

キーワード 非線形超音波法, ガイド波, ラム波, 高調波, 分散性, 位相整合

1. はじめに

従来の超音波探傷あるいは超音波材料評価では入射した超音波と同じ周波数帯域の受信信号に着目するのに対して、非線形超音波法では特定の周波数が支配的な超音波を入射し、その整数倍の周波数成分（高調波）、和・差周波数成分、分数倍の周波数成分（分調波）などの非線形スペクトル成分に着目する。検出対象となる材料特性変化や欠陥・損傷がこれらの非線形スペクトル成分に敏感に反映されることが多くの研究で報告された結果、非線形超音波法による健全性評価に期待が集まっている。

これまでのところ、材料の非線形超音波計測には主に縦波（バルク波）が用いられている。これに対して、評価対象が部材表面である場合はレイリー波を用いた非線形超音波計測が行われる。さらに、薄板や積層材などの健全性評価に非線形超音波法を適用する場合には、これらの構造に沿って伝わるガイド波を用いることが考えられる。

バルク波を用いた計測では超音波伝搬速度の周波数依存性（分散性）は通常無視できるのに対して、ガイド波は一般に分散性波動である。また、ガイド波は伝搬速度の異なる複数のモードが同時に伝搬するという特徴（多モード性）を持つ。分散性と多モード性のため、ガイド波はバルク波に比べてかなり複雑な非線形挙動を示す。

ガイド波の中でも特に薄板を伝わるラム波については、高調波発生に関する萌芽的研究が1990年代後半から2000年代にかけて行われ^{1)~5)}、その後非破壊評価への応用に関する研究も進められている。本稿では、ラム波の高調波発生挙動について基礎的事項の解説を試みる。特に、分散性が高調波発生に及ぼす影響に着目し、簡単なモデル方程式を用いてその特徴を示すと同時に、ラム波の高調波振幅が伝搬距離とともに比例的に増大するための条件、および非破壊評価への応用に向けた研究の動向について概説する。

2. 分散性と高調波発生挙動（モデル方程式による考察）

ラム波の高調波発生挙動の理論解析には複雑な数式展開を必要とする。そこで、基本的な物理現象を把握するため、簡単なモデル方程式を用いて、非分散性波動と分散性波動とで高調波発生挙動がどのように異なるかを最初に考察する。

2.1 非分散性媒質における高調波発生挙動

最も基礎的な波動として、均質な非線形弾性体の細棒を伝わる縦振動（図1(a)）の運動方程式

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \left(1 - \beta \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \cdots \cdots (1)$$

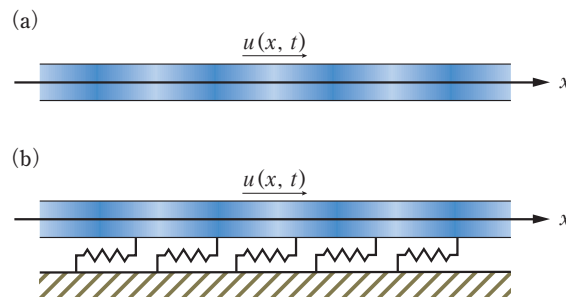


図1 縦振動する棒の模式図

を考える。ここで $u = u(x, t)$ は棒の軸方向変位を表し、 x は空間座標、 t は時間、 ρ は密度、 E は無限小ひずみにおける弾性率（ヤング率）、 β は二次の非線形性を表すパラメータである。ここで、 $|\beta \partial u / \partial x| \ll 1$ のとき、式(1)は線形な波動方程式 $\rho \partial^2 u / \partial t^2 - E \partial^2 u / \partial x^2 = 0$ となる。この場合の分散関係は、波数を k 、角周波数を ω として $k = \omega \sqrt{\rho / E}$ となり、 k と ω は比例する。また、伝搬速度は $c_0 = \omega / k = \sqrt{E / \rho}$ で与えられ、周波数に依らず一定である。

式(1)で $\beta \partial u / \partial x$ を考慮する場合、角周波数 ω_0 の波（基本波）の伝搬に伴って高調波が発生する。非線形性が十分弱い場合を想定して簡単な摂動解析を行い、基本波を

$$u_1(x, t) = A_1 \cos(k_0 x - \omega_0 t), \quad k_0 = \omega_0 \sqrt{\rho / E} \quad \cdots \cdots (2)$$

とすると（ A_1 ：基本波振幅）、角周波数 $2\omega_0$ の変位成分 u_2 を支配する方程式が

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \beta E k_0^3 A_1^2 \sin(2k_0 x - 2\omega_0 t) \quad \cdots (3)$$

