

チャールズ・バベッジの “Essays on the Philosophy of Analysis” のうち “Of Generalization” について On Charles Babbage’s “Of Genralization” in his “Essays on the Philosophy of Analysis”

By

野村恒彦

Tsunehiko Nomura *

Abstract

Charles Babbage was an English polymath in the Victorian age. In his student days at Cambridge University, he organized the Analytical Society with his colleagues J. F. W. Herschel and George Peacock. The purpose of this Society was to introduce the Continental notations to England. Babbage left an unpublished manuscript entitled “Essays on the Philosophy of Analysis”. This manuscript is very important to understand English mathematical scene in his age. “Of Generalization” is the fifth essay in the manuscript. In this essay Babbage considered generalization compared with induction and analogy. And Babbage explained the means of generalization by the examples of Laplace’s and Spence’s treatise.

§ 1. はじめに

筆者はこれまでにチャールズ・バベッジ (Charles Babbage) による “Essays on the Philosophy of Analysis”¹ のうち “Analysis of the Essay of Games” (f.4r-f.15v)、 “Of Games” (f.16r-f.40v)、 “General Notions Respecting Analysis” (f.41r-f.55r)、 “Of Analogy” (f.83r-91r)、 “Of Artifice” (f.92r-123r) 及び “Merits for Invention” (f.56r-67r) 及び “Of Induction” (f.56r-f.67v) について報告しているが、今回報告するのは “Of Generalization” で、これは “Essays on the Philosophy of Analysis” の第 5 番目の章にあたる。本章の内容については、その章題が示すとおり、一般化についての議論がなされている。

Received November 30, 2017. Revised March 16, 2018.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 01A27, 01A45

Key Words: History of Mathematics, Charles Babbage

*神戸大学 Kobe University, Kobe, 657-8501 JAPAN

email: noraneke@portnet.ne.jp

¹Ch. Babbage, “Essays on the Philosophy of Analysis”, British Museum Additional Manuscripts 37202.

なお“Essays on the Philosophy of Analysis”の成立については、以前に報告しているところであり、ここではふれない。また“Essays on the Philosophy of Analysis”は大部な手稿となっているため、各章ごとに論じる形態を採ることにした。従って全体を俯瞰することを目的とした論考は、すべての章を論じた後に行いたいと考える。

§ 2. “Essays on the Philosophy of Analysis”について

“Essays on the Philosophy of Analysis”はチャールズ・バベッジ (Charles Babbage) が残した未刊行の手稿である。バベッジはケンブリッジ大学生時代に解析協会 (The Analytical Society) を友人たちと組織して、大陸解析学を導入しようとした。この解析協会についての意義や歴史については、既に発表している拙稿を参照願いたい²。1821 年頃成立した本手稿は³、バベッジの関心がどのようなものであったかが伺えるとともに、19 世紀初頭の英国数学の状況を論じるための貴重な文献である。

“Essays on the Philosophy of Analysis”にはいくつかの章があるが、それぞれに付された題名を前回の報告同様掲げることとする (表 1)。これらを見てもその主題は多岐にわたっており、バベッジの関心の広さが確かめられる。

表 1: “Essays on the Philosophy of Analysis” のフォリオに付された章題

章の題名
Title
Index
Analysis of the Essay of Games
Of Games
General Notions Respecting Analysis
Of Induction
Of Generalization
Of Analogy
Of Artifices
Of Questions Requiring the Invention of New Modes of Analysis
Merits for Invention and the Philosophy of Analysis
On Notation
Analogy
Induction

²野村恒彦, 「チャールズ・バベッジと解析協会 (Analytical Society)」, 『京都大学数理解析研究所講究録』, No.1513, 2006, pp.36-45.

³J. M. Dubbey, *The Mathematical Works of Charles Babbage* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978, 2nd 2004), p.93.

Des rapprochements
 Of Artifices
 Abstraction
 Notation
 Games
 Notation
 Continuity
 Preface
 Invention

§ 3. 先行研究について

筆者の知る限りにおいては、“Essays on the Philosophy of Analysis”全体の先行研究は、ダビーによる *The Mathematical Works of Charles Babbage* のみである⁴。ただし、“Essays on the Philosophy of Analysis”の一部の章について論じたものは他の著者による論文がいくつかあるが、これら論文の大部分は本手稿の第3番目の章である“General Notions Respecting Analysis”を論じたものである。その理由は、ダビーがその著書で“General Notions Respecting Analysis”とピーコックの *A Treatise on Algebra* との関連性を最初に指摘したことによるものである⁵。

ダビーは本章“Of Generalization”については、前の“Of Induction”及び“Of Analogy”と一体となっていると指摘した後、その内容について概説している⁶。

§ 4. “Of Generalization”の構成及び内容について

“Of Generalization”は“Essays on the Philosophy of Analysis”の第5番目の章にあたる。本章は今までに発表した“Essays on the Philosophy of Analysis”の他の章に比べて数式が非常に少ないものとなっている。特に前半部分にあたるフォリオ 69 から 75 までは数式は全く見あたらない。

また、バベッジによる一般化 (Generalization) についての議論は、前章の帰納法、次章の類推とを比較検討した議論になっていることに留意する必要がある。

“Of Generalization”では次のような議論がなされている。

- (1) Generalization の意味についての議論
- (2) Generalization の例についての議論

⁴J. M. Dubbey, *The Mathematical Works of Charles Babbage* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978, 2nd 2004).

