

## 2 成分層流の時間的大域解について

YASUSHI HATAYA 京大・理 幡谷 泰史  
YOSHIAKI TERAMOTO 京大・理 寺本 恵昭

ABSTRACT. 2 成分流体の平面 Couette 流について考察する。粘性が異なる場合について、適当な仮定の下で大域解が存在し、指数的に減衰することを示す。

### 1. INTRODUCTION

上壁は水平方向に一定速度で動き、下壁は固定されている 2 枚の平行平板間の 2 成分流体を考える。2 流体は粘性のみ異なるものとし、それ自身未知関数である自由界面で分けられているものとする。それぞれの流体の運動は Navier-Stokes 方程式、界面では流速の連続性・応力と表面張力のつりあい・運動力学的境界条件、壁では粘着境界条件によって記述されているものとする。[1] における無次元化を採用すれば方程式、境界条件は次のようになる。

#### 方程式

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t^I + (\mathbf{u}^I \cdot \nabla) \mathbf{u}^I + \nabla p^I &= \mu_1 \Delta \mathbf{u}^I, & t > 0, 0 < x_2 < l + h(t, x_1) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^I &= 0, \\ \mathbf{u}_t^{II} + (\mathbf{u}^{II} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{II} + \nabla p^{II} &= \mu_2 \Delta \mathbf{u}^{II}, & t > 0, l + h(t, x_1) < x_2 < 1. \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{II} &= 0, \end{aligned}$$

#### 初期・境界条件

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^j|_{t=0} &= \mathbf{u}_0^j, & h|_{t=0} &= h_0 \\ \mathbf{u}^I|_{x_2=0} &= (0, 0), & \mathbf{u}^{II}|_{x_2=1} &= (1, 0) \\ h_t + u_1^I h_{x_1} &= u_2^I \\ u_1^I &= u_1^{II}, & u_2^I &= u_2^{II} \\ \vec{\tau} \cdot T^I \vec{n} &= \vec{\tau} \cdot T^{II} \vec{n} \\ \vec{n} \cdot T^I \vec{n} - \vec{n} \cdot T^{II} \vec{n} &= \frac{S h_{x_1 x_1}}{(1 + (h_{x_1})^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

ここで、水平方向に  $L$ - 周期的、 $\int_{\Gamma} h d\Gamma = 0$ 、正数  $S$  は表面張力係数、 $\vec{n}, \vec{\tau}$  はそれぞれ界面における法ベクトル、接ベクトルとする。

以下では次のような定常解 (Couette 流) の周りで考える。  
定常解

$$u_1(x_1, x_2, t) = U_0(x_2) = \begin{cases} \frac{x_2}{l+m(1-l)}, & \text{in } 0 < x_2 < l \\ \frac{m(x_2-1)}{l+m(1-l)} + 1, & \text{in } l < x_2 < 1, \end{cases}$$

$$u_2^I \equiv 0, \quad h \equiv 0, \quad p^I \equiv p^{II} \equiv p_0 \text{ (const).}$$

ここで、 $m = \frac{\mu_1}{\mu_2}$  とした。この 2 成分流体の線形安定性は、いくつかの特殊な極限について詳しく調べられている (Joseph and Renardy [1])。また、2 成分流体の解の存在を扱った論文として Tanaka [3] などがある。

## 2. LOCAL SOLUTION

自由界面を持つ領域の問題から、定常解が占める固定領域へ問題を書き換える。参照領域への変換写像を次の  $\Theta$  の逆写像として定義する。 $\tilde{h}(x_1, x_2, t) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \frac{\tilde{h}(\xi, x_2, t) e^{i x_1 \xi}}{1 + \xi^2 (x_2 - l)^2}$  とおくと  $(x_1, x_2, t) \in \Omega(t) \times (0, T)$ ,  $(x'_1, x'_2, t') \in \Omega_0 \times (0, T)$  に対して

$$\Theta: \Omega_i^0 \times (0, T) \rightarrow \Omega_i(t) \times (0, T),$$

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2 + \frac{x'_2(x'_2 - 1)}{l(l-1)} \tilde{h}(x'_1, x'_2, t'), \quad t = t'.$$