と導かれる。上式の解を、 $x=0$ で $u_2=0$ となるように求めると

$$u_2(x, t) = -A_2(x) \cos(2k_0 x - 2\omega_0 t) \quad \cdots \cdots (4)$$

$$A_2(x) = \frac{1}{8} \beta k_0^2 A_1^2 x \quad \cdots \cdots (5)$$

となる。式(3)右辺は基本波に伴う応力の非線形項が高調波に対する波源になることを示している。式(3)右辺の形から、この波源は $2\omega_0 / (2k_0) = \sqrt{E / \rho}$ の速度で x 方向に進む。また、二次高調波成分の伝搬速度も基本波と共通で $c_0 = \sqrt{E / \rho}$ である。したがって、非線形性による波源と高調波が共鳴することになり、高調波成分の振幅は伝搬距離とともに比例的に増大する（実際には、基本波から高調波にエネルギーが徐々に移るため基本波振幅は次第に減少し、高調波振幅も伝搬距離

に比例しなくなる)。

非線形性を有する材料中を縦波が一次的に伝搬する場合、縦波速度 c_L の周波数依存性を無視すれば上記と同じ議論が成り立つ。したがって、式 (5) より、伝搬距離を L とすると

$$\beta = \frac{8c_L^2 A_2}{\omega_0^2 L A_1^2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となり、基本波振幅 A_1 と二次高調波振幅 A_2 を測定することによって材料の非線形パラメータを求めることができる⁶⁾。なお、非破壊評価への応用では、測定波形の振幅スペクトルの基本波成分と二次高調波成分によって上式に相当する量を計算し、材料の非線形性を反映したパラメータとして用いることが多い(この場合、計算結果は計測系の周波数特性を含んでおり、材料特性だけを定量的に評価することにならないことに注意する必要がある)。

2.2 分散性媒質における高調波発生挙動

つぎに、分散性媒質における高調波発生挙動を考える。数式をなるべく簡単にするため、式 (1) に項を1つ付加した次の方程式を考える。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \left(1 - \beta \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Ku \quad \dots\dots\dots (7)$$

付加した項に強いて物理的意味を与えるとすれば、図1(b)に模式的に示すように軸方向変位に対して働く弾性復元力(棒の単位体積あたりのバネ定数が K)を表す。式(7)で $\beta \partial u / \partial x$ を無視すると $\rho \partial^2 u / \partial t^2 - E \partial^2 u / \partial x^2 + Ku = 0$ となり、分散関係として $k(\omega) = \{(\rho \omega^2 - K)/E\}^{1/2}$ が得られる。このとき k と ω は比例せず、位相速度 $c_p(\omega) = \omega/k(\omega)$ は角周波数 ω の関数である。

カットオフ周波数 $\omega_c = \sqrt{K/\rho}$ を超える角周波数 ω_0 に対して $k_0 = k(\omega_0)$ とおき、基本波を式(2)とする。前節と同様の摂動解析を行えば、 $x=0$ で $u_2=0$ となる二次高調波の解は

$$u_2(x, t) = -A'_2(x) \cos(2\bar{k}_0 x - 2\omega_0 t) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$A'_2(x) = \frac{\beta k_0^3 A_1^2}{8\bar{k}_0} \frac{\sin(\Delta k_0 x)}{\Delta k_0} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\Delta k_0 = \frac{k(2\omega_0) - 2k(\omega_0)}{2}, \quad \bar{k}_0 = \frac{k(2\omega_0) + 2k(\omega_0)}{4} \quad \dots\dots (10)$$

と書ける。この結果から明らかなように、二次高調波の振幅は伝搬距離とともに単調には増大しない。その理由は、波数と角周波数が比例関係になく、 $\Delta k_0 \neq 0$ であるためである。式(10)₁は $\Delta k_0 = \omega_0 \{c_p(2\omega_0)^{-1} - c_p(\omega_0)^{-1}\}$ とも書けるから、基本波周波数 ω_0 と高調波周波数 $2\omega_0$ とで位相速度が異なることが理由ともいえる。図2に示すように、高調波振幅は伝搬距離とともに増大、減少を繰り返す。高調波の振幅変動の周期は Δk_0 により決まり、 ω_0 に依存する。分散性が消失する $\omega_c \rightarrow 0$ の極限では、式(8)は式(4)に一致する。このように高調波が伝搬距離とともに増大、減少する現象は、式(7)のモデル方程式に限らず、分散性を有する非線形媒質に共通して見られる特徴である。

