

和積定理と Reduced Maps について

東海大・理・情報数理 成島 弘

non-isomorphic reduced maps の数え上げを具体例として、置換群作用の数え上げの定理と束作用の数え上げの定理との融合を模索する。つぎに、それらの基本的な定理を述べる。 Ω を対象の空でない集合とし、 $G(\Omega)$ を Ω 上の置換群とする (Ω が明らかでないときは単に G とかく)。 Ω の任意の 2 元 x, y に対して、 $x \equiv y \iff \exists \alpha \in G, \alpha(x) = y$ と定めるとき、 $\equiv$ は同値関係となる。 $\equiv$ による同値類の集合を Ω/G で表わし、 Ω/G の x を含むクラス (軌道) を C_x で示す。また、 $x \in \Omega$ を不変に保つ G の部分群、すなわち、 $\{\alpha \in G \mid \alpha(x) = x\}$ を G_x で示す。つぎの補題 1 と定理 1 はよく知られてゐる [1, 2]。

補題 1 $m(C_x) \times m(G_x) = m(G)$

ここで、集合 X に対して $m(X)$ は X の個数を示す。

定理 1
$$m(\Omega/G) = (1/m(G)) \sum_{\alpha \in G} m(H_\alpha)$$

$$H_\alpha = \{x \in \Omega \mid \alpha(x) = x\}$$

$(L, \circ)$ を有限半束とし、上半束ならば $\circ$ は "join", 下半束ならば "meet" を表わすものとする。 $f: L \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ が、

$$f(x \circ y) \supseteq f(x) \cap f(y) \quad (\text{双対のとき}, f(x \circ y) \subseteq f(x) \cup f(y))$$

を満たすとき、 f を弱射 (weak morphism) とする。

定理 2 $f: L \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ が弱射であるとき、

$$m\left(\bigcup_{a \in L} f(a)\right) = \sum_{c \in C} (-1)^{l(c)} \left(\bigcap_{a \in c} f(a)\right)$$

C は L の鎖の全体、 $l(c)$ は鎖 c の長さ

双対のときは、

$$m\left(\bigcap_{a \in L} f(a)\right) = \sum_{c \in C} (-1)^{l(c)} \left(\bigcup_{a \in c} f(a)\right)$$

この定理の証明はいくつか知られている。Rota [3 の 4 章] の定理 1 を用いた証明が [7] に示めされているが直接証明も可能である。 L として鎖をとると通常の包除原理となる。

定理 1, 2 を具体的に应用するとき、関係によって誘導される中集合間のガロア対応を基礎とする [5, 3, 9]。 A を群束なや抽象的な構造をもった集合とする。 ε を $\Omega \times A$ の間の関係とする。このとき、 ε の逆関係を $\tilde{\varepsilon}$ とし、

$$x \in \Omega \text{ に対して, } \tilde{\varepsilon}(x) = \{a \in A \mid x \varepsilon a\}$$

$$X \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ に対して, } \tilde{\varepsilon}(X) = \bigcap_{x \in X} \tilde{\varepsilon}(x)$$

$$a \in A \text{ に対して, } \tilde{\varepsilon}(a) = \{x \in \Omega \mid a \varepsilon x\}$$

$$A \in \mathcal{P}(A) \text{ に対して, } \tilde{\varepsilon}(A) = \bigcap_{a \in A} \tilde{\varepsilon}(a)$$

と定めると、ガロア対応

$$\phi(\Omega) \xrightleftharpoons[\tilde{\epsilon}]{\tilde{\epsilon}} \phi(A)$$

が定まる。ここで、 $\tilde{\epsilon}$ は "characterization", ϵ は "enumeration" を意味している。すなわち、 $\tilde{\epsilon}$ は対象の性質を抽象化する := $\tilde{\epsilon}$ はある抽象化された性質をもっている対象を求める := ϵ 、それぞれ役割をもち、ている。数え上げについて言うならば、 $\tilde{\epsilon}(A) = \phi$ は性質あるいは構造 A をもつ対象が存在しない := 意味し、 $\tilde{\epsilon}(A) \neq \phi$ ならば、性質あるいは構造 A をもつ対象が存在して、"どのくらいあるか"、また、"ある不変量が存在し、その不変量をもとにして、 $m(\tilde{\epsilon}(A))$ を公式化可能かどうか" などが問題となる。

ここで、具体的に Ω を $\{f: S \rightarrow T\}$ ($= \mathcal{F}(S, T)$ とかく) とし、 A として $G(S) \times G(T)$ ($G(S)$ は S 上の置換群、 $G(T)$ は T 上の置換群) を考える。 $f, g \in \mathcal{F}(S, T)$ に対して、

$$\exists \alpha \in G(S), \exists \beta \in G(T), \forall A \in S, \beta(f(A)) = g(\alpha(A))$$

となるとき、 f と g とは同値である := $f \sim g$ とかく。 $\sim$ による同値類の集合の個数、すなわち、 $m(\mathcal{F}(S, T)/G(S) \times G(T))$

を求めるための基礎として、 $\mathcal{F}(S, T)$ と $G(S) \times G(T)$ との間は、つぎの関係を決める。 $f \in \mathcal{F}(S, T)$, $(\alpha, \beta) \in G(S) \times G(T)$ に対して、

$$f g(\alpha, \beta) \iff \forall A \in S, \beta(f(A)) = f(\alpha(A))$$

と定める。関係 g 及び g の逆関係 h により、ガロア対応

$$\phi(\mathcal{F}(S, T)) \xrightleftharpoons[h]{\tilde{g}} \phi(G(S) \times G(T))$$

