

ジーゲル保型形式に付随するディリクレ級数

九大 理 山崎 正 (Tadashi Yamazaki)

1 Rankin-Selberg の方法

まず古典的な保型形式に対する Rankin-Selberg の方法を復習する. $SL(2, \mathbf{Z})$ に関する重さ ℓ の cusp 形式 $f(z), h(z)$ を考え, その Fourier 展開を

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \mathbf{e}(mz)$$

$$h(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \mathbf{e}(mz)$$

とする. ここで $\mathbf{e}(x) = e^{2\pi i x}$. このとき Dirichlet 級数

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \bar{b}_m m^{-s}$$

の解析的性質は E_s をある正則ではない重さ 0 の Eisenstein 級数として Petersson 内積 (fE_s, h) を調べればよいというのが Rankin の方法であった. ここではこの方法が Siegel cusp 形式に対してもそのまま実行できることを示す. 即ち Siegel cusp 形式 $F(\tau), H(\tau)$ を取りその Fourier(-Jacobi) 展開を

$$F(\tau) = \sum_{T>0} a(T) \mathbf{e}(Tr(T\tau))$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau_1, \tau_3) \mathbf{e}(m\tau_4)$$

$$H(\tau) = \sum_{T>0} b(T) \mathbf{e}(Tr(T\tau))$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} h_m(\tau_1, \tau_3) \mathbf{e}(m\tau_4)$$

とする. ここで $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & \tau_4 \end{pmatrix}$ は n 次 Siegel 上半空間 H_n の点で $\tau_1 \in H_{n-1}, \tau_4 \in H_1$ である. f_m と h_m の Jacobi 形式としての Petersson の内積を $\langle f_m, h_m \rangle$ と書くとき Dirichlet 級数

$$(1) \quad \Sigma_{T/\sim} \frac{a(T)\bar{b}(T)}{\varepsilon(T)(\det T)^s}$$

$$(n) \quad \Sigma_{m=1}^{\infty} \langle f_m, h_m \rangle m^{-s}$$

などの解析的性質が重さ 0 の Eisenstein 級数を用いてわかる. 級数 (1) は $n = 2$ のときに Maass[5], 一般の n については黒川氏 (unpublished), 級数 (n) は最近 $n = 2$ に対して Kohnen-Skoruppa[3] により特にその数論的性質が調べられている.

2 Eisenstein 級数

Eisenstein 級数の一般論は Langlands [4], Harish-Chandra [1] により展開されているが, ここではその流れをくむ Kalinin [2] に従う. 記号はほぼ全面的に [2] のものを定義無しに用いる. 特に $G = Sp(n, \mathbf{R})$ は n 次 Symplectic 群, $\Gamma = Sp(n, \mathbf{Z})$ は Siegel Modular 群である. しかし都合により simple roots の系 $\Sigma^\circ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ としては

$$\alpha_1 = 2\epsilon_1, \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_1, \dots, \alpha_n = \epsilon_n - \epsilon_{n-1}$$

を取る. このとき fundamental weight は

$$\bar{\omega}_i = \epsilon_i + \epsilon_{i+1} + \dots + \epsilon_n \quad 1 \leq i \leq n$$

となることに注意する. この simple roots の系 Σ° に対応する Borel pair (P, A) は

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G; c = 0, a = \text{lowertriangular} \right\}$$

で与えられる. P の Langlands 分解を $P = MAU$, $\underline{a}$ を A の Lie 環, $\log : A \rightarrow \underline{a}$ を指数写像の逆写像とする. $\underline{a}$ の複素化の双対空間 $\underline{a}_\mathbb{C}^*$ の元 λ と $a \in A$ に対し $\omega_\lambda(a) = e^{\lambda(\log a)}$ と書く. このとき Eisenstein 級数は G の元 g に対し

$$E(P|A : \lambda : g) = \sum_{\gamma \in \Gamma/T \cap P} \omega_{-(\lambda+\rho)}(a(g\gamma))$$

で定義される. ここで ρ は正 roots の和の半分, $a(g)$ は g を $g = kma(g)u$, $k \in K, m \in M, a(g) \in A, u \in U$ と分解したときの A 成分である. また

$$(\underline{a}_\mathbb{C}^*)^- = \{\lambda \in \underline{a}_\mathbb{C}^*; \langle \operatorname{Re}(\lambda) - \rho, \alpha \rangle > 0 \text{ for } \forall \alpha \in \Sigma^\circ\}$$

とするとき上式の右辺は任意の $g \in G$ と $\lambda \in (\underline{a}_\mathbb{C}^*)^-$ に対し絶対収束する. fundamental weights による $\underline{a}_\mathbb{C}^*$ の座標を $\lambda : \mathbb{C}^n \rightarrow \underline{a}_\mathbb{C}^*$ とする. $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ と $g \in G$ に対し

$$E(z, g) = E(P|A : \lambda(z) : g)$$

と置けば, これは $\operatorname{Re}(z_i) > 1$ ($1 \leq i \leq n$) において正則である. 整数 r , ($1 \leq r \leq n$) に対し $z_r = 1$ 以外のところで留数を取り

$$\tilde{E}_r(z_r, g) = \operatorname{Res}_{z_n=1} \dots \widehat{\operatorname{Res}_{z_r=1}} \dots \operatorname{Res}_{z_1=1} E(z_1, \dots, z_n : g)$$

と置く.

