

バナッハ空間における最適制御問題

— バンバン制御に関する一つの考察 —

(東大・理) 増田久弥

§ 1. 序

lumped parameter system において, バンバン制御は, 1つの興味ある性質である。最近 distributed parameter system の研究が盛んになりつつあるが, そこでは, 集中系において成立していることが, 分布定数系においても成立するかということが問題意識の1つになっていると思われる。しかるに, バンバン制御は, 分布定数系に対して成立するか。これは, 次の例を示すごとく一般には否定される。

$$(1) \begin{cases} \partial u / \partial t = \Delta u + \alpha(t) f(u) & t \geq 0, x \in G \\ u(x, 0) = u_0(x), u(x, t) = 0 & \text{on } \partial G \end{cases}$$

ここで, $\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \dots + \partial^2 / \partial x_n^2$, G は R^n 中の有界な境界をもつ有界領域 ($n \geq 2$), $\alpha(t)$ は $|\alpha(t)| \leq 1$ なる t の可測函数, $\{g_j\}$ を $-\Delta$ にディルクレイ条件をえた作用素の $L^2(G)$ における正規直交な完備系とすると $f(u) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} 1/j^m \times g_j(u)$ と定めた。

任意に $T > 0$ を与えよう。このとき T における系(1)に

によって支配される状態 $u(x, T)$ は, $\alpha(t)$ を $0 \leq t \leq T$ において、一意に定めてしまう。これを以下で示そう。もしこれが示されるれば, (1) に対してバ=バ=制御 (時間最適問題における) は起りえぬことは容易にわかる。さて

(1) の解は,

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} (u_0, q_j) q_j + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_j(t-s)} \times \\ \times \alpha(s) (f, q_j) q_j ds$$

で与えられる。ここで λ_j は, q_j に対応する固有値,

$(\cdot, \cdot)$ は $L^2(G)$ のスカラー積を示す。任意の $T > 0$ を固定したとき $u(x, T)$ が $\alpha(t)$ を $[0, T]$ で一意に定めることを示すには,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T \exp[-\lambda_j(T-s)] \alpha(s) (f, q_j) q_j ds = 0$$

から $\alpha(s) = 0$ on $[0, T]$ が得ればよい。これは,

$\{q_j\}$ の直交性と $(f, q_j) \neq 0$ を考えに入れると,

$$\int_0^T \exp[-\lambda_j(T-s)] \alpha(s) ds = 0, \quad j=1, 2, \dots, \text{つまり}$$

$$(2) \quad \int_0^T \exp(\lambda_j s) \alpha(s) ds = 0 \quad \text{と等値である。}$$

$-\lambda_j$ は, Δ のディリクレ条件をもつ作用素の固有値
より次の漸近分布をもつ。([1], [2] をみよ)

$$\sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1 \sim K \lambda^{\frac{n}{2}} \quad (K = \text{正の定数})$$

$\lambda = \lambda_m$ とおけば

$$\lambda_m \sim K' m^{\frac{2}{n}} \quad (K' = \text{正の定数})$$

をえる。 仮定 $n \geq 2$ より

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\lambda_j)}{1 + |\lambda_j|^2} \sim \frac{1}{K'} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{2}{n}}} = \infty.$$

故に, Szász の定理 ([3] をみよ) より $\{ \exp(\lambda_j s) \}$
は, $L^2([0, T])$ で closed である。かくして (2) より
 $\alpha(s) = 0$ on $[0, T]$ をえる。

次に,

$$(3) \begin{cases} \partial^2 u / \partial t^2 = \Delta u + \alpha(t) f(u) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \\ u(x, t) = 0 \quad \text{on } \partial G \end{cases}$$

を考える。この場合, $n > 2$ のとき $\forall T$ を固定
したとき, この時刻における系 (3) によって支配される
状態 $u(x, T)$ は, $\alpha(t)$ を $[0, T]$ で一意に定めてしま
う。 $n = 2$ のとき, $0 < T < 2\pi$ ならば, 同様の

事が成立する。上の例が容易にわかる通り、 $\bar{h} = h$ Principleは成立するわけでは一般にない。しかし任意の $T > 0$ と任意の $x(t)$ を与えたとき、(1) 又は (2) の解で、 $y_j(t) (y_j(t) \equiv 1 \text{ on } [0, T])$ を適当に選べばそれに対応する時刻 T における (1) 又は (2) で支配される系の状態 $u(x, T; y_j)$ にまで近似的であることができる。これを示するのがこの報告の目的である。