が誘導される。ここで、 $\tilde{H}$ が数値上の役目をもつ、 $\alpha \in G(S)$ の巡回置換指数 $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ (α が長さ i の巡回置換を p_i 個もつことを示す)、 $\beta \in G(T)$ の巡回置換指数 $(q_1, q_2, \dots, q_m)$ を不変量として、 $m(\tilde{H}(\alpha, \beta))$ はつぎのように公式化される [1.4]。

$$m(\tilde{H}(\alpha, \beta)) = \prod_{i=1}^k \left(\sum_{j|i} j q_j \right)^{p_i} \\ = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{p_1} \left(\frac{\partial}{\partial z_2} \right)^{p_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial z_k} \right)^{p_k} \left(e^{z_1 z_1} \dots e^{(\sum_{j|i} j q_j) z_i} \right) \Big|_{z_1 = \dots = z_k = 0} \\ (j|i \text{ は } j \text{ は } i \text{ の約数を示す})$$

従って、Mapping Patterns の個数 $(m(\mathcal{F}(S, T)/G(S) \times G(T)))$ は定理 1 を適用することによって、つぎの定理から得られる。

定理 3 $m(\mathcal{F}(S, T)/G(S) \times G(T)) = (1/m(G(S) \times G(T))) \sum_{(\alpha, \beta) \in G(S) \times G(T)} m(\tilde{H}(\alpha, \beta))$

よく、 $G(S), G(T)$ をそれぞれ S 上の対称群、 T 上の対称群とすれば、 f と g が同型であることは同型であることに一致し、mapping patterns の個数は non-isomorphic mappings の個数と一致する。また、 $\mathcal{F}(S, S)$ を $\mathcal{F}(S)$ で表わし、 $G(S) \times G(S)$ の対角元の集合を $G(S)$ と同一視すると、つぎの系をえらる。

系 1 $m(\mathcal{F}(S)/G(S)) = (1/m(G(S))) \sum_{\alpha \in G(S)} m(\tilde{H}(\alpha))$
 $m(\tilde{H}(\alpha)) = \prod_{i=1}^k \left(\sum_{j|i} j p_j \right)^{p_i}$

更に、 $m(S) = m$ として、 $G(S)$ として S 上の対称群 $\mathcal{G}_m$ とすると、 $\mathcal{G}_m$ の共役類の集合を $\mathcal{G}_m^*$ で表わすと、 $m(\mathcal{G}_m) = m!$ であり、同じ巡回置換指数をもつ共役類の元の個数は $m! / (\prod_{i=1}^m p_i! i^{p_i})$

であるから、 $\gamma(s)$ の同型でなる mappings の数を求めるべきの系をえる。

$$\text{系 2} \quad m(\gamma(s)/G_n) = \sum_{\alpha \in G_n^*} \left(\prod_{i=1}^m p_i! i^{p_i} \right)^{-1} \prod_{i=1}^m (\sum_{j|i} p_j)^{p_i}$$

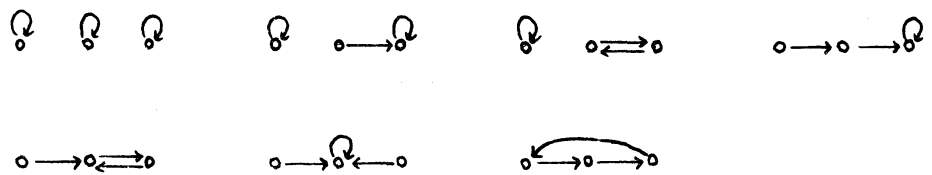
ただし、 α の巡回指数が $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ である。また、

$$\sum_{\alpha \in G_n^*} 1 = \sum_{\substack{(p_1, p_2, \dots, p_m) \\ p_1 + 2p_2 + \dots + mp_m = n}} 1 \quad \text{に等しい。}$$

例 1 $S = \{1, 2, 3\}$ とする。 G_3 の共役類は 3 個あり、それらの巡回指数が $(3, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)$ であるから、

$$m(\gamma(s)/G_3) = (3^3/3!) + (3/2) + (3/3) = 7$$

となる。同型でなる 7 個の mappings を図示すると、



となる。

定理 1、定理 3、系 1、系 2 の置換群作用の系列 (ここに述べられていた多項式型の定理も含めて) は、関係によって誘導されるガロア対応によって基礎づけられることを除いて、Burnside, Frobenius に始まり、Redfield, Pólya, R.L.Harris, De Bruijn, Harary, Read, M.A.Harrison, ... によって詳細に研究され、色ぬり, mapping, tree, グラフ, オートマトンなどの同型でなるものの数え上げに有効に使われている。ここ

ろで、ガロア対応に於けるもう一つの写像 $\tilde{\sigma}$ は、しばしば、自己同型群として、mapping, グラフ, オートマトンなどの構造を特徴づけるために用いられている。

つぎに、reduced mappings の数之上げを具体例として、最近、著者によって展開されている、定理2から始まる束作用の系列を述べる。 $PL(S), PL(T)$ をそれぞれ S, T の分割束とする。 $f \in \mathcal{F}(S, T)$, $(\pi, \tau) \in PL(S) \times PL(T)$ に対して、

$$\forall A_1, A_2 \in S (A_1 \pi A_2 \longrightarrow f(A_1) \tau f(A_2))$$

を満たす ($x, y \in X, \nu \in PL(X)$ に対して、 $x \nu y$ は $x \leq y$ が ν の同じブロックに含まれることを示す) とし、 f は

$$f: \pi \longrightarrow \tau, \quad f(x) = B_\tau(f(x)), \quad x \in \pi, \quad x \in X$$

