

# Braided Thompson 群の divergence function について

東京都立大学大学院 理学研究科 児玉悠弥

Yuya Kodama

Graduate School of Science,  
Tokyo Metropolitan University

## 概要

有限生成無限群に対して, その“無限遠での繋がり”を表す関数を divergence function という. 幾何学的群論における主要な研究対象の 1 つである Thompson 群  $F, T, V$  に対して, それらの divergence function が論文 [10] で計算された. 本稿では, 論文 [11] に基づき, Thompson 群  $V$  の亜種の 1 つである  $BV$  に対して divergence function を計算した結果を紹介する.

## 1 Braided Thompson 群 $BV$ と Thompson 群 $V$

Thompson 群  $V$  の各元は, 2 つの 2 分木と, 一つの対称群の元を用いて表される. Brin [2] と Dehornoy [7] はそれぞれ独自に,  $V$  の一般化として braided Thompson 群  $BV$  を定義した. 各元は, 対称群の元の部分をブレイド群の元に置き換えることで与えられる.

以下, 2 分木とは有限無向グラフで, 次数が 2 の頂点 (根) が 1 つ, 次数が 1 の頂点 (葉) が 2 つ以上, 次数が 3 の頂点が 0 個以上であるものとする. 特に, 根と 2 つの葉のみからなる 2 分木を **caret** という.

$T_+, T_-$  を葉の数が  $n$  である 2 分木とし,  $x$  をブレイド群  $B_n$  の元とする.  $B_n$  は,  $n$  本の紐を用いて各元が表される群であり, 各紐の向きは下から上とする. このとき,  $T_+$  の  $n$  個の葉と  $T_-$  の  $n$  個の葉を,  $x$  を用いて下からこの順番でつなぐことを考える. 例えば, 図 1 は  $n = 3$  のときの図. このような 3 つ組  $(T_+, x, T_-)$  を, **tree-braid-tree diagram** という.

$BV$  の元を定義するために, tree-braid-tree diagram に関する操作を定義する.  $(T_+, x, T_-)$  を, 次の 2 つを満たす tree-braid-tree diagram とする.

1.  $x$  にある 2 本の紐が存在して, 対応する  $T_+, T_-$  内のそれぞれの葉が共通の親をもつ.
2. その 2 本の紐が並行.

例えば, 図 2 は条件を満たす tree-braid-tree diagram である. そのような tree-braid-tree diagram から, その 2 本の紐と, 葉と共通の親からなる 2 つの caret を取り除き, 残った葉を元の紐と同じように結ぶことで, 新たな tree-braid-tree diagram を得ることができる. この操作を **reduction** といい, その逆の操作を **splitting** という. これ以上 reduce できない tree-braid-tree diagram のことを **reduced diagram** という.

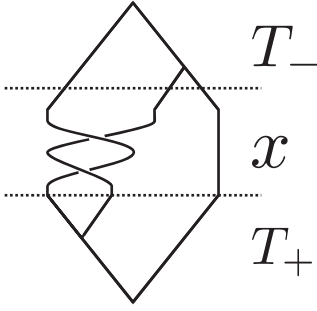


図 1: tree-braid-tree diagram の例.

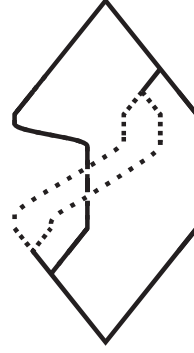
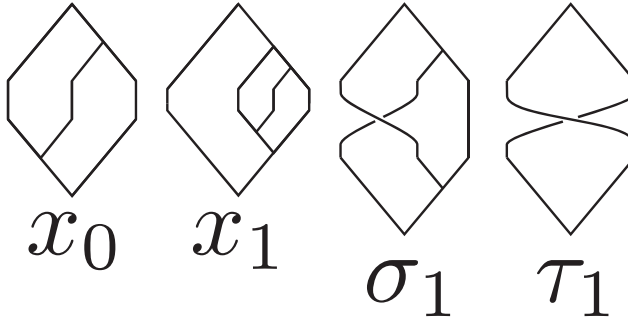


図 2: 条件を満たす例.