記号

X_0 ; 反射的且分離的バチバ空間

X_1 ; バチバ空間,

U ; X_0 の有界凸点の集合, $0 = (2\pi, 0)$

$\hat{U}$; U の端点の全体,

$\mathcal{V}(V) \equiv \left\{ u(s); [0, T] \text{ 上で定義された可測函数で } \begin{matrix} u(s) \in V \text{ for } s \in [0, T] \end{matrix} \right\}$

$K(t, s); 0 \leq s \leq t \leq T$ 上で定義された s と t によ

って連続的な X_0 から X_1 へ有界作用素,

$\Omega(t) \equiv \left\{ \int_0^t K(t, s) u(s) ds, u(s) \in \mathcal{V}(\hat{U}) \right\}$

$\Omega^0(t) \equiv \left\{ \int_0^t K(t, s) u(s) ds, u(s) \in \mathcal{V}(\hat{U}) \right\}$

定理

- (i) $\Omega(t)$ は X_0 中有界, 凸, 閉集合
 (ii) $\Omega(t)^\circ$ の強閉包 $= \Omega(t)$

例えは, 系(i)において $X_0 \equiv L^2([0, T])$, $X_1 \equiv L^2(G)$

$U \equiv \{x(t); x(t) \text{ は可測且 } |x(t)| \leq [0, T] \text{ 上}\}$

$\hat{U} \equiv \{x(t); x(t) \in U \text{ 且 } |x(t)| = [0, T] \text{ 上}\}$

$K(t, s)x = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j(t-s)} (x, q_j) \bar{q}_j$ である。

又 attainable set $\Omega(t)$ の中に制御函数として,
 $|x(t)| = 1$ なるものにかぎって,

たとき, $\Omega(t)^\circ$ は $L^2(G)$ の位相で $\Omega(t)$ の中に, 稠密にある。又上の例の場合, $\Omega(t)$ の端点全体と $\Omega(t)^\circ$ は一致するから, $\Omega(t)$ の中, その端点が dense にある。

§ 2. 幾つかの補題

X_0 は, 分離的なり, 次の如き, $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \hat{U}$ が存在する。

$\{A_j\}$ の凸包 $\supset \hat{U}$. $U_N \equiv \{A_j; j=1, 2, \dots, N\}$ の

凸包といたす。 $U_N \equiv \text{co}\{A_j; j=1, 2, \dots, N\}$

U_N は, X_0 の中 (即ち U の中) に包み込める有界凸な

閉集合である。

補題 1

$$(4) \quad U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \text{ の 包 } (\equiv \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j}).$$

証明. 分離的で反射的バナッハ空間 X_0 の中で U は, 有界な凸な点集合であるから, 弱コンパクトである。クライン–ミルマンの定理により U は, $co \hat{U}$ の弱包と一致する。 X_0 は, 反射的より, $co \hat{U}$ が凸であることを考えれば, $U = co \hat{U}$ の強閉包

それ故に,

$$(5) \quad U \subseteq \overline{co \{a_j; j=1, 2, \dots\}}.$$

他方

$$(6) \quad U \supseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} co \{a_n; n=1, 2, \dots, j\}$$

である。それ故に, 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $co \{a_j; j=1, \dots\}$

の元 a に対して, 次の如き $b \in co \{a_j; j=1, 2, \dots\}$

が存在する, $\|a - b\| < \varepsilon/2$, $b = \sum_{j=1}^N \lambda_j b_j$

($b_j \in \{a_j; j=1, 2, \dots\}$, $\sum \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geq 0$).

ここで $\|\cdot\|$ は X_0 のノルムを示す。各 b_j に対して, 次の如き,

$c_j \in \{a_n; n=1, 2, \dots\}$ が存在する: $\|b_j - c_j\| < \varepsilon/2$.