に既約化 (reduce) される ($B_\tau(f(x))$ は τ の $f(x)$ を含むブロックを示す)。 f に対する $f \in \mathcal{F}(S, T)$ の可能な既約化すべてを考へるため、 Ω として $\mathcal{F}(S, T)$, A として $PL(S) \times PL(T)$ を考へ、つぎの関係 Ξ を導入する。 $f \in \mathcal{F}(S, T)$, $(\pi, \tau) \in PL(S) \times PL(T)$ に対して、

$$f \Xi (\pi, \tau) \iff \forall A_1, A_2 \in S (A_1 \pi A_2 \longrightarrow f(A_1) \tau f(A_2))$$

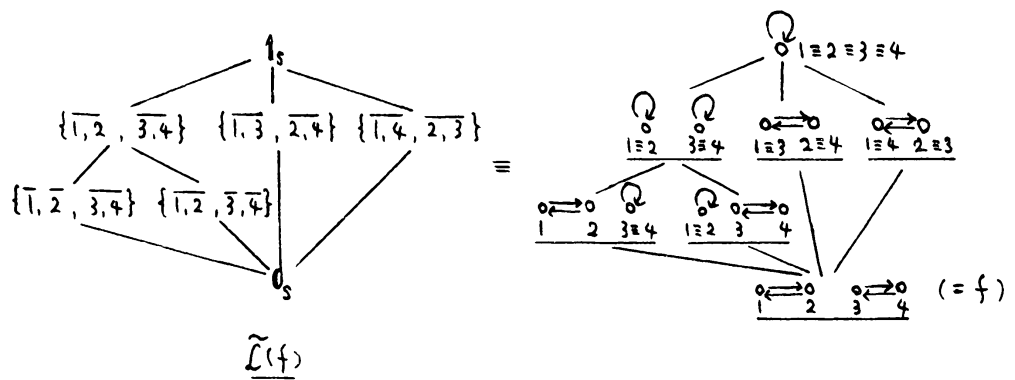
と定めると、 Ξ によって写像

$$\phi(\mathcal{F}(S, T)) \xrightarrow{\tilde{\Xi}} \phi(PL(S) \times PL(T))$$

が誘導される。ここで、 $F \in \phi(\mathcal{F}(S, T))$ に対して、 $\tilde{\Xi}(F)$ は部分束 ($PL(S) \times PL(T)$ の) となり、 F の既約過程と呼ばれる。この概

念は $S = T$ のとき、系列機械 (sequential machine) 上の分割対 (partition pair) の束として、Hartmanis と Stearns によって導入され、系列機械の構造を特徴づけるために用いられている。更に、Hartmanis と Stearns は分割対の束を抽象化するこゝにより、 τ pair algebra を定め、そのなかで、構造論上重要な役目を果たす "Mm 束" を導入している [6]。こゝで、任意の $f \in \mathcal{F}(S, T)$ に対して、 $\{(\pi, 1_T) \mid \pi \in PL(S)\} \subseteq \tilde{\pi}(f)$ であり、 $\{(0_S, \tau) \mid \tau \in PL(T)\} \subseteq \tilde{\pi}(f)$ ($1_T, 0_S$ はそれぞれ $PL(T)$ の最大元、 $PL(S)$ の最小元を示す) であるから、 $F \in \mathcal{P}(\mathcal{F}(S, T))$ に対して、 $\tilde{\pi}(F) = \bigcap_{f \in F} \tilde{\pi}(f) \supseteq \{(\pi, 1_T) \mid \pi \in PL(S)\}, \{(0_S, \tau) \mid \tau \in PL(T)\}$ を満たし、 $\bigvee_{PL(S) \times PL(T) \text{ 上}} PL(S) \times PL(T)$ の部分束であるから、 $\tilde{\pi}(F)$ は pair algebra であることは容易にわかる。こゝで、特に、任意の $f \in \mathcal{F}(S, T)$ が $f: 1_S \rightarrow 1_T$ と自明に既約化されることに注意する。こゝで、 $\tilde{\pi}$ を $\mathcal{F}(S) \times PL(S) \times PL(S)$ の対角集合に制限した場合の既約過程の例をあげる。このときの $\tilde{\pi}$ を、特に、 $\tilde{\pi}$ で表わす。

例 2 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して、

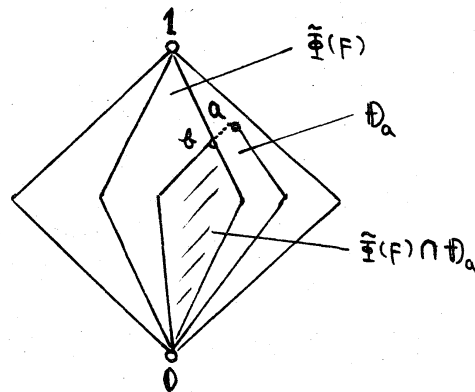


例2でわかるように、 $\tilde{L}(f)$ が f の既約過程を明らかにしていることがよくわかる。 $F \in \mathcal{P}(\mathcal{F}(S))$ に対して、 $\tilde{L}(F)$ は、Hartmanis & Stearns によって^{定義された}系列機械上の S.P. (substitution property) 分割の束に相当している (系列機械^Mの状態遷移関数 $\delta: S \times \Sigma \rightarrow S$ は $\delta_i: S \times \{i\} \rightarrow S, i \in \Sigma$ と同等であるから $F = \{\delta_i | i \in \Sigma\}$ とすれば、 $\tilde{L}(F) = \bigcap_{i \in \Sigma} \tilde{L}(\delta_i)$ となり M 上の S.P. 分割の束と一致する)。