命題 1 $\tilde{E}_r$ は $Re(z_r) > 1$ で正則で全平面に有理型に解析接続され関数等式

$$\tilde{E}_r(s, g) = c_r(s) \tilde{E}_r(2 - n - r - s, g)$$

を満たす. ここで

$$c_r(s) = \prod_{i=1}^{2r-1} \frac{\xi(s+i-1)}{\xi(s+n-r+i)} \prod_{j=r}^{n-1} \frac{\xi(2s+2j-1)}{\xi(2s+n+j-1)},$$

$$\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

注意 1 r が特別な場合 c_r は簡約される. 例えば

$$c_n(s) = \frac{\xi(s)}{\xi(s+2n-1)}$$

$$c_1(s) = \frac{\xi(s)}{\xi(s+n)} \prod_{j=1}^{[n/2]} \frac{\xi(2s+2j-1)}{\xi(2s+2n-2j)}$$

Σ° の部分集合 $\Sigma_r^\circ = \Sigma^\circ - \{\alpha_r\}$ に対応する極大 parabolic 部分群を P_r とする. $s \in \mathbf{C}, \tau \in H_n$ に対し

$$E_r(s, \tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma \cap P_r \backslash \Gamma} \left(\frac{\det \text{Im}(\gamma < \tau >)}{\det(\text{Im}(\gamma < \tau >))_{r-1}} \right)^s$$

と置く. ここで n 次正方行列 X に対し $(X)_{r-1}$ は左上の $(r-1) \times (r-1)$ 部分から成る主小行列を表す. 上式の右辺は $Re(s)$ が十分大きいところで絶対収束する.

命題 2 $g \in G$ に対し $\tau = g^{-1} \cdot \langle i1_n \rangle \in H_n$ とし ${}^*E_r(s, g) = E_r(s, \tau)$ と置く. このとき

$${}^*E_r(s, g) = \prod_{j=1}^{r-1} \xi(2j) \prod_{j=2}^{n-r+1} \xi(j) \tilde{E}_r(2s - n - r + 1, g)$$

が成立する.

以上より次を得る.

命題 3 $E_r(s, g)$ は $\operatorname{Re}(s) > \frac{n+r}{2}$ で正則で全平面に有理型に解析接続され関数等式

$$E_r\left(\frac{n+r}{2} - s, g\right) = c_r(1 - 2s)E_r(s, g)$$

を満たす.

$r = n$ の場合には Weyl 群の計算により留数がわかり次が成立する.

命題 4 関数

$$\xi(2s)E_n(s, \tau)$$

は変換 $s \mapsto n - s$ で不変であり, $s = n$ と $s = 0$ での 1 位の極を除いて全平面で正則, そして $s = n$ での留数は 1 である.

注意 2 Kalinin [2] はこれらのことを $r = 1$ の場合にやっている.

3 Zeta 関数

一般の r に対しても同様であるからここでは $r = n$ の場合のみを書く. F, H を重さ ℓ の Siegel cusp 形式としその Fourier-Jacobi 展開を

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau_1, \tau_3) \mathbf{e}(m\tau_4) \\ H(\tau) &= \sum_{m=1}^{\infty} h_m(\tau_1, \tau_3) \mathbf{e}(m\tau_4) \end{aligned}$$

とする. ここで $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & \tau_4 \end{pmatrix}$ は H_n の点で $\tau_1 \in H_{n-1}, \tau_4 \in H_1$,
 , そして f_m, h_m は index m の Jacobi 形式でこれらの Petersson
 内積を $\langle f_m, h_m \rangle$ と書く [6].

補題 1 Dirichlet 級数

$$D_{F,H}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f_m, h_m \rangle m^{-s}$$

は $\operatorname{Re}(s) > \ell + 1$ に対し絶対収束する.

前節の Eisenstein 級数 $E_n(s, \tau)$ を用いて $F(\tau)E_n(s, \tau)$ と $H(\tau)$
 の内積を計算することにより次を得る.

命題 5 F, H を重さ ℓ の Siegel cusp 形式とする. このとき

$$\langle F(\tau)E_n(s, \tau), H(\tau) \rangle = (4\pi)^{-(s+\ell-n)} \Gamma(s+\ell-n) D_{F,H}(s+\ell-n)$$

が $\operatorname{Re}(s) > n + 1$ に対して成立する.

これを前節最後の命題と組み合わせれば Dirichlet 級数 $D_{F,H}(s)$
 の解析接続や関数等式が得られる.

注意 3 Kohnen-Skoruppa は [3] において Dirichlet 級数 $D_{F,H}(s)$
 を $n = r = 2$ に対し詳しく調べている. 特に F が Maass 空間
 に入る Hecke 作用素の同時固有関数の時, $D_{F,F}(s)$ は初等因
 子を除いて Andrianov の spinor L -関数と一致することを示
 している.

参考文献

- [1] Harish-Chandra. *Automorphic forms on semisimple Lie groups*. Volume 62 of *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, 1968.
- [2] V.L. Kalinin. Eisenstein series on the symplectic group. *Math. USSR Sbornic*, 32:449–476, 1977.
- [3] W Kohnen and N.-P. Skoruppa. *A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two*. Technical Report MPI / 88-22, Max-Planck-Institut, 1988.
- [4] R.P. Langlands. *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*. Volume 544 of *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, 1976.
- [5] Hans Maass. Dirichletsche reihen und modulformen zweiten grades. *Acta Arithmetica*, 24:223–238, 1973.
- [6] Atsushi Murase. L-functions attached to jacobi forms of degree n , part i. 1988. preprint.