

Untangling theorem

九大理学部 竹内 義浩

(Yoshihiro Takeuchi)

定義 Tangle とは 3-ball B と, B 内の proper arcs t_1, t_2 の組 (B, t_1, t_2) のことである.

定義 2つの tangle (B, t_1, t_2) と (B', t'_1, t'_2) が同値とは, 位相同型写像 $h: B \rightarrow B'$ が存在して, $h(t_i) = t'_i$ ($i=1, 2$) となっている時をいう.

定義 $(D^2 \times I, \{p_1, p_2\} \times I)$ と同値な tangle を trivial tangle という. 但し, D^2 は 2-disc, p_1, p_2 は $\text{Int } D^2$ の異なる 2 点.

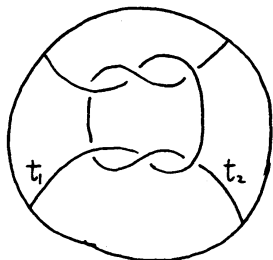
Tangle が trivial になる為の必要十分条件を次の定理が与える.

定理 (B, t_1, t_2) が trivial tangle である為の必要十分条件は次の 3つが成り立つことである.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi_1(B - (t_1 \cup t_2)) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} & \cdots \textcircled{1} \\ \pi_1(B - t_1) \cong \mathbb{Z} & \cdots \textcircled{2} \\ \pi_1(B - t_2) \cong \mathbb{Z} & \cdots \textcircled{3} \end{array} \right.$$

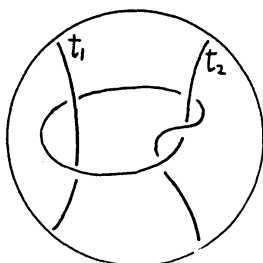
注意 ①②③ は Best possible である。即ち、

1) ②③ は成り立つが trivial でない tangle が存在する。



左図の tangle が ②③ を満たすことは明らかであり, trivial tangle ではないのは, trivial tangle を connected sum することによって Square knot が得られることによる。

2)

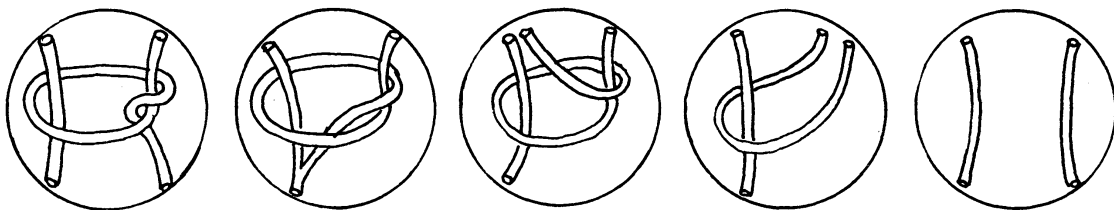


①② は成り立つが trivial でない tangle が存在する。

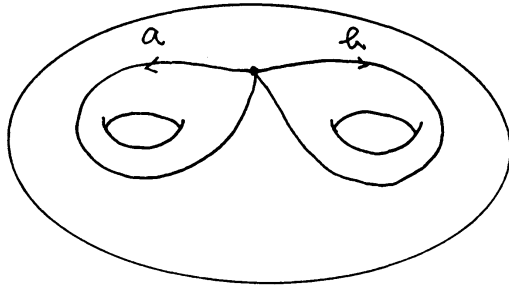
左図の tangle が ② を満たすことは明らか. trivial でないことは t_2 が trivial arc で

ないことから明らか. ① が成り立つ

ことは $B - \dot{N}(t_1 \cup t_2)$ が下図のように変形できることから明らか.



V を genus 2 の solid torus とし, a, b を ∂V 上に標準的に
とった $\pi_1(V)$ の generators とする. (下図)



この時, 次の2つの Lemma が成り立つが, 証明は省く.

Lemma 1. C を ∂V の simple closed curve とし $[C] = [a]$ in $\pi_1(V)$
とすると, V から V への位相同型写像 h と, V の meridian
disc system M_1, M_2 がとれて, $h(C)$ と M_1 は transversal に1点
で交わる.

Lemma 2. C を ∂V の simple closed curve とし $[C] = [a]^{\pm 1} [b]^n$ in $\pi_1(V)$
かつ, C と b は交わらないとすると, V から V への位相同型
写像 h と, V の meridian disc system M_1, M_2 がとれて,
(1) $h(C)$ と M_1 は transversal に1点で交わる.
(2) b と M_1 は交わらない.
(3) b と M_2 は transversal に1点で交わる.