図 3:  $BV$  の生成集合.

$BV$  は tree-braid-tree diagram 全体からなる集合のうち, reduction と splitting で得られるものを全て同一視した群である. 演算は次で定める.

$a = (A_+, x_a, A_-)$ ,  $b = (B_+, x_b, B_-)$  をそれぞれ tree-braid-tree diagram とする. reduction や splitting を適切に行うことで,  $A'_- = B'_+$  を満たす tree-braid-tree diagram  $(A'_+, x'_a, A'_-)$ ,  $(B'_+, x'_b, B'_-)$  をそれぞれ得ることができる. このとき,

$$ab := (A'_+, x'_a x'_b, B'_-)$$

と定める. ここで,  $x'_a x'_b$  はブレイド群の元としての演算を表す.  $A'_- = B'_+$  という条件より全ての 2 分木の葉の数は等しいので, この演算は well-defined である.

$BV$  は,  $x_0, x_1, \sigma_1, \tau_1$  と表される 4 つの元で生成される有限表示を持つ群であることが知られている [1, Theorem 3.1]. 図 3 は各生成元を表す tree-braid-tree diagram である. 以降, 生成集合は固定する.

$BV$  の元  $g$  に対して, その reduced diagram の caret の個数を  $N(g)$ , ブレイドの部分の最小の交点の数を  $K(g)$ , word length を  $|g|$  としたとき, ある定数  $C_1, C_2 > 0$  が存在して次の不等式が成り立つ [3, Theorem 3.6].

$$C_1 N(g) \leq |g| \leq C_2 N(g)(1 + K(g)). \quad (1)$$

$g$  を表す最短の word を考えたとき, 各演算において caret は高々3個しか増えないことから前半の不等式は容易に従う.

各ブレイド群  $B_n$  には, 対称群  $S_n$  への自然な全射準同型  $\phi_n$  が存在する. tree-braid-tree diagram の braid  $x$  を  $\phi_n(x)$  に置き換えて得られる diagram を, **tree-permutation-tree diagram** という.  $BV$  と同様に, tree-permutation-tree diagram に関する操作を定義する. すなわち,

1.  $T_+$  にある  $i, i+1$  番目の葉が存在して, それらは  $T_+$  内で共通の親をもち,  $\phi_n(x)(i), \phi_n(x)(i+1)$  も  $T_-$  内で同じ親をもつ.
2.  $\phi_n(x)(i+1) = \phi_n(x)(i) + 1$  が成り立つ.

を満たす tree-permutation-tree diagram  $(T_+, \phi_n(x), T_-)$  に対して, 同様の手法で reduction と splitting を定める. これらの操作で得られる tree-permutation-tree diagram を全て同一視することで, Thompson 群  $V$  の元が得られる.

tree-permutation-tree diagram における対称群の部分を巡回群に制限することで,  $V$  の部分群が得られる. この群を Thompson 群  $T$  という. さらに, 巡回群の部分を恒等写像に制限することで得られる部分群を Thompson 群  $F$  という. 恒等写像とブレイド群の単位元を同一視することで,  $F$  は  $BV$  の部分群でもあることがわかる.  $F$  は  $x_0, x_1$  が生成する群と同型である.

3つの群  $F, T, V$  はそれぞれ有限表示群である [6, Theorem 3.4, Corollary 5.9, Theorem 6.9]. それぞれの標準的な有限生成集合  $A, B, C$  に対して  $|g|_A, |g|_B, |g|_C$  はその word length を表すとし,  $N(g)$  は再び reduced diagram の caret の個数を表すとする. ある定数  $C_1, C_2 > 0$  が存在して次の不等式が成り立つ. 1行目の後半の不等式は [4, Theorem 3] より従い, 2行目の後半の不等式は [5, Theorem 5.1] より従う. それぞれの前半の不等式は  $BV$  の場合と全く同じ証明を適用すればよい.

$$C_1 N(g) \leq |g|_A \leq C_2 N(g), g \in F. \quad (2)$$

$$C_1 N(g) \leq |g|_B \leq C_2 N(g), g \in T. \quad (3)$$

$$C_1 N(g) \leq |g|_C, g \in V. \quad (4)$$

第3節では, 上述した4種類の不等式を用いて道の長さを word length で評価する方法について解説する.

