

情報量規準による回帰モデルの選択

千葉大(理) 橋本 明浩 (理) 本多 正幸
(工) 井上 隆勝 (理) 田栗 正章

はじめに 近年様々な分野で各種の情報量規準(以下IC)が使用されかなりの効果をあげている。ところがこのICのふるまいについてある程度考察が行なわれているものもあるが未知なものも多い。そこで線形重回帰モデルを対象としてICを用いるモデル選択(即ち重回帰分析に於ける変数選択)の数値実験を行ないその性質を数値的に検証するとともに理論的な考察をも加える。

2. 評価の方式 本来各ICはそれ固有の目的のために提案された統計量であって単に重回帰モデルの選択に際して一律にICを使用することは十分留意しなければならない。しかし一応我々はこの問題に以下のICを用いることにする。更にこの場合各ICに対して仮説検定と予測という2つの観点からの評価が存在する。従って一概に良悪は判定できないが与えられた評価方式下ではどのICがどの条件下でbetterであ

るかは議論することはできよう。そこで本報告では仮説検定の一観点として、各ICを用いてモデルの選択を行なった際に真のモデルを採択した割合（以下の中率）を評価基準とした。

§3. 実験方法

3-1 考察の対象とするモデル

線形回帰モデル; $Y = X_{\theta} \beta_{\theta} + \varepsilon \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_{nm})$

$$\text{但し} \quad Y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{1m} \\ y_{n1} \\ y_{nm} \end{bmatrix} \quad X_{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{q1} \\ 1 & x_{1m} & \dots & x_{qm} \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nq} \\ 1 & x_{nm} & \dots & x_{qn} \end{bmatrix} \quad \beta_{\theta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_q \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{1m} \\ \varepsilon_{n1} \\ \varepsilon_{nm} \end{bmatrix}$$

n : 異なるサンプル点数

m : 各サンプル点での繰返し数

3-2 対象とするIC

1 CP0; $CP0 = RSS_p / \sigma^2 + 2p - N$

2 CP1; $CP1 = RSS_p / \hat{\sigma}_q^2 + 2p - N$

3 AIC^{*(2)}; $AIC = N \log RSS_p + 2p$

4 CAI^{*(3)}; $c\text{-AIC} = N \log RSS_p + \frac{2N(p+1)}{N-p-2}$

5 HAI; $H\text{-AIC} = N \log RSS_p + \frac{2\hat{\sigma}^2}{RSS_p/N}$

6 BIC^{*(4)}; $BIC = N \log RSS_p + p \log N$

7 TIC^{*(5)}; $TIC = \frac{1}{N} Y^t (I_N - Q_p) Y +$

8 FST; $F = \frac{Y^t Q_p Y / p}{Y^t (I_N - Q_p) Y / (N-p)}$

$2 \operatorname{tr} [(\frac{1}{N} X_p^t X_p)^{-1} S_p]$

9 PSS^{*(6)}; $PSS = \sum_{\alpha=1}^N \{ (y_{\alpha} - \hat{y}_{\alpha}) / (1 - c_{\alpha}) \}^2$

c_{α} : α -th diag. of Q_p

ただし $Q_p = X_p (X_p^t X_p)^{-1} X_p^t \quad N = m n$

$RSS_p = Y^t (I_N - Q_p) Y, \quad \hat{\sigma}_p^2 = RSS_p / (N-p) \quad \hat{\sigma}^2 = \begin{cases} \hat{\sigma}_q^2 & (m=1) \\ \sum_{i,j} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 / (m-1)n \end{cases}$

$S_p = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (y_{\alpha} x_{i\alpha} - \bar{y}_i \bar{x}_i) (y_{\alpha} x_{j\alpha} - \bar{y}_i \bar{x}_j)^2 \quad (i,j=1,\dots,p)$

* (1); Mallows [2], (2) Akaike [1], (3) Sugiyama [5], (4) Schwarz [4]

(5); Taga [6] (6) Okuno [3]