⁵Dubbey, *op. cit.*, pp.100-9.

⁶Dubbey, *op. cit.*, pp.109-13.

(3) スペンス (William Spence) の *Mathematical Essays* についての議論

これらの議論の境界は明確なものではなく、議論の対象からの区分であることに留意していただきたい。

§ 4.1. Generalization の意味についての議論

まず本章の冒頭でバベッジは、一般化の意義について、「一般化という手続きは、役に立つ、あるいは効力のある他の手段よりもずっと利便性や有用性を持つ他の手段よりも、しばしば数学者によって用いられる⁷」と主張する。

続いて一般化と帰納法の効果の差異についての議論が、それらを対比することによってなされる。その中で、一般化とは研究の対象となる知識のいくらかを含む上部構造の形成を見出す方法であるのに対し、帰納法は個々の例の探求に起源を持つ⁸ものであるとされる。そして次に以下のような重要な指摘がある⁹。

帰納法は個々のもの (Individuals) から種 (Species) を形成することに用いられ、一般化は種 (Species) から属 (Genera)、属 (Genus) からより高い他のものへと進歩させるのによく使われる。

さらに一般化と抽象化の区分が、次のようになされる¹⁰。

(帰納法の) 手順の第一の部分は多くの個々の例を集めて比較することからなる。そしてそれら全てに共通する特性や特徴を決定することにある。これは言語における一般的用語に到達する手順や、抽象化の名称が与えられた精神的な作用に正確に類似している。そしてその限りにおいて、一般化 (Generalization) と抽象化 (Abstraction) は同意語である。

その後バベッジは、類推 (Analogy) と一般化の手順との境界を定めるのは、帰納法と一般化の手順との境界を定めることよりは明確であると述べ、類推は作用の原理や方法を異なった部類へ伝達する一方、一般化は同じ一つの部類で構成されている全ての種を保持することを受け入れる¹¹と述べ、次の重要な指摘がなされる¹²。

一般化というのは、しばしば帰納と類推という方法により成し遂げられた探求の結果である。

この言葉の後に一般化の実例をバベッジは示すことになるが、それは次節で説明する。

§ 4.2. Generalization の例についての議論

バベッジはラプラスやスペンスの例を用いて、一般化について説明している。ラプラスの例は二項定理についての論議を用いており、スペンスの例は彼の論文で言及されている

⁷Babbage, *op.cit.*, f.69r.

⁸*Ibid.*, f.70r-71r.

⁹*Ibid.*, f.70v.

¹⁰*Ibid.*, f.72r.

¹¹*Ibid.*, f.74r.

¹²*Ibid.*, f.75r.

ものを用いて説明を行っている¹³。特にスペンス (William Spence) の例による説明は重要なものであると考えられるので、次節で詳述することとし、ここではまずラプラスによる議論について考える。

バベッジはまずラプラスの工夫として、冪が n である二項式 $(1+x)^n$ の係数の 2 乗の和すなわち次式は、冪が $2n$ の二項式すなわち $(1+x)^{2n}$ の展開の中央の項の係数になると説明する¹⁴。

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}\right)^2 + \dots$$

そしてこの結果から、もし $(1+ax+x^2)^n = A + A_1x + A_2x^2 + \dots$ とすれば、 $A^2 + A_1^2 + A_2^2 + \dots$ が、 $(1+ax+x^2)^n$ の中央の項の係数になると拡張されることになり、これが純粋な一般化の手順であると述べる¹⁵。

さらに、一般化の手順により、 $(1+ax+bx^2+\dots+bx^{k-2}+ax^{k-1}+x^k)^n = A + A_1x + A_2x^2 + \dots$ とすれば、 $A^2 + A_1^2 + A_2^2 + \dots$ は、 $(1+ax+\dots+ax^{k-1}+x^k)^{2n}$ の中央の項の係数に等しくなると拡張することができると主張する¹⁶。

§ 4.3. スペンス (William Spence) の *Mathematical Essays* についての議論

次にバベッジが本文中に例として用いているものは、スペンスによる論文 “Essay on the Theory of the Various Orders of Logarithmic Transcendents” と “Investigation of the Properties of some Analytical Functions” である。このうち後者については、出典を示している¹⁷。

バベッジが本文中で紹介しているスペンスの論文集は、スペンス死去後の 1819 年に刊行された *Mathematical Essays* である¹⁸。編者はバベッジの友人の J. F. W. ハーシェルであり、ハーシェルは序文と論文 II の注意書きを書いている。

ハーシェルは論文 II の注意書きの中で、バベッジによる Calculus of Function についての論文について言及している¹⁹ほか、バベッジによる Calculus of Function と類似した議論がなされている²⁰。

表 2: スペンスの *Mathematical Essays* の内容

-
1. Essay on the Theory of the Various Orders of Logarithmic Transcendents.
 2. Investigation of the Properties of some Analytical Functions.
-

¹³ *Ibid.*, f.76r-82r.