3. ラム波の高調波発生挙動

均質、等方な線形弾性板(板厚 $d = 2h$)におけるラム波の

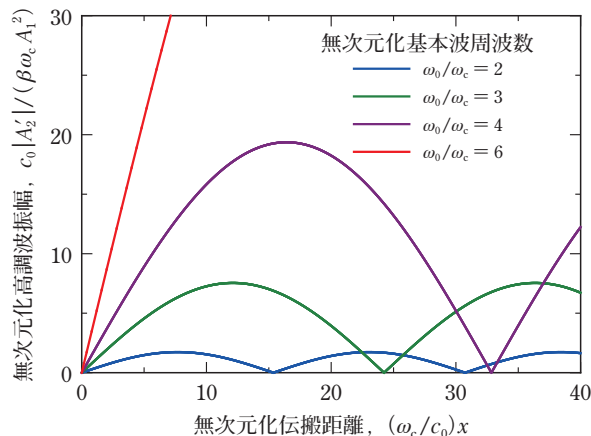


図2 仮定したモデル方程式に対する高調波振幅と伝搬距離の関係

分散関係は対称モード、反対称モードそれぞれに対して、以下のレイリー・ラム周波数方程式で与えられる。

$$(q^2 - k^2)^2 \frac{\sin(qh)}{q} \cos(ph) + 4k^2 p \sin(ph) \cos(qh) = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$(q^2 - k^2)^2 \frac{\sin(ph)}{p} \cos(qh) + 4k^2 q \sin(qh) \cos(ph) = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$p = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2}, \quad q = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで c_L , c_T は縦波、横波の速度、 h は板の半厚である。図3に、アルミニウム板を伝わるラム波の位相速度と周波数 f の関係を示す。それぞれの曲線が1つの伝搬モードを表し、対称モードを $S0, S1, S2, \dots$ 、反対称モードを $A0, A1, A2, \dots$ と表記する。各伝搬モードの位相速度は周波数に依存している。

材料の非線形性が板厚方向に均一、かつ十分に弱い場合を想定して、式(11)、(12)の線形分散関係に基いて高調波発生挙動を考える。角周波数 ω_0 のラム波(基本波ラム波モード)を薄板に伝搬させた場合、非線形性によって発生する二次高調波(角周波数 $2\omega_0$)は、 $\omega = 2\omega_0$ における異なるラム波モード(高調波ラム波モード)の重ね合わせと考えることができる。しかしながら、 $\omega = \omega_0$ と $\omega = 2\omega_0$ とではラム波の伝搬速度が異なるため、高調波を構成する各ラム波モードは伝搬距

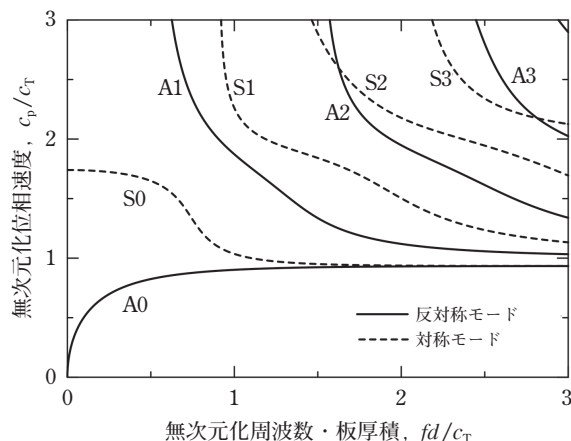


図3 ラム波の分散曲線(アルミニウム板の場合)

離とともに前節に示したような振幅の増大、減少を繰り返す。したがって、ラム波を用いて材料の非線形性を評価する場合、式(6)に示した縦波の場合のような取り扱いはできない。しかしながら、基本波伝搬モードと周波数を適切に選べると、その2倍の周波数で特定の高調波ラム波モードが同じ位相速度を持つことがあり得る。このようなモードと周波数は、ラム波分散曲線群を周波数方向に半分に縮小し、もとの分散曲線群に重ねたときの交点として実際に見つけることができる(図4)。この場合、その高調波ラム波モードは基本波ラム波と同じ位相速度を有し、伝搬距離とともに比例的に増大すると期待できる。このように、基本波と高調波の位相速度が一致することを位相整合(Phase matching)と呼ぶ(文献によってSynchronicityとも呼ばれる)。また、特定の高調波ラム波モードが伝搬距離に比例して増大することを累積的高調波発生(Cumulative harmonic generation)と呼んでいる。この状況で高調波ラム波の振幅を測定すれば、式(6)に準じた形で材料の非線形パラメータの評価を行うことができる(ただし縦波とラム波では非線形パラメータは異なる量である)。本来微弱な高調波振幅を高精度に測定して材料の非線形性を評価するという意味でも、位相整合を満たす条件で測定を行うことは重要である。