3-3 対象とするモデル(仮説)

$$TQ = 4$$

$X_0 X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$	$X_0 X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$	【例】
H(1): 1 0 0 0 0 0	H(2): 1 1 0 0 0 0	H(3) は X_0, X_1 をと
H(3): 1 0 1 0 0 0	H(4): 1 1 1 0 0 0	りこんだモデル;
H(5): 1 0 0 1 0 0	H(6): 1 1 0 1 0 0	$y = \beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$
H(7): 1 0 1 1 0 0	*H(8): 1 1 1 1 0 0	を示す。
H(9): 1 1 1 1 1 0	H(10): 1 1 1 1 0 1	
H(11): 1 1 1 1 1 1	(TQ: 真のモデルの変数の数)	

【註】 1. H(8) 以降は真のモデルを含むモデルを考察する。

2. 各モデルごとのICの値を計算し最小(Fは最大)値を与えるモデルを選択する。

3-4 実験したケース

① $m=1, 4$ ② $n=32$ ③ $TQ = 4, (3)$ $q = 6$

④ $\sigma^2 = 1.0, 0.25, 0.01$ ⑤ $\beta^t = (1, \dots, 1)$

⑥ X ; ($\rho = 0.9, 0.3$) $X^t X = \begin{bmatrix} nm & 0 \\ 0 & \text{斜線部分} \end{bmatrix}$ の斜線部分について以下 $X_{11} \sim X_{82}$ の15通り + 4通り

$$TQ=4$$

$$\begin{aligned}
 X_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} & X_{21} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \rho \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \rho & & & 1 \end{bmatrix} & X_{31} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \rho \end{bmatrix} & X_{41} &= \begin{bmatrix} 1 & & & 0.3 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0.3 & & & \rho \end{bmatrix} \\
 X_{51} &= \begin{bmatrix} 1 & \rho & & \\ \rho & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} & X_{61} &= \begin{bmatrix} 1 & \rho & & 0.3 \\ \rho & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0.3 & & & 1 \end{bmatrix} & X_{71} &= \begin{bmatrix} 1 & \rho & & \\ \rho & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \rho \end{bmatrix} & X_{81} &= \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix} \\
 X_{52} &= \begin{bmatrix} 1 & \rho & & \\ \rho & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} & X_{62} &= \begin{bmatrix} 1 & \rho & & 0.3 \\ \rho & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0.3 & & & 1 \end{bmatrix} & X_{72} &= \begin{bmatrix} 1 & \rho & & \\ \rho & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \rho \end{bmatrix} & X_{82} &= \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & & 0.3 \\ 0.3 & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0.3 & & & \rho \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

X直交 (TQ=3)

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

X非直交 (TQ=3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.95 & & \\ 0.95 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

X直交 (TQ=4)

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

X非直交 (TQ=4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.95 & & \\ 0.95 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

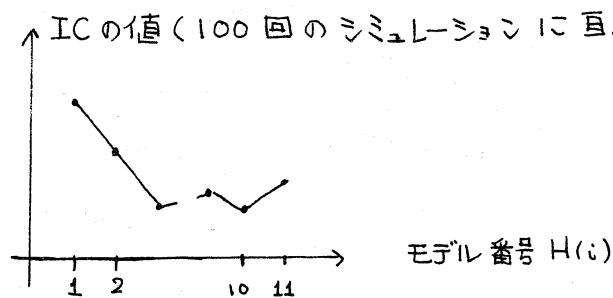
$$X_{82} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & & 0.3 \\ 0.3 & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0.3 & & & \rho \end{bmatrix}$$

上各ケースについて100回のシミュレーションを行なう。

§4 結果と考察

4-1 モデルの変化に対する IC の値の変化

100 回のシミュレーションに亘る各モデルごとの IC の平均を y 軸にモデル番号を x 軸にとると次のようなグラフ(パス)が得られる。



このパスについて次のことが報告できる。

- ① $X^t X$ の変化に対して上記パスは本来 $X_{11} \sim X_{82}$ の 15 通りになるはずであるが、TIC を除いて次の 4 通りに分かれる。

