Sect. 5 の phase space への 1 次元解の configuration space への対応を述べたものである。

結果を述べるための仮定を述べ:

仮定 I. $V_\alpha(x_\alpha) \in C^1(\mathbb{R}^d)$ で,

$$|V_\alpha(x_\alpha)| + |x_\alpha| V_\alpha(x_\alpha) \rightarrow 0 \quad (|x_\alpha| \rightarrow \infty).$$

仮定 II. i) $1 \leq |a| \leq N-1$ に対し, $p_a = \frac{L_a}{L_a} p_a^u$, $p_a^u f = (f, \varphi_a^u) \varphi_a^u$
 $(0 \leq L_a < \infty) \quad \| \varphi_a^u \| = 1$

ii) $\| |x_\alpha| p_a \| < \infty$, $2 \leq |a| \leq N-1$.

定理. $f \in \mathcal{D}(\langle \lambda \rangle) \cap \mathcal{D}(H)$ に対し, $\exists t_n \rightarrow \pm\infty$ なる列があり,

$$\lim_{\substack{\rho_1/\rho_j \rightarrow \infty \\ \rho_N \rightarrow \infty}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{2 \leq |a| \leq N} \left\| \left(\frac{y_a}{t_n} - f_a \right) f_a(x) e^{it_n H} f \right\|^2 = 0.$$

この定理は 状態 $f_a e^{it_n H} f$ 上では 運動量と座標が古典力学的対偶性を漸近的に満たすことを示す。これは Enss [1] の結果の一変形であり, 筆者が 1984 年に予想していたものである。

以下定理の証明: $t_n \rightarrow +\infty$ の時のことを示す。

$$(1) = \sum_{2 \leq |a| \leq N} \left\| \left(\frac{y_a}{t} - q_a \right) j'_a(x) e^{-itH} f \right\|^2$$

と表す。ここで $\exists T_n \rightarrow \infty, \exists x_n \rightarrow \infty$ なる列に對し、

$$\frac{1}{T_n} \int_{x_n}^{x_n+T_n} (1) dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を言えれば十分。この式は $x, T > 0$ に對し、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^{x+T} (1) dt \\ &= \sum_{2 \leq |a| \leq N} \frac{1}{T} \int_0^{x+T} \left(e^{itH} j'_a \left(\frac{y_a^2}{t^2} - \frac{1}{t} (\langle y_a, q_a \rangle + \langle q_a, y_a \rangle) + 2T_a \right) j'_a \right. \\ & \quad \left. \times e^{-itH} f, f \right) dt \end{aligned}$$

と表す。 $y_a^2 + (x_a)^2 = x^2$, $\frac{1}{2} (\langle y_a, q_a \rangle + \langle q_a, y_a \rangle) + A^2 = A$ に

注意して、 j'_a の support の性質より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^{x+T} (1) dt &= \sum_{2 \leq |a| \leq N} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^{x+T} \left(e^{itH} j'_a \left(\frac{x^2}{t^2} - \frac{2A}{t} + 2T_a \right) j'_a e^{-itH} f, f \right) dt \right. \\ & \quad \left. + O\left(\frac{\Theta_{|a|}}{x}\right) \right\} \\ &\equiv (2) + \textcircled{1}, \quad \textcircled{1} = \sum_{2 \leq |a| \leq N} O\left(\frac{\Theta_{|a|}}{x}\right) \end{aligned}$$

と表す。 $[j'_a, \frac{A}{t}] = O\left(\frac{1}{t \Theta_{|a|}}\right)$, $[j'_a, T_a] = O\left(\frac{1}{\Theta_{|a|}}\right)$ より、

$$\begin{aligned} (2) &= \sum \left\{ \frac{1}{T} \int_0^{x+T} \left(e^{itH} \left(\frac{x^2}{t^2} - \frac{2A}{t} + 2T_a \right) j'_a{}^2 e^{-itH} f, f \right) dt \right. \\ & \quad \left. + O\left(\frac{1}{\Theta_{|a|}}\right) \right\} \\ &= \sum \left\{ \frac{1}{T} \int_0^{x+T} \left(e^{itH} \left(\frac{x^2}{t^2} - \frac{2A}{t} + i[H, A] \right) j'_a{}^2 e^{-itH} f, f \right) dt \right. \\ & \quad \left. + O\left(\frac{1}{\Theta_{|a|}}\right) + \frac{1}{T} \int_0^{x+T} \left(e^{itH} (i[H^2, A^2] + i[T_a, A]) e^{-itH} f, f \right) dt \right\} \end{aligned}$$

$$\leq 2^{-1} \|U(I_{\alpha}, A) y_{\alpha}^2 (H+U)^{-1}\| = O_{\theta_{|\alpha|}}(1) \quad (\rightarrow 0 \text{ as } \theta_{|\alpha|} \rightarrow \infty) \quad \text{by 2,}$$