$c = \sum_{j=1}^N c_j \lambda_j$ とおくと $c \in \bigcup_{j=1}^{\infty} co \{a_n; n=1, 2, \dots, j\}$

より $\|a - c\| < \varepsilon$ である。これは,

$a \in \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} co \{a_k; k=1, \dots, j\}}$ を示している。

$$(5), (6) \text{ より, } \mathcal{U} = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \alpha \{A_j\}} \quad j=1, 2, \dots, m\}$$

(証了)

補題2. V を X_0 の凸な閉集合とする。任意の $v(s) \in \mathcal{F}(V)$ に対して、次の如き、階段函数 $v_m(s) \in \mathcal{F}(V)$ が存在する； $v_m(s) \rightarrow v(s)$ a.e. $s \in [0, T]$.

証明. $v(s)$ に対して、階段函数 $w_m(s) \in \mathcal{F}(X_0)$ で

$w_m(s) \rightarrow v(s)$ a.e. $s \in [0, T]$ が存在することは定

義より明らか。 $w_m(s) = \sum_{j=1}^{N_m} \chi_{B_j^m}(s) \cdot b_j^m$ とおこう。

ここで $\chi_{B_j^m}(s)$ は、Borel 集合 B_j^m の特性函数であり、

b_j^m は X_0 の元である。各 b_j^m に対して、 V が凸で閉

であることから、次の如き $c_j^m \in V$ が存在する。

$$\inf_{b \in V} \|b_j^m - b\| = \|b_j^m - c_j^m\|.$$

そこで、

$$v_m(s) = \sum_{j=1}^{N_m} \chi_{B_j^m}(s) c_j^m$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \|v_m(s) - v(s)\| &\leq \|v_m(s) - w_m(s)\| + \|w_m(s) - v(s)\| \\ &\leq 2 \|w_m(s) - v(s)\| \end{aligned}$$

であるから、 $m \rightarrow \infty$ とせ、右辺 $\rightarrow 0$ a.e. $s \in$

$[0, T]$ を考えれば、 $v_m(s) \rightarrow v(s)$ a.e.

$s \in [0, T]$ 且 $v_m(s) \in V$ である。証了。

—□—

補題3 $\Omega(t) = \left[\bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t K(t,s) u(s) ds; u(s) \in U_j \right\} \right]$
 の強閉包

証明

$\Omega(t)$ から任意に $w(t) = \int_0^t K(t,s) u(s) ds$ をとる。

$u(s) \in \text{子}(U)$ 。補題2によって、次の如き階段函数

$u_m(s) \in \text{子}(U)$ が存在する。 $u_m(s) \rightarrow u(s)$ a.e. in s

in $[0, t]$ と $\text{ess. sup}_{s \in [0, t]} \{ \|u_m(s)\|, \|u(s)\| \} < \infty$ (

$u_m(s), u(s) \in U$ かつ) であるから、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^t \|u_m(s) - u(s)\|^2 ds = 0$$

をえる。故に、 $K(t,s)$ の s についての連続性より、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^t K(t,s) u_m(s) ds = \int_0^t K(t,s) u(s) ds$$

をえる。かくして、 $\bar{u}(s) \in \text{子}(U)$ なる任意の階段函数に対して、

$$\int_0^t K(t,\rho) \bar{u}(\rho) d\rho \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t K(t,\rho) v(\rho) d\rho; v \in \text{子}(U_n) \right\}}$$

を示せば、 $\int_0^t K(t,\rho) u(\rho) d\rho$ は求める性質をもつ。

$\bar{u}(s)$ は階段函数まつ、 $\bar{u}(s) = \sum_{j=1}^N \chi_{B_j}(s) b_j$ と表わされる。 $b_j \in U$ 。各 b_j に対して、 $\exists c_j^m \in U_m$;

$\inf_{c \in U_m} \|b_j - c\| = \|b_j - c_j^m\|$ が成立する。

$U = \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} U_m}$ (補題 1 より) 且 $U_m \subset U_{m+1}$

であるから, $\|b_j - c_j^m\| \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$

をえよ。 $u_m(\rho) = \sum_{j=1}^N \chi_{B_j}(\rho) c_j^m$ とおくと,

$u_m \in \mathcal{F}(U_m)$ (任意の $\rho \in [0, t]$) 且 $u_m(\rho) \rightarrow \bar{u}(\rho)$
 $\rho \in [0, t]$ 。故に,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^t \|u_m(\rho) - \bar{u}(\rho)\|^2 d\rho = 0$$