A タイプ; $X_{11} \sim X_{41}, X_{22} \sim X_{42}$ の 7 通り

B タイプ; X_{51}, X_{61}, X_{71} ($\rho = 0.9$) の 3 通り

C タイプ; $X_{52}, X_{62}, X_{72}, X_{82}$ ($\rho = 0.3$) の 4 通り

D タイプ; X_{81} の 1 通り

▶ 理由; CP_0 を例にと、て考えれば

$$CP_0 = X^2'(N-p, \lambda^2) + 2p - N$$

ここに $X^2'(N-p, \lambda^2)$ は自由度 $N-p$, 非心度 λ^2 の非心カイニ乗変数で $\lambda^2 = \beta_{TQ}^t X_{TQ}^t (I_N - Q_p) X_{TQ} \beta_{TQ} / \sigma^2 = \begin{cases} 0 & (P \geq TQ) \\ X_{TQ} \text{ のみ依存} & (P < TQ) \end{cases}$

である。従、て $H(i)$ の作り方より X_{TQ} にのみ依存する。

② m と σ^2 に対する変化について

- m の変化に対して、グラフ上のパスはほとんど不変である。

▷ 理由 1 例として AIC で考えれば、 $m=1$ での AIC は

$$AIC = n \log RSS_p + 2p \quad \text{また } m=4 \text{ では}$$

$$AIC \doteq 4n \log 4RSS_p + 2p = 4n \log RSS_p + 2p + 8n \log 2$$

故に、 $m=4$ の AIC は $m=1$ の AIC のほぼ一次式であるから Auto-Scaling の為にグラフ的には、ほとんど重なってしまう。

- σ^2 に対しても概形は類似している。

▷ 理由 今 $E\{\chi^2(N-p, \lambda^2)\} = N-p + \lambda^2$ であるから

$$E\{CPO(\sigma^2=1)\} = \lambda^2 + p, \quad E\{CPO(\sigma^2=0.01)\} = 100\lambda^2 + p$$

また $p \ll \lambda^2$ により、上と同種の議論となる。

(特に CPO, CP1, PSS は類似度が高い。)

③ IC に対して 4 種類のタイプ;

㊶ CPO, CP1, PSS のように RSS をもとにした形、

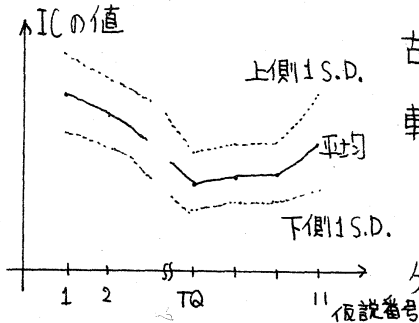
㊷ AIC, CAI, BIC, HAI のように $N \log RSS$ をもとにした形
とそれ以外の ㊸ FST ㊹ TIC と 分かれる。

▷ 理由 $+2p$ 部分が第 1 項に比べて小さい 為である。

④ パスのふらつきが、TQ をこえたところで AIC, CPO, etc
では生じる。これが的中率を下げているようである。

▷ 理由 例えば TQ をこえた CPO について $V\{CPO\} = 2(N-p)$

である。従ってCPOは $\sqrt{N}$ のオーダーで変化することになる。



故に、定数部 + 2p の寄与があまり比較する際にきかなくなるからである。

またTQをこえた平均パスの傾きと

分散について実験的に次が成立してい

ることがわかった。

	AIC	PSS	TIC
傾き	ゆるやか	ゆるやか	急
分散	大	小	大

4-2 的中率について (付表I, II)

概括として No.2 X51~X81 ($m=1$, 相関: 大の: 大) という条件の良くない場合に於いては、どのICも的中率は低くなっている。

・ また各IC別に次のことがわかった。

4-2-1 CPO, CP1, AIC, CAI, HAI, BIC について.

