

多重 L 値の多項式補間について

On interpolated multiple L -values

田中立志* (京都産業大学)

Tatsushi Tanaka

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Kyoto Sangyo University

1 定義, 代数的定式化

1.1 定義

山本 [Y] で導入された補間多重ゼータ値の概念を多重 L 値へと拡張し, 代数的定式化, いくつかの関係式, 特殊値について, 得られたものを報告する. (伊藤慎也, 若林徳子との共同研究 [ITW] に基づいている.)

正整数 r を固定する. μ_r を 1 の r 乗根の集合とする. インデックス $(k_1, \dots, k_n; a_1, \dots, a_n)$ ($k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mu_r, (k_1, a_1) \neq (1, 1)$) に対し,

$$L_*^t(k_1, \dots, k_n; a_1, \dots, a_n) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{M \geq m_1 \geq \dots \geq m_n > 0} \frac{a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n}}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}} t^{\sigma(m_1, \dots, m_n)} \in \mathbb{C}[t]$$

および

$$L_{\mathbf{m}}^t(k_1, \dots, k_n; a_1, \dots, a_n) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{M \geq m_1 \geq \dots \geq m_n > 0} \frac{a_1^{m_1 - m_2} \dots a_{n-1}^{m_{n-1} - m_n} a_n^{m_n}}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}} t^{\sigma(m_1, \dots, m_n)} \in \mathbb{C}[t]$$

と定義する. ただし, $\sigma(m_1, \dots, m_n) = \#\{i \mid 1 \leq i < n, m_i = m_{i+1}\}$ とする. これらは順に, 調和タイプ, シャッフルタイプの多重 L 値 ([AK]) を, Bachmann [B] の手法を援用して拡張した 1 変数多項式である. $t = 0$ なら通常の多重 L 値, $t = 1$ なら多重 L -スター値になっている.

1.2 代数的定式化

これらの補間多重 L 値を代数的に定式化しておく. $\mathfrak{A}_r$ をアルファベットの集合 $\{x, y_a \mid a \in \mu_r\}$ とし, $\mathcal{A}_r = \mathbb{Q}[t][\mathfrak{A}_r]$ を $\mathfrak{A}_r$ の元を不定元とする $r+1$ 変数非可換多項式代数とする.

$$\mathcal{A}_r^1 := \mathbb{Q}[t] \oplus \mathcal{A}_{r,+}^1 := \mathbb{Q}[t] \oplus \sum_{a \in \mu_r} \mathcal{A}_r y_a \supset \mathcal{A}_r^0 := \mathbb{Q}[t] \oplus \sum_{a \in \mu_r} x \mathcal{A}_r y_a \oplus \sum_{\substack{a, b \in \mu_r \\ b \neq 1}} y_b \mathcal{A}_r y_a.$$

はそれぞれ $\mathcal{A}_r$ の部分代数になる. 便利のため, $z_{k,a} = x^{k-1} y_a \in \mathcal{A}_r$ ($k \geq 1, a \in \mu_r$) とおく.

$\mathbb{C}$ -線形写像 $\mathcal{L}_*^t : \mathcal{A}_r^0 \rightarrow \mathbb{C}$ を, $\mathcal{L}_*^t(1) = 1$ および

$$\mathcal{L}_*^t(z_{k_1, a_1} \dots z_{k_n, a_n}) = L_*^t(k_1, \dots, k_n; a_1, \dots, a_n)$$

*email: t.tanaka@cc.kyoto-su.ac.jp

$(k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mu_r, (k_1, a_1) \neq (1, 1))$ で定義する. $\mathfrak{z} = \sum_{k \geq 1, a \in \mu_r} \mathbb{Q}[t] z_{k,a}$ とおく. 積 $\diamond : \mathfrak{z} \times \mathcal{A}_r^1 \rightarrow \mathcal{A}_r^1$ を,

$$\alpha \diamond 1 = 0, \quad \alpha \diamond (\beta w) = (\alpha \diamond \beta) w$$

$(\alpha, \beta \in \mathfrak{z}, w \in \mathcal{A}_r^1)$ および

$$z_{k,a} \diamond z_{l,b} = z_{k+l,ab} \quad (k, l \in \mathbb{N}, a, b \in \mu_r)$$