基本波ラム波の伝搬に伴う応力の非線形項(式(3)右辺に相当)の板厚分布の特徴により、どの高調波ラム波モードがどの程度の振幅で励起されるか(励起効率)が決まる。特定の基本波ラム波モードにより発生する各高調波ラム波モードの振幅の計算には、詳細な摂動解析^{2), 3)}あるいは数値計算を必要とする。材料の非線形性が板厚方向に均一なとき、単一モードの基本波ラム波から励起される二次高調波ラム波は対称モードのみであり、反対称モードの二次高調波ラム波は理論上励起されないことが知られている⁵⁾。

以上をまとめると、ラム波高調波の振幅が伝搬距離とともに比例的に増大するための条件として、

- ・基本波ラム波モードと高調波ラム波モードの位相速度が一致する(位相整合を満たす)こと
- ・その高調波モードが基本波モードから励起され得ること(あるいは、励起効率ができるだけ大きいこと)

と要約できる。このほか、基本波が時間的、空間的に局在した波束の場合には、基本波モード、高調波モード間の群速度の一致も重要な意味を持っている。

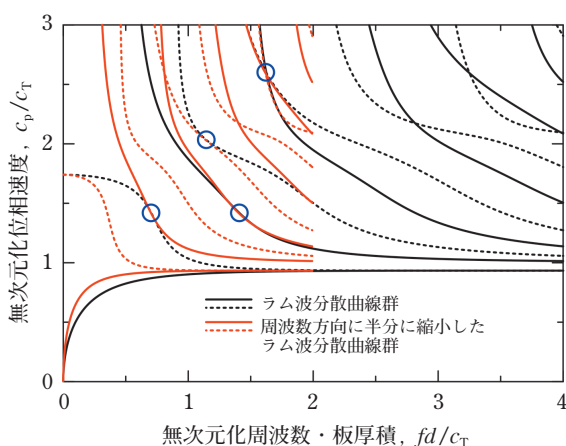


図4 位相整合条件に関する図的解析法

4. ラム波の位相整合条件

4.1 位相整合条件の解析的表現

位相整合を満たす基本波モードや周波数は、上述したように分散曲線群の縮小、重ね合わせにより図的に求めることができ、あるいは $\omega = \omega_0$ と $\omega = 2\omega_0$ における分散関係を連立して数値計算で求めることも可能である。実用上は、位相整合条件を満たす伝搬モードや周波数を解析的に数式で表現できればなお有用である。Deng¹⁾は、位相整合を満たす周波数の条件として、

$$\tan ph = \tan qh \Leftrightarrow qh - ph = k\pi \quad \dots\dots\dots (14)$$

を挙げている(k は整数)。Müllerら⁷⁾は、基本波と二次高調波のラム波分散関係を詳しく解析し、以下の5つの場合に位相整合が成立することを示した。

- ・対称モードと反対称モードの交点 (C)
- ・対称モードで位相速度が縦波速度に一致する点 (L)
- ・1次以上のモードのカットオフ周波数 (O)
- ・1次以上のモードの高周波数極限 (T)
- ・0次モードの高周波数極限 (R)

このうち、(C)と(L)が位相整合を厳密に満たす伝搬モードと周波数を与える。一方、(O)、(T)、(R)は漸近的に位相整合が満たされる場合に対応する(特に(T)と(R)は、分散曲線が一定の位相速度に漸近し、分散性がなくなることに対応する)。

著者ら⁸⁾は、レイリー・ラム周波数方程式を系統的に解析し、基本波およびその整数倍の周波数を持つ高調波モードが共通の位相速度を持つための条件を厳密に導出して、以下に示す(i)～(iv)の4つの場合に整理した。このうち、(ii)と(iii)はそれぞれMüllerらが導いた(L)と(C)に一致し、これらに(i)と(iv)を加えることですべての場合を網羅している(著者らの解析では位相整合が厳密に成立する条件を求めているため、Müllerらが示した(O)、(T)、(R)の漸近的条件は含まれない)。また、Dengによる式(14)の表現は特別な場合として(iii)に含まれている。