より

$$\int_0^t K(t, \rho) u_m(\rho) d\rho \rightarrow \int_0^t K(t, \rho) \bar{u}(\rho) d\rho$$

$$\int_0^t K(t, \rho) u_m(\rho) d\rho \in \left\{ \int_0^t K(t, \rho) v(\rho) d\rho; v \in \mathcal{F}(U_m) \right\}$$

より

$$\int_0^t K(t, \rho) u_m(\rho) d\rho \in \overline{\left\{ \int_0^t K(t, \rho) v(\rho) d\rho; v \in \mathcal{F}(U_m) \right\}}$$

$$\text{故に } \int_0^t K(t, \rho) \bar{u}(\rho) d\rho \in \overline{\left\{ \int_0^t K(t, \rho) v(\rho) d\rho; v \in \mathcal{F}(U_m) \right\}}$$

証了。

補題 4

$$\left\{ \int_0^t K(t, \rho) u(\rho) d\rho; u \in \mathcal{F}(U_m) \right\} = \left\{ \int_0^t K(t, \rho) u(\rho) d\rho; u \in \mathcal{F}(U) \right\}$$

証明 U_m の端点は, $\{a_j\}_{j=1,2,\dots,m}$ であつた。

$K(t, \rho) a_j$ は ρ に ついて, 連続な階段函数 $K_p(t, \rho) a_j$ (ρ に ついての) で近似される:

$$K_p(t, \rho) a_j \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} K(t, \rho) a_j \quad (\text{同様 } j=1, 2, \dots, m).$$

$\mathcal{F}(U_m)$ の任意の元 $u(s)$ は, $u(s) = \sum_{j=1}^m \alpha_j(s) a_j$ ($\sum \alpha_j(s) = 1, \alpha_j(s) \geq 0$) と表わされる。これは, “証明すべき事” であるが, ここでは略す。故に,

$$\int_0^t K(t, \rho) u(\rho) d\rho = \sum_{j=1}^m \int_0^t K(t, \rho) \alpha_j(\rho) a_j d\rho$$

$$\text{又, } \left\| \int_0^t K_p(t, \rho) u(\rho) d\rho - \int_0^t K(t, \rho) u(\rho) d\rho \right\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^m \int_0^t \|K_p(t, \rho) a_j - K(t, \rho) a_j\| d\rho$$

故に,

$$\int_0^t K_p(t, \rho) u(\rho) d\rho \rightarrow \int_0^t K(t, \rho) u(\rho) d\rho \quad (p \rightarrow \infty)$$

==> 収束は, $u(s) \in \mathcal{F}(U_m)$ に対して一様である。

したがつて, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次の如き P_0 が存在する:

$$\left\| \int_0^t K_p(t, \rho) w(\rho) d\rho - \int_0^t K(t, \rho) w(\rho) d\rho \right\| < \varepsilon/3$$

==> $P \geq P_0$ で $w \in \mathcal{F}(U_m)$ 。

他方,

$$(T) \left\{ \int_0^t K_p(t, \rho) w(\rho) d\rho : w \in \mathcal{F}(U_m) \right\} = \left\{ \int_0^t K_p(t, \rho) w(\rho) d\rho : w \in \mathcal{F}(U_\infty) \right\}$$

が成立する。これは後で示そう。さて、任意に $u \in \hat{U}_m$ をとると、

$$\left\| \int_0^t K(t, \rho) u(\rho) d\rho - \int_0^t K_P(t, \rho) u(\rho) d\rho \right\| < \varepsilon/3, \quad P > P_0.$$

(17) によつて、

$$\left\| \int_0^t K_P(t, \rho) u(\rho) d\rho - \int_0^t K_P(t, \rho) w(\rho) d\rho \right\| < \varepsilon/3$$

なる如き $w \in \hat{U}_m$ が存在する。この w に対して、

$$\left\| \int_0^t K_P(t, \rho) w(\rho) d\rho - \int_0^t K(t, \rho) w(\rho) d\rho \right\| < \varepsilon/3, \quad P > P_0$$

が成立する。故に、 $\exists w \in \hat{U}_m$;

$$\left\| \int_0^t K(t, \rho) u(\rho) d\rho - \int_0^t K(t, \rho) w(\rho) d\rho \right\| < \varepsilon.$$

これは補題4の成立を示している。

さて、(17) 式を示そう。

$$K_P(s, a_j) = \sum_{i=1}^{N_j^+} \chi_{B_{\frac{\sigma}{R}}^+(a)}(s) b_{\frac{\sigma}{R}}^+ & \text{と表わされる。}$$