で定義する. [HI] にも述べてあるように, 積 $\diamond$ は

$$\begin{aligned} 1 \diamond w &= w \diamond 1 = w, \\ wa \diamond bv &= w(a \diamond b)v \end{aligned}$$

$(w, v \in \mathcal{A}_r, a, b \in \mathfrak{z})$ によって $\mathcal{A}_r$ 上の非可換積に拡張される. 代数 $(\mathbb{Q}[t] + \mathfrak{z}, \diamond)$ は代数 $(\mathcal{A}_r, \diamond)$ の可換部分代数である. また,

$$\mathcal{L}_*^t = \mathcal{L}_* S_*^t \quad (1)$$

が成り立つことがわかる. ここに, $\mathcal{L}_* = \mathcal{L}_*^0$ であり, $S_*^t \in \text{End}(\mathcal{A}_t^1)$ は $S_*^t(1) = 1$ および

$$S_*^t(\alpha w) = \alpha S_*^t(w) + t\alpha \diamond S_*^t(w)$$

$(\alpha \in \mathfrak{z}, w \in \mathcal{A}_r^1)$ により定義される.

同様に, $\mathbb{C}$ -線形写像 $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}^t : \mathcal{A}_r^0 \rightarrow \mathbb{C}$ を, $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}^t(1) = 1$ および

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}^t(z_{k_1, a_1} \cdots z_{k_n, a_n}) = L_{\mathbf{m}}^t(k_1, \dots, k_n; a_1, \dots, a_n)$$

$(k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mu_r, (k_1, a_1) \neq (1, 1))$ で定義する.

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}^t = \mathcal{L}_{\mathbf{m}} S_{\mathbf{m}}^t \quad (2)$$

が成り立つことがわかる. ここに, $\mathcal{L}_{\mathbf{m}} = \mathcal{L}_{\mathbf{m}}^0$ であり, $S_{\mathbf{m}}^t \in \text{End}(\mathcal{A}_t)$ は $S_{\mathbf{m}}^t(1) = 1$ および

$$S_{\mathbf{m}}^t(wu) = s^t(w)u$$

$(w \in \mathcal{A}_r, u \in \mathfrak{A}_r)$ で定義され, $s^t \in \text{Aut}(\mathcal{A}_r)$ は

$$s^t(x) = x, \quad s^t(y_a) = tx + y_a \quad (a \in \mu_r)$$

で与えられる.

$\mathcal{I} \in \text{End}(\mathcal{A}_r)$ を $\mathcal{I}(1) = 1$ および

$$\mathcal{I}(z_{k_1, a_1} \cdots z_{k_n, a_n} x^l) = z_{k_1, a_1} z_{k_2, a_1 a_2} \cdots z_{k_1, a_1 \cdots a_n} x^l$$

$(l \geq 0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mu_r)$ で定義する. 明らかにこの逆写像は

$$\mathcal{I}^{-1}(z_{k_1, a_1} \cdots z_{k_n, a_n} x^l) = z_{k_1, a_1} z_{k_2, \frac{a_2}{a_1}} \cdots z_{k_1, \frac{a_n}{a_{n-1}}} x^l$$

である. $\mathcal{A}_r^1$ 上で

$$\mathcal{I} S_*^t = S_{\mathbf{m}}^t \mathcal{I}$$

が成り立つことが容易にわかる. また, $\mathcal{L}_* = \mathcal{L}_{\mathbf{m}} \mathcal{I}$ が成り立つので,

$$\mathcal{L}_*^t = \mathcal{L}_* S_*^t = \mathcal{L}_* \mathcal{I}^{-1} S_{\mathbf{m}}^t \mathcal{I} = \mathcal{L}_{\mathbf{m}} S_{\mathbf{m}}^t \mathcal{I} = \mathcal{L}_{\mathbf{m}}^t \mathcal{I}$$

も成り立つことがわかる.