- ① BIC はサンプル数が増えるとのち中率は高くなるが、他のICでは逆に下ることもある。

▷理由 $P_1 \triangleq P_1$ { 真のモデルを含むモデルを選択 }

$P_2 \triangleq P_2$ { に含まれるモデルを選択 }

とし、BICについてこれを評価してやれば、 $N \rightarrow \infty$ のとき

$P_1 \rightarrow 0$, $P_2 \rightarrow 0$ となることがわかる。即ち、BIC による選択は一貫性を有している。

② 真のモデルを含むモデルを選択し、真のモデルに含まれるモデルを選択することは No.2 X51~X81を除き極めて少ない。

▷ 理由 例えば CP1, X11 で $r_i \leq P_i\{H(i)\}$ を選択}とすると

$N \rightarrow \infty$ のとき (TQ = 4)

$$r_i \rightarrow 0 \quad (i < 8) \quad r_8 \rightarrow \alpha^2 \doteq 0.71 \quad r_i \rightarrow \alpha(1-\alpha) \doteq 0.13 \quad (i=9, 10) \\ r_{11} \rightarrow (1-\alpha)^2 \doteq 0.025 \quad (\text{但し } \alpha \doteq 0.843) \quad \text{で } P_2 \rightarrow 0, P_1 \rightarrow 0.29$$

③ No.2 の X51~X81を除き的中率は σ^2 の値に依存していない。

▷ 理由 H(8)以降のみ考える場合、例えば CP0 の大小比較は χ^2 変数の大小比較と同値である又、AIC の大小比較は $\log \chi^2$ の大小比較と同値となる故である。