4.2 位相整合を満たすラム波モードの特徴

以下に位相整合を満たす(i)～(iv)の各場合の特徴を要約する。以下で N は自然数($N=1, 2, \dots$)を表す。

(i) ラメモード

周波数 $f = \omega/(2\pi)$ と板厚 $d = 2h$ の積が $fd = Nc_T/\sqrt{2}$ で与えられる等間隔の周波数で、S0, A1, S1, A2, ... の各モードが共通の位相速度 $c_p = \sqrt{2}c_T$ を持つ。このとき群速度も $c_g = c_T/\sqrt{2}$ で共通である。板中を $\pm 45^\circ$ 方向に進行する横波の重ね合わせで表されるラム波モードとして知られ⁹⁾、板表面での振動は垂直成分のみを持つ。ただし、この条件で位相整合を満たす二次高調波は必ず反対称モードとなり、前述したように単一モードの基本波からは励起されない(一方、この条件で位相整合を満たす三次高調波が、三次非線形性の効果で励起され得る)。

(ii) 縦波型対称モード

周波数・板厚積が $fd = Nc_{TL}/\sqrt{c_L^2 - c_T^2}$ で与えられる等間隔の周波数で、S1, S2, ... の対称モードが縦波速度に等しい共通の位相速度 $c_p = c_L$ を持つ。群速度(具体的表現は文献⁸⁾を参照)も共通である。板表面での振動は水平成分のみである。

(iii) 対称モードと反対称モードの交点

ともに奇数であるか、あるいはともに偶数である2つの自

然数の比を η とし、 m_0, n_0 (ただし $m_0 < n_0$) がその比を与える最小の自然数として ($\eta = m_0/n_0$), $\eta < \xi \equiv c_T/c_L$ のとき、 $fd = Nn_0c_T\{(1-\eta^2)/(1-\xi^2)\}^{1/2}/2$ で与えられる等間隔の周波数で対称モードと反対称モードの分散曲線が交点を持つ。これらの交点では位相速度が $c_p = c_T\{(1-\eta^2)/(\xi^2-\eta^2)\}^{1/2}$ で共通となる。それぞれの交点でどちらのモードを取るかにより、群速度も共通となる。例えば、 $m_0=1, n_0=3$ を考えると、S2, A4, S6, ... のモードの組と、A2, S4, A6, ... のモードの組でそれぞれ共通の群速度を持つ。板表面での振動は、各交点を特徴づける自然数 $m = Nm_0$ と $n = Nn_0$ がともに偶数のとき対称 (反対称) モードは水平 (垂直) 成分のみ、ともに奇数のとき対称 (反対称) モードは垂直 (水平) 成分のみである。

(iv) 派生型レイリーモード

縦波、横波の速度比が $\xi = c_T/c_L > 0.567...$ を満たすとき、レイリー波速度を c_R として、 $(c_R/c_T)^2$ を与える 3 次代数方程式

$$z^3 - 8z^2 + 8(3 - 2\xi^2)z + 16(\xi^2 - 1) = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

は、弾性体の自由表面を伝わるレイリー波速度のほかに 2 個の正の実数解を持つ。この 2 個の解に対応する位相速度を持つラム波分散曲線上の点が周波数方向に等間隔に存在し、位相整合を満たす (周波数と位相速度の具体的表現は文献⁸⁾を参照のこと)。上記 (i) ~ (iii) と異なり、群速度は共通としない。板表面での振動は垂直、水平両成分を持つ。この

条件で位相整合を満たすのは速度比が上記の条件 $\xi > 0.567...$ (ポアソン比 ν が約 0.263 以下) を満たす材料に限られる。

ラム波分散曲線上で、以上の 4 つの場合に対応する位相速度と周波数をアルミニウム板 ($\xi = 0.49...$) について図 5 に示す。ただし、この材料は (iv) の条件を満たさないため、図 5 (d) は鉄板¹⁾ ($\xi = 0.61...$) について示している。図 5 (a) ~ (d) のそれぞれにおいて、位相整合を満たす位相速度と最小の周波数を数値で示している。これらの位相速度と最小周波数の整数倍を持つラム波を基本波として選べば、任意次数の高調波が位相整合条件を満たしている。

4.3 位相整合を満たす周波数近傍での高調波発生挙動

位相整合条件を満たすラム波を基本波モードとして伝搬させれば、非線形性により励起される高調波モードのうち、位相整合を満たすものが伝搬距離とともに比例的に増大する。

著者ら¹⁰⁾ は時間領域有限差分法による非線形弾性波伝搬解析コードを開発し、ラム波高調波発生挙動の解析に適用している。位相整合を満たす例として、板厚 2mm のアルミニウム合金板に対して (ii) 縦波型対称モードの場合に属する S1 モードの基本波ラム波と S2 モードの二次高調波の組み合わせを考える。S1 モード基本波と S2 モード高調波の板表面での水平方向振幅を A_1, A_2 としたとき、 $A_2/(A_1)^2$ と周波数の関係を図 6 に異なる伝搬距離について示す。位相整合を厳密に満たす周波数は約 1.8MHz である。この周波数付近では位相整合が近似的に満たされ、高調波振幅が距離とともに増大して