1.3 調和積 $\overset{t}{*}$

$\mathbb{Q}[t]$ -双線形写像 $\overset{t}{*}: \mathcal{A}_r^1 \times \mathcal{A}_r^1 \rightarrow \mathcal{A}_r^1$ を

$$\begin{aligned} 1 \overset{t}{*} w &= w \overset{t}{*} 1 = w, \\ \alpha v \overset{t}{*} \beta w &= \alpha(v \overset{t}{*} \beta w) + \beta(\alpha v \overset{t}{*} w) \\ &\quad + (1 - 2t)(\alpha \diamond \beta)(v \overset{t}{*} w) + (t^2 - t)\alpha \diamond \beta \diamond (v \overset{t}{*} w) \end{aligned}$$

$(\alpha, \beta \in \mathfrak{z}, v, w \in \mathcal{A}_r^1)$ により定義する. $r = 1$ の場合には, 調和積 $\overset{t}{*}$ は $[Y]$ で定義されたものと一致する. $\mathcal{L}_*$ は $\overset{0}{*}$ (これを単に $*$ と書く) について準同型になることが知られている. また, $v, w \in \mathcal{A}_r^1$ に対して,

$$S_*^t(v \overset{t}{*} w) = S_*^t(v) * S_*^t(w)$$

が成り立つことを示せるため, (1) により, 写像 $\mathcal{L}_*^t$ は調和積 $\overset{t}{*}$ について準同型になることもわかる.

1.4 シャッフル積 $\overset{t}{\mathbf{m}}$

$\mathbb{Q}[t]$ -双線形写像 $\overset{t}{\mathbf{m}}: \mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{A}_r$ を

$$\begin{aligned} 1 \overset{t}{\mathbf{m}} w &= w \overset{t}{\mathbf{m}} 1 = w, \\ \alpha v \overset{t}{\mathbf{m}} \beta w &= \alpha(v \overset{t}{\mathbf{m}} \beta w) + \beta(\alpha v \overset{t}{\mathbf{m}} w) - \varepsilon(v)\rho(\alpha)\beta w - \varepsilon(w)\rho(\beta)\alpha v \end{aligned}$$

$(\alpha, \beta \in \mathfrak{A}, v, w \in \mathfrak{A}^*)$ により定義する. ここに, 写像 $\varepsilon: \mathfrak{A}_r^* \rightarrow \{0, 1\}$ は

$$\varepsilon(w) = \begin{cases} 1 & (w = 1) \\ 0 & (w \neq 1) \end{cases}$$

(ただし, $\mathfrak{A}_r^*$ は $\mathfrak{A}_r$ で生成されるワード全体を表す) で, 写像 $\rho: \mathfrak{A}_r \rightarrow \mathcal{A}_r$ は

$$\rho(x) = 0, \quad \rho(y_a) = tx \quad (a \in \mu_r)$$

で与えられる. $r = 1$ の場合には, シャッフル積 $\overset{t}{\mathbf{m}}$ は $[LQ, W]$ で定義されたものと一致する. $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}$ は $\overset{0}{\mathbf{m}}$ (これを単に $\mathbf{m}$ と書く) について準同型になることが知られている. また, $v, w \in \mathcal{A}_r$ に対して,

$$S_{\mathbf{m}}^t(v \overset{t}{\mathbf{m}} w) = S_{\mathbf{m}}^t(v) \mathbf{m} S_{\mathbf{m}}^t(w)$$

が成り立つことを示せるため, (2) により, 写像 $\mathcal{L}_{\mathbf{m}}^t$ はシャッフル積 $\overset{t}{\mathbf{m}}$ について準同型になることもわかる.

2 関係式

2.1 一般複シャッフル関係式

[AK] に準ずる議論が可能である. すなわち, 以下の性質で特徴づけられる写像 $\widehat{\mathcal{L}}_\bullet^t: \mathcal{A}_r^1 \cong \mathcal{A}_r^0[y_1] \rightarrow \mathbb{C}[t, T]$ ($\bullet = * \text{ または } \mathbf{m}$) がただ一つ存在する:

(i) $\widehat{\mathcal{L}}_\bullet^t$ は $\mathcal{A}_r^0$ 上で $\mathcal{L}_\bullet^t$ と一致する.

(ii) $\widehat{\mathcal{L}}_\bullet^t(y_1) = T$.