4-2-2 TIC, FST について

① 実験的であるが TIC は真のモデルに含まれるモデルを選択する傾向がある。

② FST はこの数値実験の範囲内では的中率は極めて高い。

以上の①, ②について理由はまだ不明である。

4-2-3 PSS について

① No.2 の X51~X81の場合を除き 的中率は σ^2 に依存しない。

理由はまだ不明である。

表 I

THE RATES OF SELECTING THE TRUE MODEL

No.	σ^2	m	ρ	X	CPO	CPI	AIC	CAI	HAI	BIC	TIC	FST	PSS
1	1.00	4	0.00	X11	65 ³⁵	64 ³⁶	62 ³⁸	66 ³⁴	65 ³⁵	92 ⁸	82 ¹⁸	100	61 ³⁹
				X21	67 ³³	65 ³⁵	64 ³⁶	67 ³³	69 ³¹	93 ⁷	74 ²⁶	100	61 ³⁹
				X31	79 ²¹	74 ²⁶	73 ²⁷	76 ²⁴	78 ²²	96 ⁴	82 ¹⁸	100	73 ²⁷
				X41	71 ²⁹	71 ²⁹	69 ³¹	71 ²⁹	72 ²⁸	95 ⁵	74 ²⁶	100	73 ²⁷
				X51	65 ³⁵	64 ³⁶	63 ³⁷	66 ³⁴	65 ³⁵	92 ⁸	100 ⁰	93 ⁷	61 ³⁹
				X61	68 ³²	69 ³¹	69 ³¹	69 ³¹	70 ³⁰	92 ⁸	100 ⁰	94 ⁶	66 ³⁴
				X71	79 ²¹	74 ²⁶	73 ²⁷	76 ²⁴	78 ²²	96 ⁴	100 ⁰	93 ⁷	73 ²⁷
				X81	67 ³³	71 ²⁹	70 ³⁰	73 ²⁷	72 ²⁸	91 ⁹	100 ⁰	99 ¹	65 ³⁵
			0.30	X22	68 ³²	70 ³⁰	69 ³¹	70 ³⁰	72 ²⁸	93 ⁷	73 ²⁷	100	64 ³⁶
				X32	71 ²⁹	67 ³³	66 ³⁴	69 ³¹	68 ³²	95 ⁵	82 ¹⁸	100	66 ³⁴
				X42	57 ⁴³	57 ⁴³	55 ⁴⁵	58 ⁴²	59 ⁴¹	83 ¹⁷	73 ²⁷	100	56 ⁴⁴
				X52	65 ³⁵	64 ³⁶	63 ³⁷	66 ³⁴	65 ³⁵	92 ⁸	97 ³	100	61 ³⁹
				X62	69 ³¹	65 ³⁵	64 ³⁶	70 ³⁰	69 ³¹	92 ⁸	94 ⁶	100	64 ³⁶
				X72	71 ²⁹	67 ³³	66 ³⁴	69 ³¹	68 ³²	95 ⁵	97 ³	100	66 ³⁴
				X82	68 ³²	67 ³³	67 ³³	70 ³⁰	70 ³⁰	95 ⁵	4555	100	65 ³⁵
			0.90	X11	73 ²⁷	70 ³⁰	67 ³³	79 ²¹	80 ²⁰	80 ²⁰	7721 ²	96 ⁴	53 ⁴⁷
				X21	68 ³²	67 ³³	65 ³⁵	75 ²⁵	78 ²²	80 ²⁰	7227 ¹	93 ⁷	58 ⁴²
				X31	78 ²²	75 ²⁵	71 ²⁹	82 ¹⁸	85 ¹⁵	85 ¹⁵	7721 ²	95 ⁵	66 ³⁴
				X41	73 ²⁷	75 ²⁵	72 ²⁸	85 ¹⁵	87 ¹³	87 ¹³	6930 ¹	95 ⁵	71 ²⁹
				X51	50 ²⁷	47 ²⁹	48 ³²	3491 ⁸	3646 ¹⁸	4539 ¹⁶	1000 ⁰	96 ²	2327 ⁴²