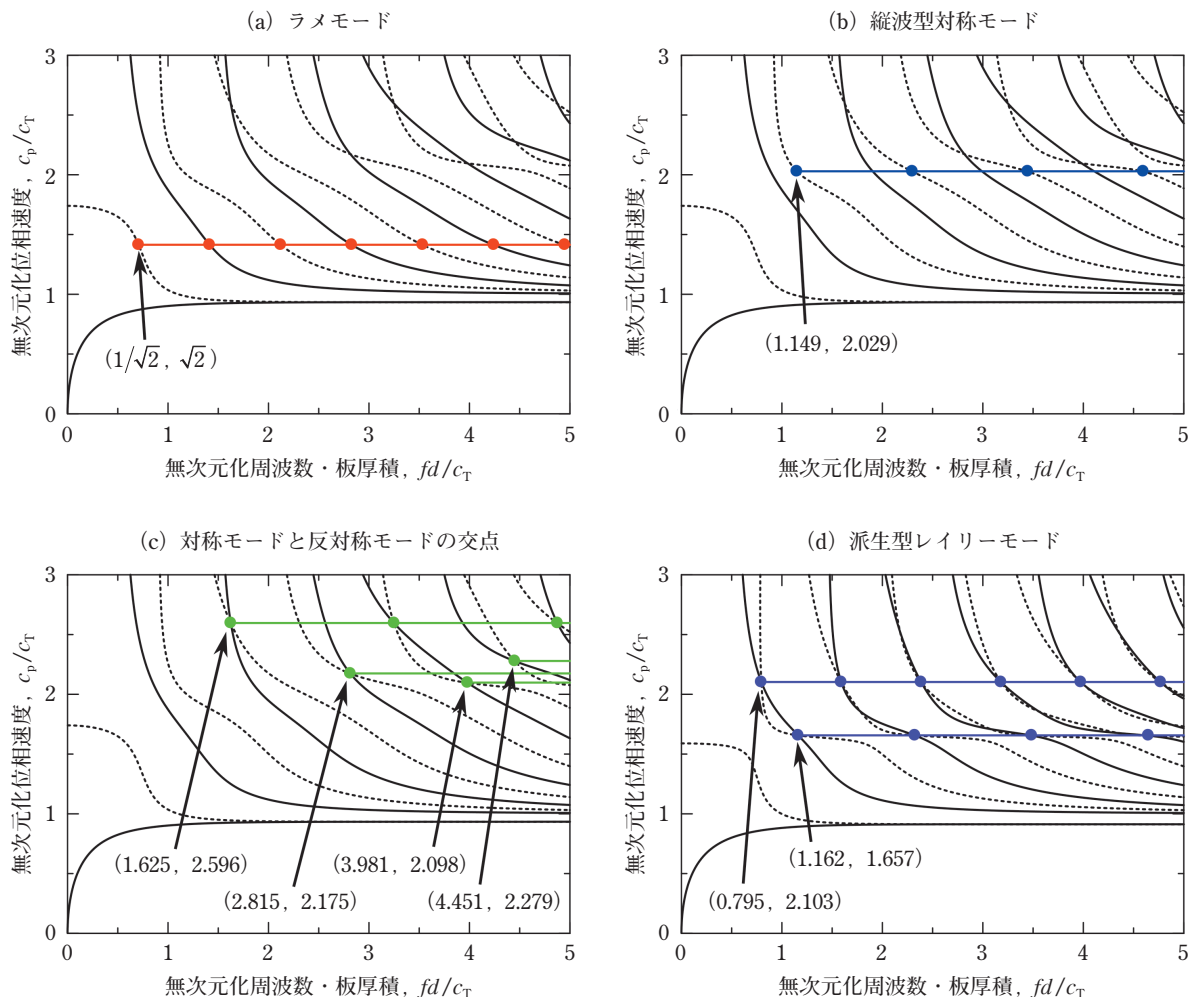


図 5 位相整合条件を満たすラム波の位相速度と周波数

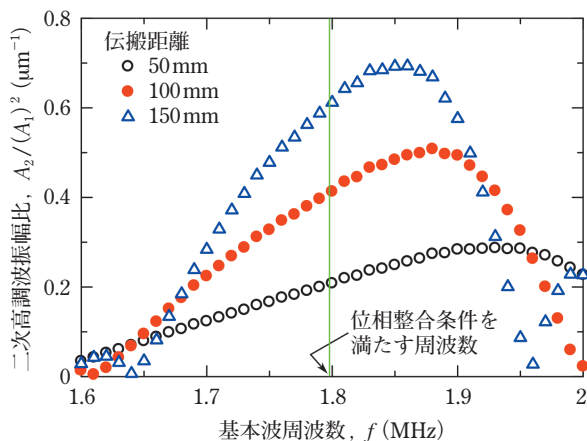


図6 数値解析により求めた高調波振幅と周波数の関係
(S1モードからS2モードへの高調波発生の場合)