## 2 divergence function

非負実数  $\mathbb{R}_+$  からそれ自身への写像  $f, g$  が  $f \preceq g$  であるとは, ある定数  $A, B, C, D, E \geq 0$  が存在して, 任意の  $x \in \mathbb{R}_+$  に対して

$$f(x) \leq Ag(Bx + C) + Dx + E$$

が成り立つときをいう. 写像  $f$  と  $g$  が同値であるとは,  $f \preceq g$  と  $g \preceq f$  が共に成り立つときをいう. 定義から明らかに, 全ての線形写像や定値写像は同値である.

有限生成群  $G$  と適当な生成集合  $S$  から定まるケイリーグラフを  $\text{Cay}(G, S)$  と表す.  $\delta \in (0, 1)$  に対して,  $\text{Cay}(G, S)$  の  $\delta$ -divergence function  $f_\delta$  を次のように定める.  $\text{Cay}(G, S)$  上の word length が  $n$  である 2 点  $x, y$  を, 原点中心半径  $\delta n$  の球を避けて道で結ぶ. その道の長さの最小値を  $\ell_\delta(x, y)$  としたとき,

$$f_\delta(n) := \max\{\ell_\delta(x, y) \mid |x|, |y| = n\},$$

と定める. そのような道が存在しないときは,  $\ell_\delta(x, y) = \infty$  と定める.

ある  $\delta$  が存在して  $\text{Cay}(G, S)$  の  $\delta$ -divergence function が線形写像と同値であるとする. このとき,  $G$  の別の生成集合  $S'$  から定めるケイリーグラフ  $\text{Cay}(G, S')$  に対して  $\delta'$  が存在して,  $f_{\delta'}$  は線形写像と同値である [9, Proposition 2.1]. すなわち, ある  $\delta$  が存在して  $\delta$ -divergence function が線形写像と同値であるという性質は, 群の性質とみなすことができる. このことを, 群  $G$  は **linear divergence をもつ** という.

有限生成群が linear divergence をもつという性質に対して, 次のような幾何学的な性質が対応することが知られている.

**Theorem 2.1** ([8, Lemma 3.17])  $G$  のどの *asymptotic cone* も *cut point* をもたないことと,  $G$  が *linear divergence* をもつことは同値.

### 3 主結果

次が本稿における主結果である.

**Theorem 3.1** ([11, Theorem 1.1])  $BV$  は *linear divergence* をもつ.

この定理は, 以下の議論によって示される.  $BV$  の  $\delta$ -divergence function を  $f_\delta$  とする. 同値関係の定義から, ある  $\delta$  に対して定数  $A, B$  が存在して,  $f_\delta(n) \leq 2(An + B)$  であることを示せば十分である. これを示すために, word length が  $n$  である任意の元  $g$  と,  $n$  にのみ依存して定まる元が半径  $\delta n$  球の外を通る長さ  $An + B$  以下の道で結べることを示す.

Golan-Sapir は, Thompson 群  $F, T, V$  が全て linear divergence をもつことを, 上述した方法で示した [10, Theorem 1.1].