				X61	55 ²⁵	49 ²⁴	51 ³²	3548 ¹⁷	3847 ¹⁵	4739 ¹⁴	1000 ⁰	99 ¹	2337 ⁴⁰
				X71	55 ²²	53 ²³	52 ²⁸	3452 ¹⁴	3651 ¹³	4643 ¹¹	1000 ⁰	95 ²	3141 ²⁸
				X81	18 ³⁰	23 ³¹	23 ³⁷	6617 ¹⁷	6916 ¹⁵	7712 ¹¹	1000 ⁰	100 ⁰	5220 ²⁸
			0.30	X22	71 ²⁹	74 ²⁶	71 ²⁹	81 ¹⁹	84 ¹⁶	84 ¹⁶	6039 ¹	94 ⁶	55 ⁴⁵
				X32	67 ³³	70 ³⁰	64 ³⁶	75 ²⁵	81 ¹⁹	81 ¹⁹	7519 ⁶	94 ⁶	56 ⁴⁴
				X42	73 ²⁷	74 ²⁶	69 ³¹	81 ¹⁹	82 ¹⁸	82 ¹⁸	6040 ⁴	194 ⁵	57 ⁴³
				X52	73 ²⁷	70 ³⁰	67 ³³	80 ²⁰	80 ²⁰	80 ²⁰	97 ²	96 ⁴	53 ⁴⁷
				X62	72 ²⁸	69 ³¹	69 ³¹	82 ¹⁸	83 ¹⁷	83 ¹⁷	92 ⁸	97 ³	56 ⁴⁴
				X72	67 ³³	70 ³⁰	64 ³⁶	75 ²⁵	81 ¹⁹	81 ¹⁹	97 ³	94 ⁶	56 ⁴⁴
				X82	72 ²⁸	67 ³³	65 ³⁵	83 ¹⁷	87 ¹⁷	86 ¹⁴	5842	293 ⁵	64 ³⁶
3	0.25	4	0.00	X11	65 ³⁵	64 ³⁶	62 ³⁸	66 ³⁴	65 ³⁵	92 ⁸	2179	100	61 ³⁹
				X21	67 ³³	65 ³⁵	64 ³⁶	67 ³³	69 ³¹	93 ⁷	1486	100	61 ³⁹
				X31	79 ²¹	74 ²⁶	73 ²⁷	76 ²⁴	78 ²²	96 ⁴	2179	100	73 ²⁷
				X41	71 ²⁹	71 ²⁹	69 ³¹	71 ²⁹	72 ²⁸	95 ⁵	1486	100	73 ²⁷
				X51	65 ³⁵	64 ³⁶	63 ³⁷	66 ³⁴	65 ³⁵	92 ⁸	1000	199	61 ³⁹
				X61	68 ³²	69 ³¹	69 ³¹	69 ³¹	70 ³⁰	93 ⁷	1000	298	66 ³⁴
				X71	79 ²¹	74 ²⁶	73 ²⁷	76 ²⁴	78 ²²	96 ⁴	1000	199	73 ²⁷
				X81	67 ³³	71 ²⁹	79 ²¹	73 ²⁷	73 ²⁷	95 ⁵	1000	892	65 ³⁵
			0.30	X22	68 ³²	70 ³⁰	69 ³¹	70 ³⁰	72 ²⁸	93 ⁷	1486	100	64 ³⁶
				X32	71 ²⁹	67 ³³	66 ³⁴	69 ³¹	68 ³²	95 ⁵	2179	100	66 ³⁴
				X42	57 ⁴³	57 ⁴³	55 ⁴⁵	58 ⁴²	59 ⁴¹	83 ¹⁷	1486	100	56 ⁴⁴
				X52	65 ³⁵	64 ³⁶	63 ³⁷	66 ³⁴	65 ³⁵	92 ⁸	8020	100	61 ³⁹
				X62	69 ³¹	65 ³⁵	64 ³⁶	70 ³⁰	69 ³¹	92 ⁸	98 ²	100	64 ³⁶
				X72	71 ²⁹	67 ³³	66 ³⁴	69 ³¹	68 ³²	95 ⁵	8020	100	66 ³⁴