いる。摂動解析¹¹⁾によれば、高調波振幅は伝搬距離および基本波による高調波の励起効率で決まり、分散性の影響は、位相整合を満たす周波数近傍以外で高調波振幅を低減させるバンドパスフィルタとして表される。この計算例の場合、図6の周波数範囲では励起効率は基本波周波数に対して単調増加である。有限な伝搬距離では上記バンドパスフィルタのバンド幅も有限であり、その中では周波数が高い方が高調波振幅も大きくなる。このため、図6に示されるように、位相整合を厳密に満たす周波数からずれた周波数で高調波振幅が極大となっている。

5. 非破壊評価への応用に関する研究の動向

特定のラム波モード、周波数を選ぶことにより高調波の振幅が累積的に増大することは1990年代後半以降の理論的研究で認識され^{1)–3)}、実験的検証⁴⁾も行われた。材料評価への応用に向けた取り組みも報告されており、DengとPei¹²⁾はアルミニウム板(板厚1.85mm)の疲労に伴うラム波高調波振幅の変化を実験的に示している。Bermesら¹³⁾は、2種類のアルミニウム合金板(板厚1.6mm)に対して(ii)縦波型対称モードに属するS1モード(2.15MHz)からS2モード(4.30MHz)への高調波発生を測定し、合金組成による高調波振幅の違いを明らかにしている。同様のS1モード(2.225MHz)、S2モード(4.45MHz)の組み合わせを用いて、Pruellら^{14), 15)}はアルミニウム合金板材試験片(板厚1.6mm)の高調波振幅が塑性ひずみや低サイクル疲労損傷とともに単調に増加することを明らかにしている。また、Matlackら¹⁶⁾はアルミニウム合金板に対してS1モードからS2モード、およびS2モードからS4モードへの高調波発生を測定し、両者を比較している。Xiangら¹⁷⁾は、HP40Nb耐熱鋳鋼の板材試験片(板厚5mm)に対して2.45MHzの高次モードラム波(7次モードと記されている)を励起して二次高調波の測定を行い、時効に伴う高調波振幅の変化が硬度値と同様の変化を示すことを報告している。このように、適切な基本波モードと周波数を選択することにより、縦波による非線形超音波計測と同様の材料評価をラム波を用いて行うことが可能である。薄板以外の構造に対する検討例としては、例えばDengら¹⁸⁾が二層接着板の接着不良をガイド波高調波振幅によって検出できることを示している。また、Liuら¹⁹⁾は円筒を伝わるガイド波について累

積的高調波発生挙動を解析している。今後、各種の構造に対してガイド波高調波を用いた材料評価に関する研究が進むと期待される。

6. おわりに

本稿ではラム波の高調波発生挙動に関する基礎的事項について概説した。特に、高調波発生に及ぼす分散性の影響を簡単なモデル方程式により考察し、位相整合を満たすラム波モードの位相速度と周波数に対する解析的表現を紹介するとともに、その周波数付近での高調波発生挙動に関する数値計算例を示した。

一方、今後明らかにすべき課題も多い。ラム波高調波発生の理論解析では二次元平面ひずみ状態を仮定することが多いが、実際の測定では有限寸法の波源(探触子)を用いるため、基本波ラム波は幅方向に振幅分布を持ったビーム状となり、減衰しながら伝搬する。また、実際の測定では単一の基本波モードを伝搬させることは困難なことが多く、複数のラム波モードが同時に伝搬する。このような場合の高調波発生挙動を明らかにすることが、ラム波を用いた非線形超音波計測で材料特性に関する有用な情報を得るために必要である。

最後に、本稿で紹介した著者らの成果は、科学研究費補助金(20360053, 25289005, 24・2517)の支援を得て進めた研究の過程で得られたことを記して謝意を表する。