(17) 式は、

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{N_j^+} \int_0^t \alpha_j(\rho) \chi_{B_{\frac{\sigma}{R}}^+(a)}(\rho) d\rho b_{\frac{\sigma}{R}}^+; \sum \alpha_j(a) = 1, \alpha_j(s) \geq 0 \right\} \\ (8) \quad & = \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{N_j^+} \int_0^t \alpha_j(\omega) \chi_{B_{\frac{\sigma}{R}}^+(a)}(\rho) d\rho b_{\frac{\sigma}{R}}^+; \sum \alpha_j(a) = 1, \alpha_j(\rho) = 0 \text{ 又 } 1 \right\} \end{aligned}$$

とかけられる。

$I = [0, \infty)$ とおくと、 I は、各 j に対して、

$$I = B_1^j + B_2^j + \cdots + B_{N_j}^j$$

と直和分解される。おのづこ子に対する、和分が存在する。これを $\{I_j\}_{j=1}^N$ とかこう。

$$K(p, q_j) = \sum_{k=1}^N \chi_{I_k}(p) c_k^j$$

とかかれる。

== には、 $\{I_k\}$ は、和分であるから、

$$B_n^j = \sum_{p=1}^M I_{k_p} \quad \left(\begin{matrix} R_p \\ k_p \end{matrix} \right)$$

とかかれるが、 $c_{k_p}^j = b_{k_p}^j$ とおいた。($p=1, 2, \dots, M$)

(8)を示すには、

$$\begin{pmatrix} \int_I \alpha_1(p) \chi_{I_1}(p) dp, & \cdots, & \int_I \alpha_1(p) \chi_{I_N}(p) dp \\ \vdots & & \vdots \\ \int_I \alpha_m(p) \chi_{I_1}(p) dp, & \cdots, & \int_I \alpha_m(p) \chi_{I_N}(p) dp \end{pmatrix}$$

(9)

$$= \begin{pmatrix} \int_I \chi_{I_1}(p) \chi_{I_1}(p) dp, & \cdots, & \int_I \chi_{I_1}(p) \chi_{I_N}(p) dp \\ \vdots & & \vdots \\ \int_I \chi_{I_m}(p) \chi_{I_1}(p) dp, & \cdots, & \int_I \chi_{I_m}(p) \chi_{I_N}(p) dp \end{pmatrix}$$

なる I の分割、

$$I = C_1 + C_2 + \dots + C_m$$

が存在すればいい。なんと存在は

$$A(s) = \sum_{j=1}^N \chi_{C_j}(s) a_j$$

が問題をみたすから。

$$0 \leq \int_I d_1(p) \chi_{I_j}(p) dp \leq \int_I \chi_{I_j}(p) dp$$

$$\equiv C_j^1; \quad \int_I d_1(p) \chi_{I_j}(p) dp = \int_I \chi_{C_j^1}(p) \chi_{I_j}(p) dp.$$

$$C_1 = \sum_{j=1}^N C_j^1 \cap I_j \text{ とおく。同様にして,}$$

$$\int_I d_2(p) \chi_{I_j}(p) dp = \int_I \chi_{I_j^2}(p) \chi_{I_j}(p) dp$$

なる $C_j^2 \subset I - C^1$ が存在する。

$$0 \leq \int_I d_2(p) \chi_{I_j}(p) dp \leq \int_I (1 - d_1(p)) \chi_{I_j}(p) dp$$

$$\leq \int_I \chi_{I - C^1}(p) \chi_{I_j}(p) dp$$

であるから、その存在は保証される。

$$C_2 = \sum_{j=1}^N C_j^2 \cap I_j \text{ とおく。}$$

このようにして、 $C_1, C_2, \dots, C_m$ をとると、

$$I = C_1 + C_2 + \dots + C_m \text{ となる。 (11) が示された。}$$

証了。

§ 3. 定理の証明.

(i). $\Omega(t)$ が、有界凸集合であることは明か。由
集合であることを示そう。 $\Omega(t) \ni w_m$ 且 $w_m \rightarrow w$
($m \rightarrow \infty$) なる X_0 の元の列 $\{w_m\}$ を任意にとろう。各 w_m
 $\in \Omega(t)$ なり、次の如き $\mathcal{F}(U)$ の元 $u_m(s)$ が存在す
る。 $w_m(s) = \int_0^t K(t, s) u_m(s) ds$.