[10] では, 5 つの道  $w_1, \dots, w_5$  を構成して, それをつなげたものが条件を満たす道であることを示している. 特に, Thompson 群  $V$  は  $BV$  によく似た群であるので,  $w_1, w_2, w_4, w_5$  は  $BV$  においても同様に 5 つの道を構成し, ほとんど同じ議論を適用することができるが,  $w_3$  は例外である. なぜなら, Thompson 群  $T$  における word length の上からの評価の対応物が  $BV$  に知られていないため,  $w_3$  の長さを上から評価する術がないからである. 従って,  $BV$  が linear divergence をもつことを証明する際,  $w_3$  に関する部分が最も本質的であるといえる. 以下, Golan-Sapir による  $V$  における  $w_3$  の定義とその長さの計算方法を述べた後に,  $BV$  における  $w_3$  を新たに定義し, その長さの計算方法について解説する.  $w_1$  はどちらの場合も空語もしくは  $x_0^2 x_1^{-1} x_0^{-1}$  であるが, 本稿ではその詳細は述べない.

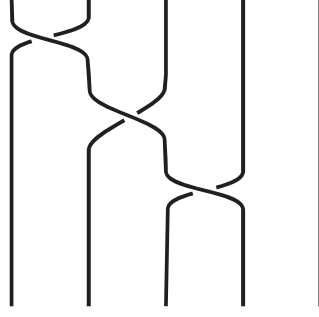


図 4:  $w_3$  が表す tree-braid-tree diagram における  $b_3$  の例.

### 3.1 $V$ の場合

$w_3$  は  $gw_1$  から構成される.  $gw_1$  を表す 2 分木の組を  $T_+, T_-$  とする.  $T_+$  の一番左の葉が,  $T_-$  における  $k$  番目の葉に対応するとする. このとき,  $w_3$  を次のように定める. 2 つの 2 分木を,  $T_-$  と  $T_+$ , つまり  $gw_1$  と入れ替えたものとし, 置換を  $k$  番目が一番左の葉に対応する巡回置換とする. こうして得られる tree-permutation-tree diagram を表す最短の word を  $w_3$  とする. 置換が巡回置換であるので, 不等式 3 より  $w_3$  の長さは高々  $C_2 N(gw_1)$  である.

この評価を用いると,  $w_3$  の長さは高々  $|g|$  の定数倍であることを示すことができる. 実際 [10, Lemma 2.8] より  $N(gw_1)$  は  $N(g) + 2$  で上から評価でき, さらに  $N(g)$  は不等式 4 より  $|g|_C / C_1 = n / C_1$  で上から評価できる.

### 3.2 $BV$ の場合

$BV$  の場合に同様の方法で  $w_3$  を構成すると, 不等式 1 では  $N(gw_1)$  の定数倍による  $w_3$  の長さの上から評価が与えられない可能性があるので,  $n$  の定数倍で上から評価することは難しいことがわかる.

そこで,  $w_3$  を次のように定義する. 2 つの 2 分木は  $V$  と同様に定め,  $k$  を葉の行き先に対応する値とする.  $k > 0$  のときのブレイド群の元  $b_3$  は次のように定める.

1.  $k$  番目より右の紐は全て恒等的に対応させる.
2.  $k - 1, \dots, 0$  番目の紐は, この順番で  $k$  番目の紐と一回ずつ交差させる.

$k = 0$  のときは, 単位元とする. 図 4 は,  $k = 3, N(gw_1) = 4$  のときの  $b_3$  の例.  $w_3$  は, この tree-braid-tree diagram  $(T_-, b_3, T_+)$  を表す最短の word と定める.

$T$  を, caret を一番右の葉につけ続けることで得られる,  $T_-$  と caret の数が等しい 2 分木とする (このような 2 分木を **all-right tree** と呼ぶ).  $w_3$  は  $(T_-, b_3, T_+)$  を表す最短の word であることと,

$$(T_-, b_3, T_+) = (T_-, \text{id}, T)(T, b_3, T)(T, \text{id}, T_+)$$

と分解できることより, それぞれを表す word を上から  $N(gw_1)$  で評価すればよい. 1 つ目と 3 つ目は  $F$  の元とみなせるので, 不等式 2 より  $N(gw_1)$  の定数倍で上から評価することができる.