(iii) $\hat{\mathcal{L}}_\bullet^t$ は積 $\bullet$ について準同型である.

$S_*^t(y_1) = y_1$ および $S_{\mathbf{m}}^t(y_1) = y_1$ であるから,

$$\hat{\mathcal{L}}_\bullet^t = \hat{\mathcal{L}}_\bullet \cdot S_\bullet^t,$$

および一般複シャッフル関係式

$$\hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{m}}^t(\mathcal{I}(w_0) \overset{t}{\mathbf{m}} \mathcal{I}(w_1) - \mathcal{I}(w_0 \overset{t}{*} w_1)) = 0$$

($w_0 \in \mathcal{A}_r^0, w_1 \in \mathcal{A}_r^1$) が成り立つことがわかる.

2.2 Hoffman 関係式

$k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mu_r$ に対して,

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}(y_1) \overset{t}{\mathbf{m}} z_{k_1, a_1} \cdots z_{k_n, a_n} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} z_{k_1, a_1} \cdots z_{k_{i-1}, a_{i-1}} y_1 z_{k_i, a_i} \cdots z_{k_n, a_n} \\ & \quad - t \sum_{i=1}^n z_{k_1, a_1} \cdots z_{k_{i-1}, a_{i-1}} z_{k_i+1, a_i} z_{k_{i+1}, a_{i+1}} \cdots z_{k_n, a_n} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}(y_1 \overset{t}{*} \mathcal{I}^{-1}(z_{k_1, a_1} \cdots z_{k_n, a_n})) \\ &= y_1 z_{k_1, a_1} \cdots z_{k_n, a_n} + \sum_{i=2}^{n+1} z_{k_1, a_1} \cdots z_{k_{i-1}, a_{i-1}} y_{a_{i-1}} z_{k_i, a_i} \cdots z_{k_n, a_n} \\ & \quad + (t^2 - t) \sum_{i=1}^n z_{k_1, a_1} \cdots z_{k_{i-1}, a_{i-1}} z_{k_i+k_{i+1}+1, a_{i+1}} z_{k_{i+2}, a_{i+2}} \cdots z_{k_n, a_n} \\ & \quad + (1 - 2t) \sum_{i=1}^n z_{k_1, a_1} \cdots z_{k_{i-1}, a_{i-1}} z_{k_i+1, a_i} z_{k_{i+1}, a_{i+1}} \cdots z_{k_n, a_n} \end{aligned}$$

がわかる. したがって, $(k_1, a_1) \neq (1, 1)$ のとき,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \{ L_{\mathbf{m}}^t(k_1, \dots, k_{i-1}, 1, k_{i+1}, \dots, k_n; a_1, \dots, a_i, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ & \quad - L_{\mathbf{m}}^t(k_1, \dots, k_{i-1}, 1, k_{i+1}, \dots, k_n; a_1, \dots, a_i, 1, a_{i+1}, \dots, a_n) \} \\ &= (t-1) \sum_{i=1}^n \{ L_{\mathbf{m}}^t(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i+1, k_{i+1}, \dots, k_n; a_1, \dots, a_n) \\ & \quad - t L_{\mathbf{m}}^t(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i+k_{i+1}+1, k_{i+2}, \dots, k_n; a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \}. \end{aligned}$$

が得られる. これは, 上記の一般複シャッフル関係式の $w_1 = y_1$ の場合である.

2.3 川島関係式

これを記すためにいくつか記号を導入しておく. $a \in \mu_r$ に対して, $z_a = x + y_a$, $z_a^\delta = x + \delta(a)y_a \in \mathcal{A}_r$ とおく. ただし,

$$\delta(a) = \begin{cases} 0 & (a = 1), \\ 1 & (a \neq 1). \end{cases}$$

$\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{A}_r)$ を $\varphi(x) = z_1$, $\varphi(z_a) = z_a^\delta$ ($a \in \mu_r$) で与える. この φ は対合であることに注意しておく. $L_u(w) = uw$ ($u, w \in \mathcal{A}_r$) とし, $\alpha v \circledast \beta w = (\alpha \diamond \beta)(v * w)$ ($\alpha, \beta \in \mathfrak{z}$, $v, w \in \mathcal{A}_r^1$) とする. $a \in \mu_r$ に対して, $M_a \in \text{End}(\mathcal{A}_r)$ は $M_a(1) = 1$ および

$$M_a(z_{k_1, a_1} \cdots z_{k_n, a_n} x^l) = z_{k_1, aa_1} z_{k_2, a_2} \cdots z_{k_n, a_n} x^l$$

($l \geq 0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mu_r$) で与えられる.