				X82	68 ³²	67 ³³	67 ³³	70 ³⁰	70 ³⁰	95 ⁵	793	100	65 ³⁵
			0.90	X11	73 ²⁷	70 ³⁰	67 ³³	79 ²¹	80 ²⁰	80 ²⁰	6535	96 ⁴	53 ⁴⁷
				X21	68 ³²	67 ³³	65 ³⁵	75 ²⁵	78 ²²	80 ²⁰	5050	96 ⁴	58 ⁴²
				X31	78 ²²	75 ²⁵	71 ²⁹	82 ¹⁸	85 ¹⁵	85 ¹⁵	6535	96 ⁴	66 ³⁴
				X41	73 ²⁷	75 ²⁵	72 ²⁸	85 ¹⁵	87 ¹³	87 ¹³	4456	97 ³	71 ²⁹
				X51	73 ²⁷	70 ³⁰	66 ³⁴	80 ²⁰	80 ²⁰	80 ²⁰	1000	1285 ³	53 ⁴⁷
				X61	72 ²⁸	71 ²⁹	67 ³³	81 ¹⁹	82 ¹⁸	82 ¹⁸	1000	1088 ²	53 ⁴⁷
				X71	78 ²²	76 ²⁴	70 ³⁰	82 ¹⁸	85 ¹⁵	85 ¹⁵	1000	1284 ⁴	66 ³⁴
				X81	60 ⁴⁰	63 ³⁷	58 ⁴²	172 ²⁷	177 ²²	277 ²¹	1000	4056 ⁴	58 ⁴²
4		1	0.00	X11	73 ²⁷	70 ³⁰	67 ³³	79 ²¹	80 ²⁰	80 ²⁰	6535	96 ⁴	53 ⁴⁷
				X21	68 ³²	67 ³³	65 ³⁵	75 ²⁵	78 ²²	80 ²⁰	5050	96 ⁴	58 ⁴²
				X31	78 ²²	75 ²⁵	71 ²⁹	82 ¹⁸	85 ¹⁵	85 ¹⁵	6535	96 ⁴	66 ³⁴
				X41	73 ²⁷	75 ²⁵	72 ²⁸	85 ¹⁵	87 ¹³	87 ¹³	4456	97 ³	71 ²⁹
				X51	73 ²⁷	70 ³⁰	66 ³⁴	80 ²⁰	80 ²⁰	80 ²⁰	1000	1285 ³	53 ⁴⁷
				X61	72 ²⁸	71 ²⁹	67 ³³	81 ¹⁹	82 ¹⁸	82 ¹⁸	1000	1088 ²	53 ⁴⁷
				X71	78 ²²	76 ²⁴	70 ³⁰	82 ¹⁸	85 ¹⁵	85 ¹⁵	1000	1284 ⁴	66 ³⁴
				X81	60 ⁴⁰	63 ³⁷	58 ⁴²	172 ²⁷	177 ²²	277 ²¹	1000	4056 ⁴	58 ⁴²
			0.30	X22	71 ²⁹	74 ²⁶	71 ²⁹	81 ¹⁹	84 ¹⁶	84 ¹⁶	4456	96 ⁴	55 ⁴⁵
				X32	67 ³³	70 ³⁰	64 ³⁶	75 ²⁵	81 ¹⁹	81 ¹⁹	6535	96 ⁴	56 ⁴⁴
				X42	73 ²⁷	74 ²⁶	69 ³¹	81 ¹⁹	82 ¹⁸	82 ¹⁸	4456	96 ⁴	57 ⁴³
				X52	73 ²⁷	70 ³⁰	67 ³³	80 ²⁰	80 ²⁰	80 ²⁰	93 ⁷	96 ⁴	53 ⁴⁷
				X62	72 ²⁸	69 ³¹	69 ³¹	82 ¹⁸	83 ¹⁷	83 ¹⁷	93 ⁷	98 ²	56 ⁴⁴
				X72	67 ³³	70 ³⁰	64 ³⁶	75 ²⁵	81 ¹⁹	81 ¹⁹	93 ⁷	95 ⁵	56 ⁴⁴
				X82	72 ²⁸	67 ³³	65 ³⁵	83 ¹⁷	87 ¹³	86 ¹⁴	3169	95 ⁵	64 ³⁶