参考文献

- 1) M. Deng: Cumulative second-harmonic generation of Lamb-mode propagation in a solid plate, J. Appl. Phys., 85, pp.3051-3058, (1999)
- 2) M. Deng: Analysis of second-harmonic generation of Lamb modes using a modal analysis approach, J. Appl. Phys., 94, pp.4152-4159, (2003)
- 3) W. J. N. de Lima and M. F. Hamilton: Finite-amplitude waves in isotropic elastic plates, J. Sound Vib., 265, pp.819-839, (2003)
- 4) M. Deng, P. Wang and X. Lv: Experimental verification of cumulative growth effect of second harmonics of Lamb wave propagation in an elastic plate, Appl. Phys. Lett., 86, 124104, (2005)
- 5) A. Srivastava and F. Lanza di Scalea: On the existence of antisymmetric or symmetric Lamb waves at nonlinear higher harmonics, J. Sound Vib., 323, pp.932-943, (2009)
- 6) J. H. Cantrell: Fundamentals and applications of nonlinear ultrasonic nondestructive evaluation, Ultrasonic Nondestructive Evaluation (ed. T. Kundu), CRC Press, pp.363-433, (2004)
- 7) M. F. Müller, J.-Y. Kim, J. Qu and L. J. Jacobs: Characteristics of second harmonic generation of Lamb waves in nonlinear elastic plates, J. Acoust. Soc. Am., 127, pp.2141-2152, (2010)
- 8) N. Matsuda and S. Biwa: Phase and group velocity matching for cumulative harmonic generation in Lamb waves, J. Appl. Phys., 109, 094903, (2011)
- 9) K. F. Graff: Wave Motion in Elastic Solids, Dover, pp.448-449, (1991)
- 10) N. Matsuda and S. Biwa: A finite-difference time-domain technique for nonlinear elastic media and its application to nonlinear Lamb wave propagation, Jpn. J. Appl. Phys., 51, 07GB14, (2012)
- 11) N. Matsuda and S. Biwa: Frequency dependence of second-

- harmonic generation in Lamb waves, J. Nondestruct. Eval., 33, pp.169-177, (2014)
- 12) M. Deng and J. Pei : Assessment of accumulated fatigue damage in solid plates using nonlinear Lamb wave approach, Appl. Phys. Lett., 90, 121902, (2007)
 - 13) C. Bermes, J.-Y. Kim, J. Qu and L. J. Jacobs : Experimental characterization of material nonlinearity using Lamb waves, Appl. Phys. Lett., 90, 021901, (2007)
 - 14) C. Pruell, J.-Y. Kim, J. Qu and L. J. Jacobs : Evaluation of plasticity driven material damage using Lamb waves, Appl. Phys. Lett., 91, 231911, (2007)
 - 15) C. Pruell, J.-Y. Kim, J. Qu and L. J. Jacobs : Evaluation of fatigue damage using nonlinear guided waves, Smart Mater. Struct., 18, 035003, (2009)
 - 16) K. H. Matlack, J.-Y. Kim, L. J. Jacobs and J. Qu : Experimental characterization of efficient second harmonic generation of Lamb wave modes in a nonlinear elastic isotropic plate, J. Appl. Phys., 109, 014905, (2011)
 - 17) Y. Xiang, M. Deng, F.-Z. Xuan and C.-J. Liu : Cumulative second-harmonic analysis of ultrasonic Lamb waves for ageing behavior study of modified-HP austenite steel, Ultrasonics, 51, pp.974-981, (2011)
 - 18) M. Deng, P. Wang and X. Lv : Nondestructive evaluation of adhesive joints in layered structures using nonlinear measurements of second harmonics of ultrasonic Lamb waves, 2004 IEEE Int. UFFC Joint 50th Anniv. Conf., pp.2291-2294, (2004)
 - 19) Y. Liu, E. Khajeh, C. J. Lissenden and J. L. Rose : Interaction of torsional and longitudinal guided waves in weakly nonlinear circular cylinders, J. Acoust. Soc. Am., 133, pp.2541-2553, (2013)



琵琶 志朗 京都大学 (615-8540 京都市西京区京都大学桂) 大学院工学研究科航空宇宙工学専攻 教授

1995 年京都大学助手, 1998 年名古屋大学講師, 2004 年京都大学助教授, 2007 年同准教授を経て, 2009 年 4 月より京都大学教授。固体力学分野の教育・研究に従事



松田 直樹 京都大学 (615-8540 京都市西京区京都大学桂) 大学院工学研究科機械理工学専攻 助教

2012 年より日本学術振興会特別研究員 DC1。材料非線形性によるガイド波の高調波発生挙動の研究に携わる。2015 年 4 月より現職。現在は複合材料中の超音波伝搬挙動の研究に従事

<http://ams.me.kyoto-u.ac.jp/>