この変換は  $h(x_1, t)$  が十分小さければ微分同相写像を定めるので、以下では固定領域で解を構成しよう。方程式・境界条件は次のように書き換わる。

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & \mathbf{u}_t^I - \mu_1 \Delta \mathbf{u}^I + \nabla p^I = f(\mathbf{u}^I, h) + b(h) \nabla p^I, & t > 0, 0 < x_2 < l \\ & \nabla \cdot \mathbf{u}^I = 0, \\ & \mathbf{u}_t^{II} - \mu_2 \Delta \mathbf{u}^{II} + \nabla p^{II} = f(\mathbf{u}^{II}, h) + b(h) \nabla p^{II}, & t > 0, l < x_2 < 1 \\ & \nabla \cdot \mathbf{u}^{II} = 0, \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & \mathbf{u}^I|_{x_2=0} = (0, 0), \quad \mathbf{u}^{II}|_{x_2=1} = (0, 0) \\ & h_t - u_2^I = \partial_{x_1} a_0(h) \\ & (u_1^I - u_1^{II}) + \frac{1-m}{l+m(1-l)} h = a_1(h) \\ & (u_2^I - u_2^{II}) = \partial_{x_1} a_2(h) \\ & \mu_1(u_{2,x_1}^I + u_{1,x_2}^I) - \mu_2(u_{2,x_1}^{II} + u_{1,x_2}^{II}) = a_3(\mathbf{u}, h) \\ & (2\mu_1 u_{2,x_2}^I - p^I) - (2\mu_2 u_{2,x_2}^{II} - p^{II}) - S h_{x_1 x_1} = a_4(\mathbf{u}, h). \end{aligned}$$

V.A.Solonnikov [6] の手法を用いて、次の局所解を得ることができる。

**Proposition 2.1.**  $\frac{3}{2} < r < 2$  とする。  $\epsilon > 0$  が存在して  $|m-1| < \epsilon$  ならば、ある適合条件を満たす初期条件  $(u_0, h_0)$  と任意に与えられた時間  $T > 0$  に対して、正数  $\delta$  が存在して、

$$|h_0|_{H^{r-1/2}(\Omega^0)} + |u_0|_{H^{r-1}(\mathbb{R})} \leq \delta$$

ならば、初期値境界値問題 (2.1), (2.2) はつぎのような解  $(h, u, p)$  を持つ。

$$\begin{aligned} u &\in H^{r, \frac{r}{2}}(\Omega_0 \times (0, T)), \quad h \in H^{r+\frac{1}{2}, \frac{r+1/2}{2}}(\Gamma_0 \times (0, T)), \\ \nabla p &\in H^{r-2, \frac{r-2}{2}}(\Omega_0 \times (0, T)), \quad p|_{\Gamma} \in H^{r-\frac{3}{2}, \frac{r-3/2}{2}}(\Gamma_0 \times (0, T)). \end{aligned}$$

### 3. GLOBAL SOLUTION

**Theorem 3.1.** 正数  $\epsilon_1$  に対して、  $|m-1| < \epsilon_1$  であるとする。ある正数  $\gamma$  が存在して、任意の  $t_0 > 0$  に対して正数  $M$  が存在して、任意の  $T > 0$  に対して局所解  $(u, h, p)$  が

$$(3.1) \quad \sup_{t_0 \leq t \leq t_0+T} \left\{ \|u(t)\|_{H^2(\Omega_0^j)} + |h(t)|_{H^{5/2}(\Gamma_0)} + |p(t)|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} \right\} \leq \epsilon_1$$

を満たすのならば、

$$(3.2) \quad \|u(t)\|_2 + |h(t)|_3 \leq M e^{-\gamma t} \{ \|u(t_0)\|_2 + |h(t_0)|_3 \}, \quad 1 \leq t \leq T,$$