$$\sum_{2 \leq |\alpha| \in \mathbb{N}} y_{\alpha}^2 = 1 \text{ と仮定して 2,}$$

$$(2) = \frac{1}{T} \int_0^{0+T} (e^{itH} J(t) \bar{e}^{itH} f, f) dt$$

$$+ \sum_{2 \leq |\alpha| \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^{0+T} (e^{itH} U(I_{\alpha}, A) y_{\alpha}^2 \bar{e}^{itH} f, f) dt \right.$$

$$\left. + O_{\theta_{|\alpha|}}(1) \right\}$$

$$\stackrel{\textcircled{2}}{=} (4) + (5) + \sum O_{\theta_{|\alpha|}}(1).$$

$$\text{まず (4) を考えよう: } G(t) = e^{itH} U(I_{\alpha}, A) \bar{e}^{-itH} = \frac{d}{dt} e^{itH} A \bar{e}^{-itH}$$

(これは $\mathcal{S}(H)$ 上 t に付き一様有界) とおき,

$$H(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t \tau G(\tau) d\tau \quad (\text{これは } \mathcal{S}(H) \text{ 上一様有界})$$

と置く。このとき, 部分積分より,

$$\begin{aligned} tH'(t) &= G(t) - \frac{2}{t^2} \int_0^t \tau G(\tau) d\tau \\ &= G(t) - \frac{2}{t^2} \left\{ \left[\tau \int_0^{\tau} G(\sigma) d\sigma \right]_0^t - \int_0^t \int_0^{\tau} G(\sigma) d\sigma d\tau \right\} \\ &= G(t) - \frac{2}{t^2} \left\{ e^{itH} A \bar{e}^{-itH} - A \right\} + \frac{2}{t^2} \int_0^t e^{i\tau H} A \bar{e}^{i\tau H} d\tau \\ &= G(t) - e^{itH} \frac{2A}{t} \bar{e}^{-itH} + \frac{2A}{t^2} + \frac{1}{t^2} (e^{itH} \chi^2 \bar{e}^{-itH} - \chi^2) \\ &= e^{itH} J(t) \bar{e}^{-itH} + \left(\frac{2A}{t} - \frac{\chi^2}{t^2} \right). \end{aligned}$$

よって,

$$e^{itH} J(t) \bar{e}^{-itH} = tH'(t) + \left(\frac{\chi^2}{t^2} - \frac{2A}{t} \right).$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} (4) &= \frac{1}{T} \int_0^{0+T} t(H'(t) f, f) dt + \frac{1}{T} \int_0^{0+T} \left(\left(\frac{\chi^2}{t^2} - \frac{2A}{t} \right) f, f \right) dt \\ &= (4)' + O\left(\frac{1}{\infty}\right). \end{aligned}$$

ここから Enos [] にある Lemma が得られる:

Lemma. $h(t) \in C^1([0, \infty))$, bounded, $\lim_{t \rightarrow \infty} |h'(t)| = 0$

$\Rightarrow \forall T > 0, \exists \rho_n \rightarrow \infty$ s.t.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\rho_n}^{\rho_n+T} t h'(t) dt = 0.$$

これより, $\exists T_n \rightarrow \infty, \exists \rho_n \rightarrow \infty$ s.t.

$$④ \equiv (4) \Big|_{T=T_n, \rho=\rho_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が得られる。

次に (5) を考えよう:

$$(5) = \sum_{2 \leq |a| \leq N} \frac{1}{T} \int_{\rho}^{\rho+T} (e^{u+H} \iota(CH^a, A^a) g_a^2 \bar{e}^{u+H} f, f) dt,$$

$S > 0$: given $\epsilon \neq 0$, $\rho(t) = t - mS$ for $mS + \epsilon \leq t < (m+1)S + \epsilon$

($m=0, 1, 2, \dots$) とおく。すると, $m_0 = [T/S]$ (Gauss 記号) とおくと,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_{\rho}^{\rho+T} (e^{u+H} \iota(CH^a, A^a) g_a^2 \bar{e}^{u+H} f, f) dt \\ &= \frac{1}{T} \left\{ \int_{\rho}^{S+\epsilon} + \int_{m_0 S}^{\rho+T} + \sum_{m=1}^{m_0-1} \int_{mS+\epsilon}^{(m+1)S+\epsilon} \right\} (e^{u+\rho(t)+H} \iota(CH^a, A^a) g_a^2 \bar{e}^{-u+\rho(t)+H} \\ & \quad \times e^{-i'mSH} f, \bar{e}^{i'mSH} f) dt \end{aligned}$$

$$= O\left(\frac{S}{T}\right) + \frac{1}{m_0} \sum_{m=1}^{m_0-1} \frac{1}{S} \int_{\rho}^{\rho+S} (e^{u+\rho'H} \iota(CH^a, A^a) g_a^2 \bar{e}^{-u+\rho'H} f_m, f_m) d$$