ところで、 $\mathcal{F}(U)$ は、 $L^2([0, t]; X_0)$ の中の有界凸
な閉集合であることは、明かなり、 $\mathcal{F}(U)$ は、
 $L^2([0, t]; X_0)$ の中の弱コンパクト集合である。何ん
と云へば、 X_0 は、分離的且反射的なバナッハ空間であ
るから $L^2([0, t]; X_0)$ 自身、反射的となるからである。
故に、

$$\exists u(s) \in \mathcal{F}(U); \quad u_m(s) \xrightarrow{\text{弱}} u(s).$$

$\int_0^t K(t, \rho) w(\rho) d\rho$ は、 $L^2([0, t]; X_0)$ から X_1 への線型連
続写像なり、 $\int_0^t K(t, \rho) u_m(\rho) d\rho$ は $\int_0^t K(t, \rho) u(\rho) d\rho$
に弱収束する。(かるに、 w_m は w に強収束している
のであるから、

$$w = \int_0^t K(t, \rho) u(\rho) d\rho.$$

これは、 $w \in \Omega(t)$ を示している。これで(i)が
示されたが、iiの証明は、[4] にす、た。

(ii) (b) と補題 4 に従って,

$$\left\{ \int_0^t K(t, \rho) u(\rho) d\rho; u \in \tilde{U}_m \right\} \\ = \overline{\left\{ \int_0^t K(t, \rho) u(\rho) d\rho; u \in \tilde{U}_m^\wedge \right\}}$$

を得る。これに於いて, 次の包含関係を得る。

$$\Omega(t) \supseteq \overline{\Omega(t)^0} \supseteq \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t K(t, \rho) u(\rho) d\rho; u \in \tilde{U}_m \right\}} \\ = \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t K(t, \rho) u(\rho) d\rho; u \in \tilde{U}_m \right\}}.$$

これと, 補題 3 に従って, $\Omega(t) = \overline{\Omega(t)^0}$ を得る。

証了。

§ 4. 近似列の構成.

前章に於いて $\int_0^t K(t, \rho) u(\rho) d\rho$, $u \in \tilde{U}$, は,
 $\int_0^t K(t, \rho) u_m(\rho) d\rho$, $u_m \in \tilde{U}^\wedge$, に於いて近似できる
 ことがわかった。この章では, $\tilde{U} = \{a, -a\}$ の特別の
 場合に, 上の近似列を構成しよう。

$$u(s) \in U = \{ \lambda a + (1-\lambda)(-a); 0 \leq \lambda \leq 1 \}$$

$$d_1(s) = [1+d(s)]/2, \quad d_2(s) = [1-d(s)]/2$$

とすると, $u(s) = d_1(s)a + d_2(s)(-a)$ とおくと,

$$d_1(s), d_2(s) \geq 0 \quad \text{で} \quad d_1(s) + d_2(s) = 1 \quad \text{である。}$$

次に,

$$\int_{\delta^{-1}/m}^{\delta/m} d_1(\rho) d\rho = \int_{\delta^{-1}/m}^{\tau} d\rho \quad \text{for } \tau \in \delta^{-1}/m \leq$$

$\leq \tau \leq \delta/m$ である。

$$\beta_1^{(m)}(\rho) = \begin{cases} 1 & (\delta^{-1}/m \leq \rho < \tau \\ 0 & \tau \leq \rho < \delta/m \end{cases}$$

$\sum \beta_1^{(m)}(\rho) \varepsilon < \eta$, $\beta_2^{(m)}(\rho) = 1 - \beta_1(\rho) \varepsilon < \eta$

$u_m(\rho) = \beta_1^{(m)}(\rho)a + \beta_2^{(m)}(\rho)(-a)$ が求める近似列であることは、容易にわかる。

文 献

- [1] グーラニ-ヒルベルト; “数理物理学の方法”;
- [2] Gårding; On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators, Math. Scand. 1 (1953).
- [3] Paley-Wiener; “Fourier transformations in the complex domain”. Amer. Math. Soc. Coll., New York, (1934)
- [4] Fialb, P.; Infinite dimensional control problem 1: on the closure of the set of attainable states for linear systems.