が成り立つ。

#### 証明の方針

$$E = \sum_{j=0,1,2} \left\| \partial_x^j u(t) \right\|^2 + \|u_t(t)\|^2 + \frac{S}{2} \left( \sum_{j=0,1,2} |h_x(t)|^2 + |h_{xt}(t)|^2 \right),$$

$$F = \sum_{j=0,1,2} \left\| \nabla \partial_x^j u(t) \right\|^2 + \|\nabla u_t(t)\|^2,$$

$$G = \int_{\Gamma} h_x u_x u_{1,z} + \int_{\Gamma} (h h_x)_t p + \frac{m-1}{\mathcal{R}_2(l+m(1-l))} \int_{\Gamma} h u_{1,z} + \dots$$

とおく。  $G$  について、 (3.1) と  $|m-1| < \epsilon_1$  を用いて

$$(3.3) \quad |G(t)| \leq c \epsilon_1 E(t),$$

を満たすように  $\epsilon_1$  を十分小さくとれる。また、ある  $\gamma' > 0$  がとれて、  $\frac{d}{dt}(E+G) + \gamma' F \leq 0$ , を導くことができる。 Poincaré の不等式を用いれば  $E+G \leq cF$  であるので、

$$(3.4) \quad \frac{d}{dt}(E+G) + \gamma(E+G) \leq 0, \quad \text{for } \gamma > 0.$$

また、垂直方向の微分についての評価は、

**Proposition 3.2.** 定常 Stokes 方程式

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad & \begin{aligned} & -\mu_j \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ & \nabla \mathbf{u} = 0 \end{aligned} && \text{in } \Omega_j \\
 & \mathbf{u} = 0 && \text{on } S_B \\
 & u_2 = u_2 \quad u_{1,x_2} + u_{2,x_1} = u_{1,x_2} + u_{2,x_1} && \text{on } x_2 = l,
 \end{aligned}$$

の解  $(\mathbf{u}, p)$  について、次の評価が成り立つ。

$$\|\mathbf{u}\|_{s+2} + \|\nabla p\|_s \leq C \|\mathbf{f}\|_s, \quad s = 0, 1.$$

この Proposition と (2.1), (2.2) を用いれば、次の評価をうる。

$$(3.6) \quad \sum_{s=0,1} (\|\partial_{x_2}^s \mathbf{u}\|_2 + \|\nabla p\|_s) \leq cF.$$

(3.3), (3.4), (3.6) をあわせれば、(3.1) を得る。

#### REFERENCES

1. D. D. JOSEPH AND Y. RENARDY, *Fundamentals of two-fluid dynamics : Mathematical theory and its applications*, Springer, New York, IAM series 3, 1992
2. C. S. YIH, *Instability due to viscosity stratification*, J. Fluid Mech. **26**, 337 (1967).
3. N. TANAKA, *Global existence of two phase homogeneous viscous incompressible fluid flow*, Comm. P.D.E., vol 18, (1 & 2), pp.41-81, (1993)
4. T. NISHIDA AND Y. TERAMOTO AND Htay Aung Win, *Navier-Stokes flow down an inclined plane: Downward periodic motion*, J. Math. Kyoto Univ. vol. **33**, No. 3, (1993).
5. J. T. BEALE, *Large time behavior of viscous surface waves*, Arch. Rat. Mech. Anal. **84**, pp.304-352 (1984).
6. V. A. SOLONNIKOV, *On an initial-boundary value problem for the Stokes systems arising in the study of problem with a free boundary*, Proc. Steklov. Inst. Math. **3**, pp.191-239 (1991).
7. J. L. LIONS AND E. MAGENES, *Nonhomogeneous boundary value problem and its applications*, Springer, New York, 1969
8. O. A. LADYŽENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV AND N. N. URALCÉVA, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs vol 23, AMS (1968).
9. S. UKAI, *A Solution Formula for the Stokes Equation in  $R_+^n$* , Comm. Pure. Appl. Math. **XL**, pp.611-621 (1987)
10. R. S. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975
11. M. S. AGRANOVICH AND M. S. VISHIK, *Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type*, Russian Math. Surveys, **19**, pp.53-161 (1964)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KYOTO UNIVERSITY, KYOTO