さて、我々の本題に入ろう。一般に、 $f \in \mathcal{F}(S, T)$ を構成要素として持つシステムに於て、他の条件により f の既約化が制限される場合が多い。たとえば、系列機械の場合には、出力関数によって定まる出力一致分割 (output consistent partition) によって状態遷移関数の既約化が制限される。このことを抽象化すると、 $PL(S) \times PL(T)$ に領域 $\mathcal{D}_a = \{x \in PL(S) \times PL(T) | x \leq a\}$ を定め、 F の既約化を $\tilde{\pi}(F) \cap \mathcal{D}_a$ に於て調べることになる。この領域 $\mathcal{D}_a$ を F の既約条件と呼び、 $\tilde{\pi}(F) \cap \mathcal{D}_a$ を F の既約条件 $\mathcal{D}_a$ に関する既約過程と呼ぶ。 $\tilde{\pi}(F) \cap \mathcal{D}_a$ は $PL(S) \times PL(T)$ の部分束である。 $\tilde{\pi}(F) \cap \mathcal{D}_a$ の最大値が $\emptyset$ ならば、 F は既約化されても高々 $F: \pi \rightarrow \tau$ ($\emptyset = (\pi, \tau)$)

である。例2に於て

a	$\emptyset$
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
$\{1, 4, 2, 3\}$	$\emptyset$



系列機械に於て、 α を最大な出力一致分割とすれば、 α は最大な出力一致 S. P. 分割 (π_R) となり、 $\mathbb{F}: \pi \rightarrow \tau$ ($\alpha = (\pi, \tau)$) は既約化された系列機械に相当する。つぎに、逆に、既約条件 $\mathbb{D}_\alpha$ と $\alpha \in PL(S) \times PL(T)$ が与えられているとき $\text{Max}(\tilde{\pi}(f) \cap \mathbb{D}_\alpha) = \alpha$ となる $f \in \mathcal{F}(S, T)$ の全体、すなわち

$$\{f \in \mathcal{F}(S, T) \mid \text{Max}(\tilde{\pi}(f) \cap \mathbb{D}_\alpha) = \alpha\} \quad (\alpha \mathcal{F}_\alpha \text{ とおく})$$

を考える。既約条件 $\mathbb{D}_\alpha$ のもとで、 $\alpha \mathcal{F}_\alpha$ は既約化されても高々 $f: \pi \rightarrow \tau$ ($\alpha = (\pi, \tau)$) である $f \in \mathcal{F}(S, T)$ の全体であり、特に、 $\alpha \mathcal{F}_\alpha$ は既約化されない (non-reduced, self-reduced) $f \in \mathcal{F}(S, T)$ の全体となる。ここで、 $\alpha \mathcal{F}_\alpha$ の特徴づけ及び数え上げを行うために、 π の逆関係 ρ と τ によって誘導される写像 $\bar{\rho}$ を定め、ガロア対応

$$\phi(\mathcal{F}(S, T)) \xrightleftharpoons[\bar{\rho}]{\tilde{\pi}} \phi(PL(S) \times PL(T))$$

を考える。更に、これと $\mathcal{F}(S, T)^p$ と $PL(S) \times PL(T)$ の間に拡張するため、つぎの関係 π^p を導入する。 $f = (f_1, f_2, \dots, f_p) \in \mathcal{F}(S, T)^p$, $(\pi, \tau) \in PL(S) \times PL(T)$ に対して、

$$f \pi^p(\pi, \tau) \iff \forall A_1, A_2 \in S, \forall i (1 \leq i \leq p) (A_1 \pi A_2 \rightarrow f_i(A_1) \tau f_i(A_2))$$

と定める。すると、 π^p 及び π^p の逆関係 ρ^p によって、ガロア対応

$$\phi(\mathcal{F}(S, T)^p) \xrightleftharpoons[\bar{\rho}^p]{\tilde{\pi}^p} \phi(PL(S) \times PL(T))$$

が誘導される。以下において、一般に、 X と Y との間の関係

R によって誘導される写像 $\tilde{R}: \phi(X) \rightarrow \phi(Y)$ において、特に、

$\forall x \in X, \tilde{R}(\{x\})$ を扱うときには $R(x)$ と略記する (すなわち、

$R: X \rightarrow \phi(Y)$ である)。 $\alpha: \mathcal{F}(S, T)^p \rightarrow \phi(\mathcal{F}(S, T))$ を $f \in \mathcal{F}(S, T)$

に対して $\alpha(f) = \{f_i \mid 1 \leq i \leq p\}$ (ただし、 $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$) と定め

る、 $\pi^p(f) = \tilde{\pi}(\alpha(f))$ ($f \in \mathcal{F}(S, T)^p$) であることは容易にみか

る。また、 P^p と P との間につきの補題が成立する。

補題 2 任意の $(\pi, \tau) \in PL(S) \times PL(T)$ に対して

$$P^p(\pi, \tau) = P(\pi, \tau)^p$$

つまり、 α 子集を $\mathcal{F}(S, T)^p$ の場合に拡張し、

$$\{f \in \mathcal{F}(S, T)^p \mid \text{Max}(\pi^p(f) \cap \mathcal{D}_a) = \emptyset\}$$

を α 子集^(p) で表わす。以下、 α 子集^(p) について調べる。まず、 P^p に

よって、つぎのように特徴づけられる。

補題 3 任意の $a, \emptyset \in PL(S) \times PL(T)$ に対して

$$\alpha \text{ 子集}^{(p)} = P^p(\emptyset) \cap \left(\bigcup_{x \in (\emptyset, a]} P^p(x) \right)^c$$

従って、

$$m(\alpha \text{ 子集}^{(p)}) = m(P^p(\emptyset)) - m\left(P^p(\emptyset) \cap \left(\bigcup_{x \in (\emptyset, a]} P^p(x) \right)\right)$$

ここで、補題 2 より

$$m(P^p(\emptyset)) = m(P(\emptyset)^p) = m(P(\emptyset))^p \quad \dots (I)$$

となる。また、 P^p の定義より

$$m\left(P^p(\emptyset) \cap \left(\bigcup_{x \in (\emptyset, a]} P^p(x) \right)\right) = m\left(\bigcup_{x \in (\emptyset, a]} \tilde{P}^p(\{\emptyset, x\})\right)$$