と表す。ここで, $f_m = \bar{e}^{i'mSH} f$, である。

$$\equiv ⑤ + \frac{1}{m_0} \sum_{m=1}^{m_0-1} (6)$$

と書く。

(6) は

$$(6) = \frac{1}{S} \int_x^{x+S} (e^{i\lambda' H} i[CH^a, A^a] f_a^2 e^{-i\lambda' H} f_m, f_m) d\lambda'$$

であるが、固定した S に対し、 $x \leq \lambda' \leq x+S$ なる λ' について、

$$e^{i\lambda' H} = e^{i\lambda' H_a} + O_{\rho(a)}^S(1)$$

$$\text{すなわち } O_{\rho}^S(1) \rightarrow 0 \text{ (as } \rho \rightarrow \infty \text{ for each fixed } S > 0)$$

から、

$$(6) = \frac{1}{S} \int_x^{x+S} (e^{i\lambda' H_a} i[CH^a, A^a] f_a^2 e^{-i\lambda' H_a} f_m, f_m) d\lambda' + O_{\rho(a)}^S(1)$$

$$\equiv (7) + (6).$$

ここから次のようにする：

Lemma. $B(\lambda)$ は λ について norm 連続、一様有界 operator である。

$$i) \quad \left\| \frac{1}{S} \int_0^S B(\lambda) \phi(|\lambda^a| < \theta) (I - P_a) e^{-i\lambda H^a} (H^a + i)^{-1} d\lambda \right\| \rightarrow 0 \quad (\text{as } S \rightarrow \infty)$$

(RAGE-theorem)

$$ii) \quad \text{任意 } \theta > 0 \text{ に対し, } \|\phi(|\lambda^a| > \theta) P_a\| \rightarrow 0 \text{ (as } \theta \rightarrow \infty),$$

$$iii) \quad i), ii) \text{ より, } \forall \rho > 0 \text{ について一様に}$$

$$\left\| \frac{1}{S} \int_x^{x+S} B(\lambda') (\phi(|\lambda^a| < \theta) - P_a) e^{i\lambda' H^a} (H^a + i)^{-1} d\lambda' \right\|$$

$$= O_\theta(1) + O_S^\theta(1).$$

§ 2

$$(\eta) = \left(\frac{1}{S} \int_{\rho}^{\rho+S} e^{i\rho' H_a} i [CH^a, A^a] j_a^2 e^{-i\rho' H_a} (H^a + i)^{-1} d\rho' \right. \\ \left. \times (H^a + i)^{-1} f_m, f_m \right).$$

ここで $3 \leq |a| \leq N$ のとき $j_a^2(x)$ の定義式の第2の因子を,

$H_a = H^a + T_a$ の中の T_a の commutator $\times (T_a + i)^{-1}$ の operator norm の order は $O_{\rho|a|}(1)$ なのを、fixed $S > 0$ に対し

$$e^{i\rho' T_a} \{j_a^2(x) \text{ の第2因子} \} e^{-i\rho' T_a} = I + O_{\rho|a|}^S(1) \quad (\rho \leq \rho' \leq \rho+S)$$

となる。 j_a^2 の第1因子は T_a と可換に注意すれば、上の lemma の iii) より

$$(\eta) = \left(\frac{1}{S} \int_{\rho}^{\rho+S} e^{i\rho' H^a} i [CH^a, A^a] \{j_a^2 \text{ の第1因子} \} e^{-i\rho' H^a} (H^a + i)^{-1} d\rho' \right. \\ \left. \times (H^a + i)^{-1} f_m, f_m \right) \\ + O_{\rho|a|}^S(1) \quad (\equiv \textcircled{1} \text{ と表す}) \\ = \left(\frac{1}{S} \int_{\rho}^{\rho+S} e^{i\rho' H^a} i [CH^a, A^a] P_a e^{-i\rho' H^a} (H^a + i)^{-1} d\rho' \right. \\ \left. \times (H^a + i)^{-1} f_m, f_m \right) \\ + O_{\rho|a|}(1) + O_{S|a|}^{\Theta|a|}(1) + \textcircled{7}, \\ \quad \quad \quad \frac{\textcircled{7}}{\textcircled{8}}, \quad \frac{\textcircled{7}}{\textcircled{9}} \text{ と表す}$$

と 3 行、 $H^a P_a^u = \lambda_a^u P_a^u$ とすれば、

$$\frac{1}{S} \int_{\rho}^{\rho+S} e^{i\rho' H^a} i [CH^a, A^a] P_a^u e^{-i\rho' H^a} (H^a + i)^{-1} d\rho' \\ = \frac{1}{S} \int_{\rho}^{\rho+S} e^{i\rho' (H^a - \lambda_a^u)} i (H^a - \lambda_a^u) A^a P_a^u \times (H^a + i)^{-1} d\rho' \\ = \frac{1}{S} \left(e^{i(\rho+S)(H^a - \lambda_a^u)} - e^{i\rho(H^a - \lambda_a^u)} \right) A^a P_a^u (H^a + i)^{-1}.$$