¹⁴ 本式 3 項目の $(\frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2})^2$ は現在の表記では $(\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2})^2$ となるが、ここではバベッジの表記に従った。

¹⁵ *Ibid.*, f.76r.

¹⁶ *Ibid.*, f.76r.

¹⁷ *Ibid.*, f.81r.

¹⁸ W. Spence, *Mathematical Essays*, Edited by J. F. W. Herschel, Thomas and George Underwood, 1819.

¹⁹ *Ibid.*, p.154.

²⁰ *Ibid.*, p.152-3.

3. On the Integration of the Linear Differential Equations, and those of Finite Differences.
 4. Demonstration of certain Theorems relative to the Tangents, &c. of Multiple Arcs.
 5. On a Method of eliminating the Values of any Number of Quantities involved in Equations of the first Degree.
 6. Some Theorems relative to the Summation of Series.
 7. Outlines of a Theory of Algebraical Equations, Deduced from the Principles of Harriott and Extended to the Fluxional or Differential Calculus.
-

バベッジが本文中に例としてあげているのは、第1章の”Essay on the Theory of the Various Orders of Logarithmic Transcendents”で議論されている次のような級数である。バベッジの草稿には記載がないが、スペンスは ${}^nL(1 \pm x)$ という級数について次のようにして n が5までの説明を行っている。

$${}^0L(1 \pm x) = \pm x - x^2 \pm x^3 - x^4 \pm \&c.$$

$${}^1L(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \&c.$$

$${}^2L(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2^2} \pm \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} \pm \&c.$$

そして、これらには次のような関係があるとするが、バベッジは複号は使用せずにプラスだけの記号を用いて記述している。

$${}^1L(1+x) = \int \frac{dx}{1+x}$$

$${}^2L(1+x) = \int \frac{dx}{x} {}^1L(1+x)$$

$${}^3L(1+x) = \int \frac{dx}{x} {}^2L(1+x)$$

そしてバベッジは、これらがスペンスによる一般化の例であると指摘する²¹。またバベッジは他にも、スペンスの同書による次のような例も紹介している。

$${}^1L(1+x) - {}^1L(1+\frac{1}{x}) = {}^1Lx$$

$${}^2L(1+x) + {}^2L(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{2} {}^1L^2(x) + 2{}^2L(x)$$

²¹Babbage, *op. cit.*, f.80r.

$${}^3L(1+x) - {}^3L(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{2 \cdot 3} {}^1L^3(x) + 2 {}^2L(x) {}^1L(x)$$

これらの式をスペンスは一般化して次式を得るとする。

$${}^nL(1+x) + (-1)^n {}^nL(1+\frac{1}{x})$$

そしてスペンスは、これは次の式に等しいと主張する²²。

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} {}^1L^n(x) + \frac{{}^2L(x)}{1 \cdot 2 \cdots n - 2} {}^1L^{n-2}(x) + \frac{{}^4L(x)}{1 \cdot 2 \cdots n - 4} {}^1L^{n-4}(x) + \cdots$$

§5. まとめ

「一般化」の章は興味深いものではなく、なぜこの章を含めなければならなかったのか、全く理解に苦しむとダビーは酷評している²³が、本章にはバベッジの帰納法 (Induction) や類推 (Analogy) についての議論が含まれているほか、一般化、帰納法及び類推の相違点が示されており、非常に重要な章であると考ええる。

本章の前にある章は“Of Induction”であり、本章に続く章は“Of Analogy”である。本論文においては“Of Generalization”におけるバベッジの議論のみを取り上げたが、ダビーは先に掲げた2章及び本章の議論は一体的なものであり、まとめて論じるべきものであると指摘している。このダビーの指摘のように、この3章について一体的に論じたいと考えていたが、果たせなかった。以前に書いたとおり、これらは“Essays on the Philosophy of Analysis”全体の評価を行う前に別途論じたいと考えており、今後の継続した課題としたい。

参考文献

- [1] Babbage, Ch., “Essays on the Philosophy of Analysis”, British Museum Additional Manuscripts 37202.
- [2] Dubbey, J. M., *The Mathematical Works of Charles Babbage*, Cambridge University Press, 1978, 2nd 2004.
- [3] Spence, W., *Mathematical Essays*, Edited by J. F. W. Harschel, Thomas and George Underwood, 1819.
- [4] 野村恒彦, 「チャールズ・バベッジと解析協会 (Analytical Society)」, 『京都大学数理解析研究所講義録』, No.1513, 2006, pp. 36-45.

²²Babbage, *Ibid.*, f.80r.

²³Dubbey, *op. cit.*, p.113.