となる。ここで、定理 2 の適用を考へるため、 $\{\{\emptyset, x\} \mid x \in (\emptyset, a]\}$

上に $\tilde{P}$ によって弱射 (weak morphism) が定まるか否かを調べる。

$\{\{b, x\} \mid x \in (b, a)\}$ に "join" と "meet" を $x, y \in (b, a)$ に対して

$$\{b, x\} \vee \{b, y\} = \{b, x \vee y\}, \quad \{b, x\} \wedge \{b, y\} = \{b, x \wedge y\}$$

と定めること、 $\{\{b, x\} \mid x \in (b, a)\}$ は (b, a) と束同型となる。

(b, a) は上半束であるから、 $\tilde{P}$ が "join" によって弱射である

か否かを調べる。任意の $x, y \in (b, a)$ に対して

$$\tilde{P}(\{b, x\} \vee \{b, y\}) = \tilde{P}(\{b, x \vee y\}) = P^P(b) \cap P^P(x \vee y)$$

$$\tilde{P}(\{b, x\}) \cap \tilde{P}(\{b, y\}) = P^P(b) \cap P^P(x) \cap P^P(y)$$

であるから、 $P^P(x \vee y) \geq P^P(x) \cap P^P(y)$ を示せば十分である。補

題 2 より、

$$P^P(x \vee y) = P(x \vee y)^P, \quad P^P(x) \cap P^P(y) = (P(x) \cap P(y))^P$$

となり、 P が弱射であること、すなわち、

$$P(x \vee y) \geq P(x) \cap P(y)$$

を満たすことは [7, 定理 2] において証明されているので、 P^P も弱

射となることが示めされた。従って、 $m(\bigcup_{x \in (b, a)} \tilde{P}(\{b, x\}))$ に定

理 2 が適用でき、

$$m(\bigcup_{x \in (b, a)} \tilde{P}(\{b, x\})) = \sum_{c \in C} (-1)^{l(c)} m(\tilde{P}(\{b\} \cup c))$$

C は (b, a) の鎖の全体

となり、補題 2 より

$$m(\bigcup_{x \in (b, a)} \tilde{P}(\{b, x\})) = \sum_{c \in C} (-1)^{l(c)} m(\tilde{P}(\{b\} \cup c))^P \cdots (II)$$

となる。従って、(I)、(II) をまとめると、つぎの定理を得る。

定理 4 任意の $\alpha, \theta \in PL(S) \times PL(T)$ に対して

$$m(\alpha \gamma_{\theta}^{(p)}) = \sum_{c \in C^*} (-1)^{l(c)} m(\tilde{\rho}(c))^p$$

$$C^* = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\} \cup c \mid c \text{ は } (\theta, \alpha) \text{ の鎖}\}$$

従って、 $m(\alpha \gamma_{\theta}^{(p)})$ を算術的に求めるためには、 $PL(S) \times PL(T)$ の任意の鎖 c に対して $m(\tilde{\rho}(c))$ が算術的に求まれば十分である。
このことについて、つぎの補題を置く。

補題 4 $PL(S) \times PL(T)$ の任意の鎖 c に対して

$$m(\tilde{\rho}(c)) = \prod_{x_n \in \pi_n} \sum_{y_n \in \tau_n} \cdots \prod_{x_2 \in x_{i+1}(\pi_i)} \sum_{y_2 \in y_{i+1}(\tau_i)} \cdots \prod_{x_0 \in x_1(\pi_0)} \sum_{y_0 \in y_1(\tau_0)} m(y_0)^{m(x_0)}$$

ただし、 $c : (\pi_0, \tau_0) \leq (\pi_1, \tau_1) \leq \cdots \leq (\pi_n, \tau_n)$, $x_{n+1}(\pi_n) = \pi_n$, $y_{n+1}(\tau_n) = \tau_n$

故に、 $m(\alpha \gamma_{\theta}^{(p)})$ が算術的に求められる。 $\theta = \emptyset$ のとき、 $\tilde{\rho}(\emptyset) = \gamma(S, T)$ に注意すれば、つぎの系を置く。

系 3 任意の $\alpha \in PL(S) \times PL(T)$ に対して

$$m(\alpha \gamma_{\emptyset}^{(p)}) = m(\gamma(S, T))^p - \sum_{c \in C} (-1)^{l(c)} m(\tilde{\rho}(c))^p$$

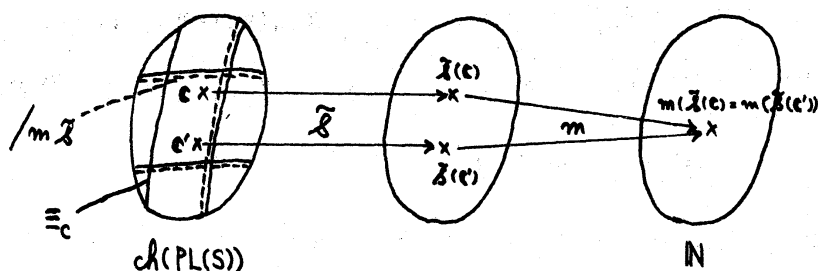
C は $(\emptyset, \alpha)$ の鎖の全体

つぎに、 $\mathcal{L}^p$ を $\gamma(S)^p \times PL(S)$ との間には制限した関係 $\mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^p$ の逆関係 $\mathcal{R}^p$ (すなわち、 Γ^p を $PL(S)$ と $\gamma(S)^p$ との間には制限したもの) とにより誘導されるカロア対応

$$\phi(\gamma(S)^p) \xrightleftharpoons[\mathcal{R}^p]{\mathcal{L}^p} \phi(PL(S))$$