THE RATES OF SELECTING THE TRUE MODEL

No.	σ^2	m	ρ	X	CP0	CP1	AIC	CAI	HAI	BIC	TIC	FST	PSS		
5	0.01	4	0.00	X11	65 ³⁵	64 ³⁶	62 ³⁸	66 ³⁴	65 ³⁵	92 ⁸	100	100	61 ³⁹		
				X21	67 ³³	65 ³⁵	64 ³⁶	67 ³³	69 ³¹	93 ⁷	100	100	61 ³⁹		
				X31	79 ²¹	74 ²⁶	73 ²⁷	76 ²⁴	78 ²²	96 ⁴	100	100	73 ²⁷		
				X41	71 ²⁹	71 ²⁹	69 ³¹	71 ²⁹	72 ²⁸	95 ⁵	100	100	73 ²⁷		
				X51	65 ³⁵	64 ³⁶	63 ³⁷	66 ³⁴	65 ³⁵	92 ⁸	1000	100	61 ³⁹		
				X61	68 ³²	69 ³¹	69 ³¹	69 ³¹	70 ³⁰	93 ⁷	1000	100	66 ³⁴		
				X71	79 ²¹	74 ²⁶	73 ²⁷	76 ²⁴	78 ²²	96 ⁴	1000	100	73 ²⁷		
				X81	67 ³³	71 ²⁹	70 ³⁰	73 ²⁷	73 ²⁷	95 ⁵	1000	100	65 ³⁵		
			0.30	X22	68 ³²	70 ³⁰	69 ³¹	70 ³⁰	72 ²⁸	93 ⁷	100	100	64 ³⁶		
				X32	71 ²⁹	67 ³³	66 ³⁴	69 ³¹	68 ³²	95 ⁵	100	100	66 ³⁴		
				X42	57 ⁴³	57 ⁴³	55 ⁴⁵	58 ⁴²	59 ⁴¹	83 ¹⁷	100	100	56 ⁴⁴		
				X52	65 ³⁵	64 ³⁶	63 ³⁷	66 ³⁴	65 ³⁵	92 ⁸	199	100	61 ³⁹		
				X62	69 ³¹	65 ³⁵	64 ³⁶	70 ³⁰	69 ³¹	92 ⁸	1000	100	64 ³⁶		
				X72	71 ²⁹	67 ³³	66 ³⁴	69 ³¹	68 ³²	95 ⁵	199	100	66 ³⁴		
				X82	68 ³²	67 ³³	67 ³³	70 ³⁰	70 ³⁰	95 ⁵	100	100	65 ³⁵		
				6	1	0.00	X11	73 ²⁷	70 ³⁰	67 ³³	79 ²¹	80 ²⁰	80 ²⁰	100	96 ⁴
			X21				68 ³²	67 ³³	65 ³⁵	75 ²⁵	78 ²²	80 ²⁰	100	97 ³	58 ⁴²
			X31				78 ²²	75 ²⁵	71 ²⁹	82 ¹⁸	85 ¹⁵	85 ¹⁵	100	96 ⁴	66 ³⁴
			X41				73 ²⁷	75 ²⁵	72 ²⁸	85 ¹⁵	87 ¹³	87 ¹³	100	98 ²	71 ²⁹
			X51				73 ²⁷	70 ³⁰	66 ³⁴	80 ²⁰	80 ²⁰	80 ²⁰	1000	96 ⁴	53 ⁴⁷
X61	72 ²⁸	71 ²⁹	67 ³³				81 ¹⁹	82 ¹⁸	82 ¹⁸	1000	98 ²	53 ⁴⁷			
X71	78 ²²	76 ²⁴	70 ³⁰				82 ¹⁸	85 ¹⁵	85 ¹⁵	1000	96 ⁴	66 ³⁴			
X81	60 ⁴⁰	63 ³⁷	58 ⁴²				73 ²⁷	78 ²²	79 ²¹	1000	96 ⁴	58 ⁴²			
0.30	X22	71 ²⁹	74 ²⁶			71 ²⁹	81 ¹⁹	84 ¹⁶	84 ¹⁶	100	96 ⁴	55 ⁴⁵			
	X32	67 ³³	70 ³⁰			64 ³⁶	75 ²⁵	81 ¹⁹	81 ¹⁹	100	96 ⁴	56 ⁴⁴			
	X42	73 ²⁷	74 ²⁶			69 ³¹	81 ¹⁹	82 ¹⁸	82 ¹⁸	100	96 ⁴	57 ⁴³			
	X52	73 ²⁷	70 ³⁰			67 ³³	80 ²⁰	80 ²⁰	80 ²⁰	6337	96 ⁴	53 ⁴⁷			
0.90	X62	72 ²⁸	69 ³¹	69 ³¹	82 ¹⁸	83 ¹⁷	83 ¹⁷	1000	100	56 ⁴⁴					
	X72	67 ³³	70 ³⁰	64 ³⁶	75 ²⁵	81 ¹⁹	81 ¹⁹	6337	96 ⁴	56 ⁴⁴					
	X82	72 ²⁸	67 ³³	65 ³⁵	83 ¹⁷	87 ¹⁷	86 ¹⁴	100	96 ⁴	64 ³⁶					
	TQ= 3,4														
0-30	1.00	4	0.00	ORT.	33 ⁶⁷	32 ⁶⁸	32 ⁶⁸	33 ⁶⁷	35 ⁶⁵	49 ⁵¹	298	196 ³	32 ⁶⁸		
0-31			0.95	NON.	231 ⁶⁷	230 ⁶⁸	230 ⁶⁸	231 ⁶⁷	233 ⁶⁵	842 ⁵⁰	1000	1000	230 ⁶⁸		
0-40		4	0.00	ORT.	33 ⁶⁷	32 ⁶⁸	32 ⁶⁸	33 ⁶⁷	35 ⁶⁵	49 ⁵¹	199	97 ³	32 ⁶⁸		
0-41			0.95	NON.	231 ⁶⁷	230 ⁶⁸	230 ⁶⁸	231 ⁶⁷	233 ⁶⁵	842 ⁵⁰	1000	1000	230 ⁶⁸		

【註】 右肩の文字は真のモデルを含むモデルを選択した割合、左肩の文字は真のモデルに含まれるモデルを選択した割合。
 参考文献

- [1] Akaike. H. (1970) A.I.S.M. 22. p203
- [2] Mallows. C.L. (1973) Tech. 15. p661
- [3] Okuno. T. et al. (1976) 続多変量解析法 日科技連
- [4] Schwarz. G. (1978) A.S. 6.(2) p461~
- [5] Sugiura. N. (1978) Commun. S. A7.(1) p13~
- [6] Taga. Y. (1978) 統計的推論 山海堂