さらに, $\alpha v \circledast \beta w = (\alpha \diamond \beta)(v \stackrel{t}{*} w)$ ($\alpha, \beta \in \mathfrak{z}, v, w \in \mathcal{A}_r^1$) とおく. このとき,

$$S_*^t(v \circledast w) = S_*^t(v) \circledast S_*^t(w)$$

($v, w \in \mathcal{A}_{r,+}^1$) が成り立つことがわかる.

$\varphi^t = -(S_{\mathfrak{m}}^t)^{-1} \varphi S_{\mathfrak{m}}^t$ とおく. 以上の記号のもと, 補間多重 L 値の川島関係式は次のようになる. $m \geq 0, a \in \mu_r, v \in \mathcal{A}_{1,+}^1, w \in \mathcal{A}_{r,+}^1$ に対して,

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k+l=m \\ k \geq 0, l > 0}} \mathcal{L}_{\mathfrak{m}}^t(L_x^{-1} \mathcal{I}(\mathcal{I}^{-1} L_{x+\delta(a)(-tx+y_a)} \varphi^t \mathcal{I} M_a(w) \circledast (-tx+y_1)^k y_1)) \\ & \quad \times \mathcal{L}_{\mathfrak{m}}^t(\varphi^t(v) \circledast (-tx+y_1)^{l-1} y_1) \\ & = -\mathcal{L}_{\mathfrak{m}}^t(L_x^{-1} \mathcal{I}(\mathcal{I}^{-1} L_{x+\delta(a)(-tx+y_a)} \varphi^t \mathcal{I} M_a(w \stackrel{t}{*} v) \circledast (-tx+y_1)^m y_1)). \end{aligned}$$

とくに, $m = 0$ なら左辺は 0 とみなすため, 任意の $a \in \mu_r$ に対して,

$$L_{x+\delta(a)(-tx+y_a)} \varphi^t \mathcal{I} M_a(A_{r,+}^1 \stackrel{t}{*} A_{1,+}^1) \subset \ker \mathcal{L}_{\mathfrak{m}}^t$$

である.

3 特殊値

特殊値についてはまだほとんど調べることができていないが, とりあえず, 次のものは容易にわかる. 正整数 j, k (k は偶数) に対して,

$$\frac{L_*^t(\{k\}_j; \{-1\}_j)}{\pi^{jk}} \in \mathbb{Q}[t].$$

ここに, $\{k\}_j$ は $\underbrace{k, \dots, k}_j$ を表す.

謝辞 2022 年度 RIMS 共同研究「解析的整数論とその周辺」において講演の機会を下さいました山崎義徳, 安福悠両氏に感謝いたします. 本研究は JSPS 科研費・基盤研究 (C)19K03434 の助成を受けております.

References

- [AK] T. Arakawa, M. Kaneko, *On multiple L -values*, J. Math. Soc. Japan 56(4) (2004), 967–991.
- [B] H. Bachmann, *Interpolated Schur multiple zeta values*, J. Aust. Math. Soc. 104 (2018), 289–307.
- [HI] M. Hoffman, K. Ihara, *Quasi-shuffle products revisited*, J. Algebra 481 (2017), 293–326.
- [ITW] S. Ito, T. Tanaka, N. Wakabayashi, *On interpolated multiple L -values*, preprint.
- [LQ] Z. Li, C. Qin, *Some relations of interpolated multiple zeta values*, Internat. J. Math. 28 (5) (2017), 1750033, 25pp.
- [W] N. Wakabayashi, *Double shuffle and Hoffman’s relations for interpolated multiple zeta values*, Internat. J. Number Theory 13 (2017), 2245–2251.
- [Y] S. Yamamoto, *Interpolation of multiple zeta values and zeta-star values*, J. Algebra 385 (2013), 102–114.