のもとでの具体的な計算例を考える。ところで、 S を入力個数 p の系列機械の状態の集合とするならば、 $\pi \in PL(S)$ に対して、 $\pi \gamma_{\emptyset}^{(p)}$ は最大な出力一致分割 π のもとで、既約化される系列

状態遷移関数の列機械の全体に相当するものである。後に、このことについて正確に述べる。定理4より、 $p=1$ のとき、すなわち、 π_0 の計算例を示めせば十分であることがわかる。補題4と系3より、原理的には $(0, \pi]$ の任意の鎖 c に対して、 $m(\tilde{g}(c))$ を計算すればよいのであるが、 $(0, \pi]$ の鎖が多の場合には大変な計算となる。そこで、 $PL(S)$ の鎖の全体を $ch(PL(S))$ で表わし、鎖 c, c' に対して、 $c \equiv_c c'$ ならば $m(\tilde{g}(c)) = m(\tilde{g}(c'))$ となる基数合同関係と呼ばれる同値関係 $\equiv_c$ を導入する。

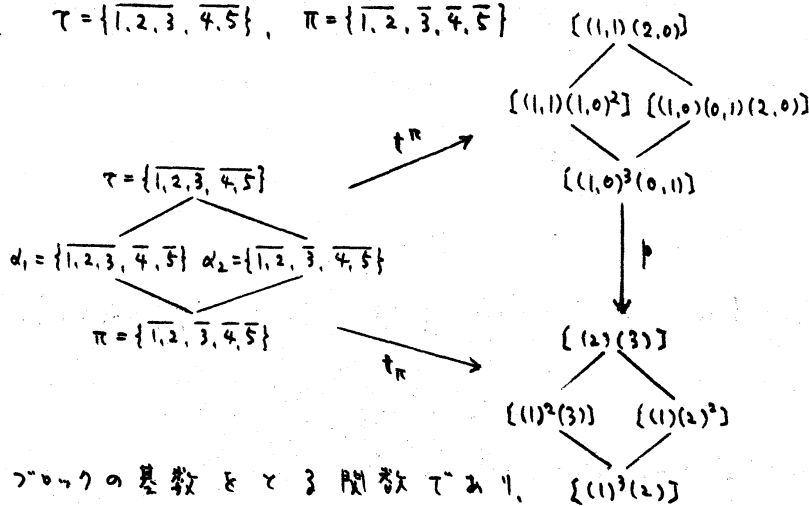


$ch(PL(S))$ の元 $c = \pi_0 \leq \pi_1 \leq \dots \leq \pi_n$, $c' = \pi'_0 \leq \pi'_1 \leq \dots \leq \pi'_n$ に対して、 $c \equiv_c c'$ であるとは、全単射 $f: \pi_0 \rightarrow \pi'_0$ が存在して、任意の $B \in \pi_i$ に対して、 $m(B) = m(f(B))$ でありかつ任意の i ($1 \leq i \leq n$) に対して $\pi'_i = \{\sum_{B \in \pi_i} f(B) \mid x \in \pi_i\}$ となることである。この f は基数合同写像と呼ばれる。鎖 c を不変にする基数合同写像の全体は群となり、これを基数合同群といい、 CG_c で表わす。 $ch(PL(S))/\equiv_c$ の鎖 c を含むクラスを C_c とするとき、 $m(C_c)$ は $m(CG_c)$ をもとにして計算される。基数合同関係は[8]において詳しく調べられ、 $l(c) \leq 2$ に対してベクトルと数の分割をもとにした C_c の不変量が与えられ、 γ

(モス3人、補題1が十分に使われている)

の不変量をもとにした $m(C_e)$ の公式が与えられている。ここでは例によって説明するにとどめる。 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする。

例3 $\tau = \{\overline{1, 2, 3}, \overline{4, 5}\}$, $\pi = \{\overline{1, 2, 3}, \overline{4, 5}\}$

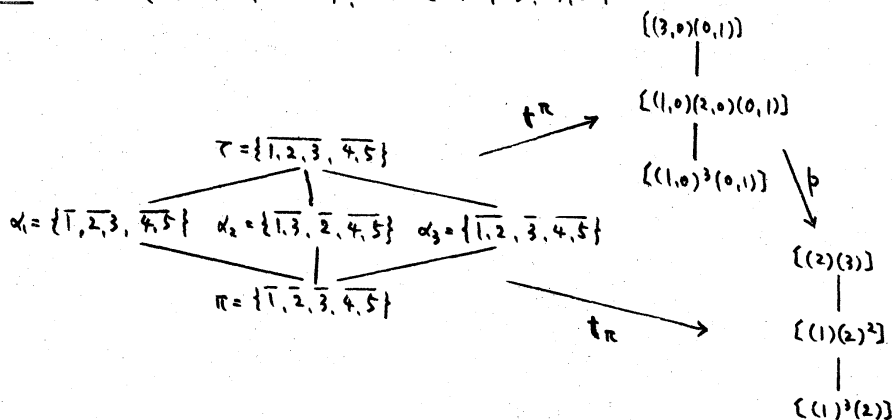


t^π は τ のブロックの基数をとる関数であり、

t^π は S の分割 π のブロックとどのように含むかを示す関数であり、例えは $t^\pi(\alpha_1) = \{(1,1)(1,0)^2\}$ は α_1 のブロック $\{1, 2, 3\}$ が π の基数1のブロック1個と基数2のブロック1個とからなり、 α_1 のブロック $\{4\}$ は π の基数1のブロック1個からなっている ($\{5\}$ は同じ π の同じ) を示す。 p は例えは $p(\{(1,1)(1,0)^2\}) = \{(1^1+2^1)(1^1+2^0)^2\} = \{(1)^2(3)\}$ とする関数。

このとき、 (π, τ) には基数合同な鎖はなり。

例4 $\tau = \{\overline{1, 2, 3}, \overline{4, 5}\}$, $\pi = \{\overline{1, 2, 3}, \overline{4, 5}\}$