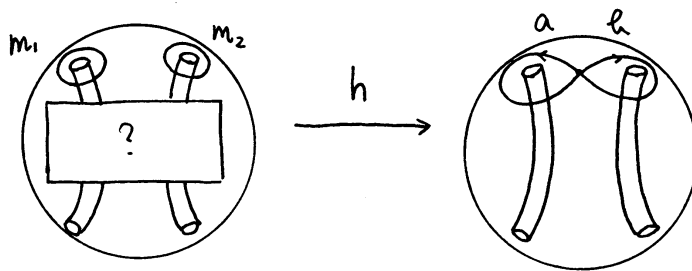
この2つの Lemma を仮定して定理の証明を行う.

定理の証明

① より 3-manifold の標準的議論により,

$$\exists h: B - \dot{N}(t_1 \cup t_2) \underset{\text{homeo.}}{\cong} V; \text{ genus 2 solid torus}$$

([1] Th. 7.1 の証明参照)



注意 $h(m_1)$, $h(m_2)$ が上図右のような a , b に ∂V 上で各々 freely homotopic であれば, この h を $N(t_1 \cup t_2)$ に自然に拡張することによって tangle を trivial にする同型写像が得られるが, $h(m_1)$, $h(m_2)$ がどのようなになっているかは一般には, わからない。以下, $h(V)$ を更に homeo. で変形して m_1 , m_2 のうつり先が, ∂V 上の標準的 longitude になるようにできることを示す。

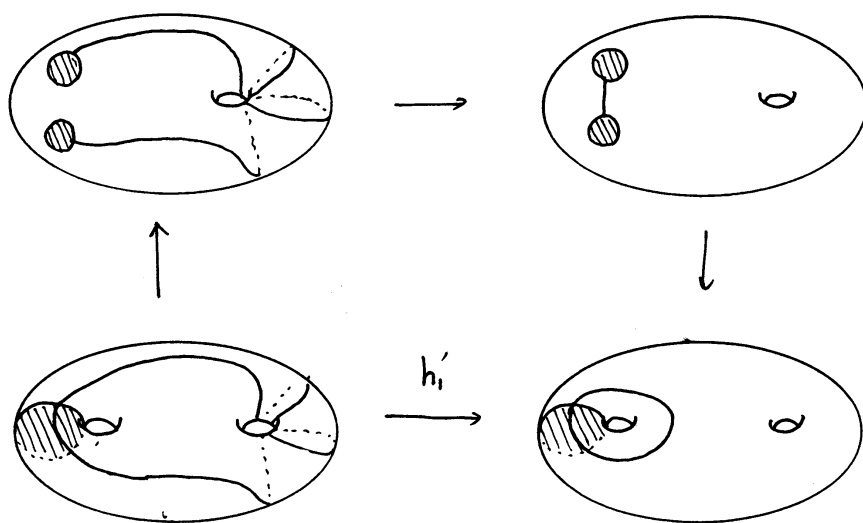
$$\begin{aligned} \text{② より } \mathbb{Z} &\cong \pi_1(B - \dot{N}(t_1)) \cong \pi_1(B - \dot{N}(t_1 \cup t_2)) / [m_2] = 1 \\ &\cong h_*(\pi_1(B - \dot{N}(t_1 \cup t_2))) / [h(m_2)] = 1 \end{aligned}$$

ここで $\mathbb{Z}$ は free 群, $h_*(\pi_1(B - \dot{N}(t_1 \cup t_2))) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ も free 群であるから combinatorial group theory の一般論から $[h(m_2)]$ は $h_*(\pi_1(B - \dot{N}(t_1 \cup t_2))) = \langle a, b \rangle$ のある generating system の元となる。

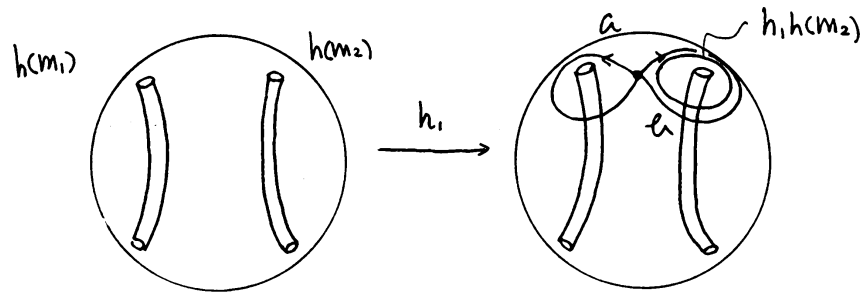
([4], 5.10 参照.)