$(T, b_3, T)$  を表す word の長さの評価を与えるために,  $BV$  の標準的な無限生成集合の元について簡単に述べる.  $\sigma_2 := x_0^{-1}\sigma_1x_1\sigma_1^{-1}$  とし,  $i \geq 2$  に対して  $\sigma_i := x_0^{-(i-2)}\sigma_2x_0^{i-2}$  とする. このとき各  $i \geq 1$  に対して  $\sigma_i$  は, caret の数が  $i+1$  個の all-right tree 2 つと, 右から数えて 1 本目と 2 本目だけが一度交差する tree-braid-tree diagram で表される元となる [1, Theorem 2.4]. なお, ここでは, 一番右の紐を 0 本目として数えている.

また,  $\tau_2 := \sigma_1^{-1}\tau_1x_0$  とし,  $j \geq 2$  に対して  $\tau_j := x_0^{-(j-2)}\tau_2x_0^{j-2}$  とする. このとき各  $j \geq 1$  に対して  $\tau_j$  は, caret の数が  $j$  個の all-right tree 2 つと, 右から数えて 0 本目と 1 本目だけが一度交差する tree-braid-tree diagram で表される元となる [1, Theorem 2.4].

$b_3$  の定義と  $\sigma_i, \tau_j$  を表す tree-braid-tree diagram の性質より,  $k = N(gw_1)$  のとき, すなわち  $gw_1$  において一番左の葉が一番右の葉に対応している場合には,

$$(T, b_3, T) = \tau_{N(gw_1)}\sigma_{N(gw_1)-1} \cdots \sigma_1,$$

$0 < k < N(gw_1)$  の場合には,

$$(T, b_3, T) = \sigma_k \cdots \sigma_1,$$

$k = 0$  の場合には  $(T, b_3, T) = \text{id}$  と表すことができる. いずれの場合も直接計算によって, 語の長さは高々  $2N(gw_1)$  であることが確かめられる. 従って,  $V$  の場合と同様の手法で,  $n$  の定数倍による上からの評価を得ることができる.

## 参考文献

- [1] T. Brady, J. Burillo, S. Cleary, and M. Stein, *Pure braid subgroups of braided Thompson's groups*, Publicacions matemàtiques **52** (2008), no. 1, 57–89.
- [2] M. G. Brin, *The algebra of strand splitting. I. A braided version of Thompson's group V*, Journal of Group Theory **10** (2007), no. 6, 757–788.
- [3] J. Burillo and S. Cleary, *Metric properties of braided Thompson's groups*, Indiana University mathematics journal **58** (2009), no. 2, 605–615.
- [4] J. Burillo, S. Cleary, and M. Stein, *Metrics and embeddings of generalizations of Thompson's group F*, Transactions of the American Mathematical Society **353** (2001), no. 4, 1677–1689.
- [5] J. Burillo, S. Cleary, M. Stein, and J. Taback, *Combinatorial and metric properties of Thompson's group T*, Transactions of the American Mathematical Society **361** (2009), no. 2, 631–652.
- [6] J. W. Cannon, W. J. Floyd, and W. R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, Enseignement Mathématique **42** (1996), 215–256.
- [7] P. Dehornoy, *The group of parenthesized braids*, Advances in Mathematics **205** (2006), no. 2, 354–409.
- [8] C. Druţu, S. Mozes, and M. Sapir, *Divergence in lattices in semisimple Lie groups and graphs of groups*, Transactions of the American Mathematical Society **362** (2010), no. 5, 2451–2505.
- [9] S. M. Gersten, *Quadratic divergence of geodesics in CAT(0) spaces*, Geometric & Functional Analysis GAFA **4** (1994), no. 1, 37–51.

- [10] G. Golan and M. Sapir, *Divergence functions of Thompson groups*, Geometriae Dedicata **201** (2019), no. 1, 227–242.
- [11] Y. Kodama, *Divergence function of the braided Thompson group*, to appear in Kyoto Journal of Mathematics, arXiv:2012.03785 (2020).