この場合は、 $\{\pi, \tau\}$ に含まれる鎖を基数合同関係により、 τ 分類する。長さ 0 の鎖に対して $\pi, \alpha_1 \equiv_c \alpha_2 \equiv_c \alpha_3, \tau$ 、長さ 1 の鎖に対して $\pi < \alpha_1 \equiv_c \pi < \alpha_2 \equiv_c \pi < \alpha_3, \pi < \tau, \alpha_1 < \tau \equiv_c \alpha_2 < \tau \equiv_c \alpha_3 < \tau$ 、長さ 2 の鎖に対して $\pi < \alpha_1 < \tau \equiv_c \pi < \alpha_2 < \tau \equiv_c \pi < \alpha_3 < \tau$ となる。

つまり、 $\tau \nless \pi$ の計算例を示す。

例 5 例 3 の π, τ を用いて、

$$C^* = \{\pi, \pi < \alpha_1, \pi < \alpha_2, \pi < \tau, \pi < \alpha_1 < \tau, \pi < \alpha_2 < \tau\}$$

を用いて、

$$m(\tilde{g}(\pi)) = (2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(2^1 + 1^1 + 1^1 + 1^1)^3$$

$$m(\tilde{g}(\pi < \alpha_1)) = ((2^2 + 1^2)(2^1 + 1^1) + 1^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1)((2^1 + 1^1) + 1^1 + 1^1)^2$$

$$m(\tilde{g}(\pi < \alpha_2)) = (2^2 + 1^2 + (1^2 + 1^2))(2^1 + 1^1 + (1^1 + 1^1))(2^1 \cdot 2^1 + 1^1 \cdot 1^1 + (1^1 + 1^1)^2)$$

$$m(\tilde{g}(\pi < \tau)) = ((2^2 + 1^2)(2^1 + 1^1) + (1^2 + 1^2)(1^1 + 1^1))((2^1 + 1^1)^2 + (1^1 + 1^1)^2)$$

$$m(\tilde{g}(\pi < \alpha_1 < \tau)) = ((2^2 + 1^2)(2^1 + 1^1) + (1^2 \cdot 1^1 + 1^2 \cdot 1^1))((2^1 + 1^1)^2 + (1^1 + 1^1)^2)$$

$$m(\tilde{g}(\pi < \alpha_2 < \tau)) = ((2^2 + 1^2)(2^1 + 1^1) + (1^2 + 1^2)(1^1 + 1^1))((2^1 \cdot 2^1 + 1^1 \cdot 1^1) + (1^1 + 1^1)^2)$$

であるから、

$$\begin{aligned} m(\tau \nless \pi) &= \sum_{c \in C^*} (-1)^{\ell(c)} m(\tilde{g}(c)) \\ &= 815 - (425 + 315 + 247) + 221 + 171 \\ &= 280 \end{aligned}$$

従って、既約条件 $[0, \tau]$ の $c \in \tau$ 、既約化されて c 高々

$$f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

である $f: S \rightarrow S$ ($S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$) の個数は 280 である。

例 6 例 4 の π , τ を とる.

$$C^* = \{ \pi, \pi < \alpha_1, \pi < \alpha_2, \pi < \alpha_3, \pi < \tau, \pi < \alpha_1 < \tau, \pi < \alpha_2 < \tau, \pi < \alpha_3 < \tau \}$$

となり、例 4 の結果から

$$\pi < \alpha_1 \equiv_c \pi < \alpha_2 \equiv_c \pi < \alpha_3, \pi < \alpha_1 < \tau \equiv_c \pi < \alpha_2 < \tau \equiv_c \pi < \alpha_3 < \tau$$

であるから、 $m(\mathcal{J}(\pi))$ は例 5 と同じであり、長さ 1 の金鎖 $\mathcal{C}$ に
($\pi < \alpha_1$ の場合) に対して、

$$m(\mathcal{J}(\mathcal{C})) = (1^1 + (1^1 + 1^1) + 2^1)(1^1 + 1^1 + (1^1 + 1^1)^2 + 2^1 \cdot 2^1)(1^2 + (1^2 + 1^2) + 2^2)$$

であり、長さ 1 の金鎖 $\pi < \tau$ に対して、

$$m(\mathcal{J}(\pi < \tau)) = ((1^1 + 1^1 + 1^1)^3 + 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1)((1^2 + 1^2 + 1^2) + 2^2)$$

となる。長さ 2 の金鎖 $\mathcal{C}$ ($\pi < \alpha_2 < \tau$ の場合) に対して、

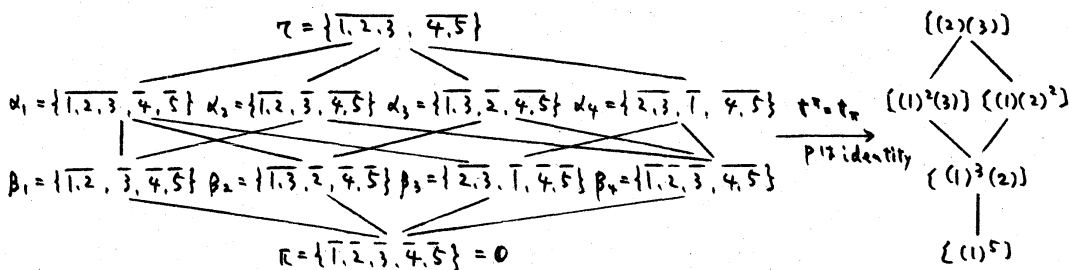
$$m(\mathcal{J}(\mathcal{C})) = ((1^1 + (1^1 + 1^1))(1^1 \cdot 1^1 + (1^1 + 1^1)^2) + 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1)((1^2 + (1^2 + 1^2) + 2^2)$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} m(\tau \tilde{\gamma} \pi) &= \sum_{\mathcal{C} \in C^*} (-1)^{l(\mathcal{C})} m(\mathcal{J}(\mathcal{C})) \\ &= 815 - 3 \times 315 - 245 + 3 \times 161 \\ &= 168 \end{aligned}$$