$A^\alpha P_\alpha^U (H^\alpha + i)^{-1}$ は 仮定 II-ii) より bounded operator となる z , z は $S \rightarrow \infty + i\epsilon$, operator norm $z \rightarrow 0$ となる z

$$(7) = O\left(\frac{1}{S}\right) + \textcircled{7} + \textcircled{8} + \textcircled{9} \equiv \textcircled{10} + \textcircled{7} + \textcircled{8} + \textcircled{9},$$

以上まとめると,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T_n} \int_{x_n}^{x_n + T_n} (1) dt \\ &= \sum_{2 \leq |a| \leq N} \left\{ \overset{\textcircled{1}}{\downarrow} O\left(\frac{\theta_{|a|}}{x_n}\right) + \overset{\textcircled{2}}{\downarrow} O_{\theta_{|a|}}(1) + \overset{\textcircled{4}}{\downarrow} O_n(1) \right. \\ & \quad \overset{\textcircled{5}}{\downarrow} + O\left(\frac{S}{T_n}\right) + \overset{\textcircled{6}}{\downarrow} O_{\rho_{|a|}}^S(1) + \overset{\textcircled{7}}{\downarrow} O_{\rho_{|a|}}^S(1) \\ & \quad \left. + \overset{\textcircled{8}}{\downarrow} O_{\theta_{|a|}}(1) + \overset{\textcircled{9}}{\downarrow} O_S^{\theta_{|a|}}(1) + \overset{\textcircled{10}}{\downarrow} O\left(\frac{1}{S}\right) \right\}. \end{aligned}$$

$\forall \epsilon > 0$ given する。 $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$,

$$1^\circ \quad \exists \theta_{|a|}^0 > 1, \forall \theta_{|a|} > \theta_{|a|}^0 : \textcircled{3} + \textcircled{8} < \epsilon,$$

$$2^\circ \quad \forall \theta_{|a|} > \theta_{|a|}^0, \exists S > 1 : \textcircled{9} + \textcircled{10} < \epsilon,$$

$$3^\circ \quad \exists \rho_{|a|}^0 > \theta_{|a|}, \forall \rho_{|a|} > \rho_{|a|}^0 : \textcircled{6} + \textcircled{7} < \epsilon,$$

$$4^\circ \quad \exists n_0 > 1, \forall n > n_0 : \textcircled{1} + \textcircled{4} + \textcircled{5} < \epsilon,$$

と出来る z , 定理が成り立つ。 $\square$

以上の結果, または, Enno [1] の結果を使うと下の段階Ⅲを
付け加えたとし, N -体波動作用素

$$W_a^\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{itH_a} p_a$$

の完全性:

$$\bigoplus_{2 \leq |a| \leq N} \mathcal{R}(W_a^\pm) = \mathcal{H}^c(H) = \mathcal{H}^{ac}(H)$$

が成り立つ。但し, $\mathcal{H}^c(H)$, $\mathcal{H}^{ac}(H)$ は H の連続, 及び, 絶対連続
部分空間。

仮定Ⅳ. $V_\alpha(x_\alpha)$ は $C^2(\mathbb{R}^N)$ -関数で, $\exists \varepsilon > 0, \exists C_0 > 0$ に対し,

$$|V_\alpha(x_\alpha)| \leq C_0 (1 + |x_\alpha|)^{1-\varepsilon}, \quad |(x_\alpha, D_{x_\alpha})^2 V_\alpha(x_\alpha)| \leq C_0,$$

$$(*) \quad x_\alpha \cdot D_{x_\alpha} V_\alpha(x_\alpha) + 2V_\alpha(x_\alpha) \geq 0.$$

この研究をした初期の段階では (*) はなしで完全性が
成り立つことを証明できたと思ふ。だが, W. Hunziker の学生
Giles Graf, 及び, 中村 周氏 より, その時の key lemma は
成り立たないのではなかろうかとの疑問が寄せられた。この段階で
確実にいえるのは, (*) の条件をつければ 完全性は成り立つ
ということである。

文

南大

- [1] V. Enss, Introduction to asymptotic observables for multi-particle quantum scattering, In Schrödinger Operators, Aarhus 1985, ed. E. Balslev, Lect. Notes in Math., 1218, Springer-Verlag, 1986, pp. 61-92.
- [2] I. M. Sigal, A. Soffer, The N -particle scattering problem: Asymptotic completeness for short-range systems, Ann. Math., 126 (1987), 35-108.