つまり $\tau \tilde{\gamma} \pi$ の計算例を示す。

例 7 $\tau = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\pi = 0$ を とる。



系3より、例5、6と同様に

$$m(\tau \tilde{f}_0) = m(\tilde{f}(S)) - \sum_{c \in C} (-1)^{\ell(c)} m(\tilde{f}(c))$$

の展開式によって計算できるが、ここでは、例5、6の結果を用いる。図式に注意すると、

$$\begin{aligned} m(\tau \tilde{f}_0) &= 5^5 - \sum_{x \in \{0, \tau\}} m(\tau \tilde{f}_x) \\ &= 5^5 - (3m(\tau \tilde{f}_{\beta_1}) + m(\tau \tilde{f}_{\beta_2}) + 3m(\tau \tilde{f}_{\alpha_2}) + m(\tau \tilde{f}_{\alpha_1}) + m(\tau \tilde{f}_\tau)) \end{aligned}$$

ここで、 $m(\tau \tilde{f}_{\beta_1})$ と $m(\tau \tilde{f}_{\beta_2})$ はそれぞれ例5、例6で求め、
 ているので、その他を計算して

$$\begin{aligned} &= 3125 - (3 \times 280 + 168 + 3 \times 198 + 348 + 455) \\ &= 720 \end{aligned}$$

となる。このもとで既約化される $f: S \rightarrow S$ がかなり多いことがわかる。一般に、 $\tau \tilde{f}_0$ 、 $\tau \in PL(S)$ を詳しく調べるとともに、 S 上の置換によって誘導される $\tau \tilde{f}_0$ 上の置換による同値類の個数を一般的に求めることは興味深い。

最後に、前に述べたように、カロア対応 $\{\tilde{\pi}, \tilde{\rho}\}$ と系列機械の分割対及び S, P 分割による特徴づけと数え上げとの関連について述べる。 $\tilde{f}(S \times \Sigma, T)$ と $PL(S) \times PL(T)$ の間につきの関係 $\tilde{\pi}_\Sigma$ を定める。 $\delta \in \tilde{f}(S \times \Sigma, T)$ と $(\pi, \tau) \in PL(S) \times PL(T)$ に対して、

$$\delta \in \tilde{\pi}_\Sigma(\pi, \tau) \iff \forall A_1, A_2 \in S, \forall i \in \Sigma (A_1 \pi A_2 \rightarrow \delta(A_1, i) \tau \delta(A_2, i))$$

と定めると、 $\tilde{\pi}_\Sigma$ 及び $\tilde{\pi}_\Sigma$ の逆関係 $\tilde{\rho}_\Sigma$ によって、カロア対応

$$\phi(\tilde{f}(S \times \Sigma, T)) \xrightleftharpoons[\tilde{\rho}_\Sigma]{\tilde{\pi}_\Sigma} \phi(PL(S) \times PL(T))$$

が誘導される。ガロア対応 $\{\tilde{\pi}_\Sigma, \tilde{\rho}_\Sigma\} \times \{\tilde{\pi}^P, \tilde{\rho}^P\}$ とは、つぎのように関連づけられる。 $\Sigma = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ とするとき、 $\delta \in \mathcal{F}(S \times \Sigma, T)$ に対して $\beta(\delta) = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p)$ ($\delta_j = \delta|_{S \times \{i_j\}}$) と定めると、

$$\beta: \mathcal{F}(S \times \Sigma, T) \longrightarrow \mathcal{F}(S, T)^p$$

は全単射であり、任意の $\delta \in \mathcal{F}(S \times \Sigma, T)$ と $x \in PL(S) \times PL(T)$ に対して

$$\tilde{\pi}_\Sigma(\delta) = \tilde{\pi}^P(\beta(M)), \quad \beta(\tilde{\rho}_\Sigma(x)) = \tilde{\rho}^P(x)$$

が成立する。 $S = T$ の場合及び $\mathcal{F}(S) \times PL(S)$ に制限した場合が、それぞれ、系列機械上の分割対応及び S. P. 分割との関連を示すものである。

文献

- [1] C. L. Liu, Introduction to Combinatorial Mathematics, Chap 4.5 McGraw-Hill, New York, 1968. (伊王理訳, 組合せ数学入門).
- [2] C. Berge, Principle of Combinatorics, Academic Press, New York, 1971. (野崎記, 組合せ論の基礎).
- [3] G.-C. Rota, On the Foundation of Combinatorial Theory I, Theory of Möbius functions, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 2 (1964), 340-368
- [4] N. G. De Bruijn, Enumeration of Mapping Patterns, J. of Combinatorial Theory (A) 12, 14-20 (1972).
- [5] O. Ore, Theory of Graphs, Vol XXXVIII, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. Chap 11, 1962.
- [6] J. Hartmanis and R. E. Stearns, Algebraic Structure Theory of Sequential Machines, Chap 2.3, Prentice Hall, 1966.
- [7] H. Narushima, Principle of Inclusion-Exclusion on Semilattices, J. Combinatorial Theory (A) 19, 196-203 (1974).
- [8] H. Narushima, Order Maps and Cardinal Congruence Classes on Partitions, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. Vol. IX, 1974.
- [9] 成島 弘, 組合せ理論の基礎, 数解研講究録 179, 1-18, 1973.
- [10] M. Hall, JR, Combinatorial Theory, Blaisdell Pub. 1967. (岩堀信子訳, 組合せ理論)