よって群 $\langle a, b \rangle$ の generating system の Automorphism φ が存在して $\varphi(b) = [h(m_2)]$ となる. Zieschang の結果 ([6], Th 1 参照) により, 「 $\exists h_1 : V \xrightarrow{\text{homeo.}} V$ s.t. $h_1(h(m_2))$ は V の中で b に freely homotopic」が成り立つ.

Lemma 1. により存在が保証されている disc で V を cut し, disc をすべらせて再び貼り合わせることににより, V から V への homeo. h'_1 で $h'_1 h_1(m_2)$ は ∂V で b に freely homotopic になるものがつくれる. (下図参照.)



このようにして得られた $h'_1 \circ h_1$ を改めて h_1 とおくと, $h_1(h(m_2))$ は標準的な longitude と ∂V において freely homotopic となる.



$$\begin{aligned} \textcircled{3} \text{ より } \mathbb{Z} &\cong \pi_1(B - \dot{N}(t_2)) \cong \pi_1(B - \dot{N}(t, ut_2)) / [m_1] = 1 \\ &\cong (h_1 h)_* (\pi_1(B - \dot{N}(t, ut_2))) / [h_1 h(m_1)] = 1 \end{aligned}$$

再び, 前と同様の理由で $[h_1 h(m_1)]$ は上図のようにとった a, h に関して 群 $\langle a, h \rangle$ のある generating system の元となる. このとき T. Kaneto により $[h_1 h(m_1)]$ は cyclic permutation と inversion を無視して, 次の I) or II) の形に書ける. ([2] 参照)

$$\text{I) } a h^{\varepsilon_1} \cdots a h^{\varepsilon_k}$$

$$\text{II) } a^{\varepsilon_1} h \cdots a^{\varepsilon_k} h$$

但し, $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$, $|\varepsilon_i - \varepsilon_j| \leq 1$, $1 \leq i, j \leq k$.

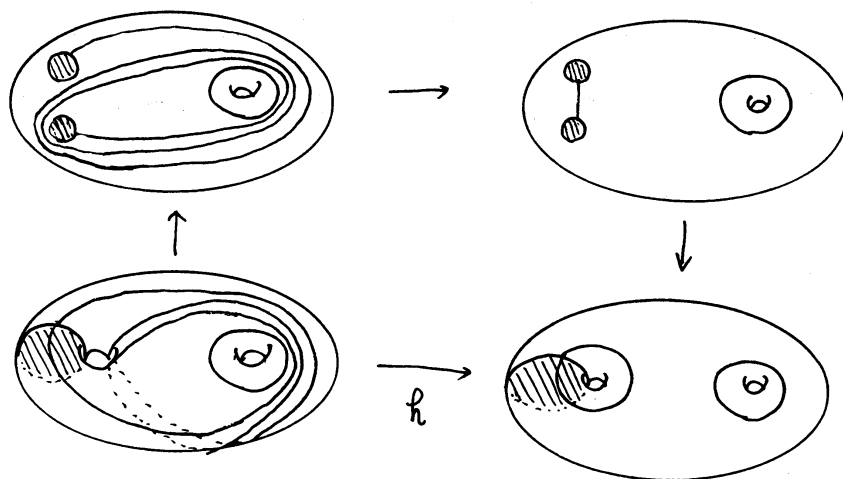
$$\text{一方, } \textcircled{2} \text{ より } \langle [m_1] \rangle = \pi_1(B - \dot{N}(t_1)) \cong \pi_1(B - \dot{N}(t, ut_2)) / [m_2] = 1$$

$$\therefore \langle [h_1 h(m_1)] \rangle = (h_1 h)_* (\pi_1(B - \dot{N}(t_1))) \cong (h_1 h)_* (\pi_1(B - \dot{N}(t, ut_2))) / [h_1 h(m_2)] = 1$$

$$\text{ここで, } (h_1 h)_* (\pi_1(B - \dot{N}(t, ut_2))) = \langle a, h \rangle, [h_1 h(m_2)] = h$$

であるから $[h_1 h(m_1)]$ という a, h の word において $h=1$ とおくと $a^{\pm 1}$ になる. I) II) の形のものでそのようなものは $a^{\pm 1} h^m$ の形に限る. よって, $h_1 h(m_1)$ は $a^{\pm 1} h^m$ に V の中で freely homotopic. Lemma 2. により存在が保証されている disc を利用して前と同様の

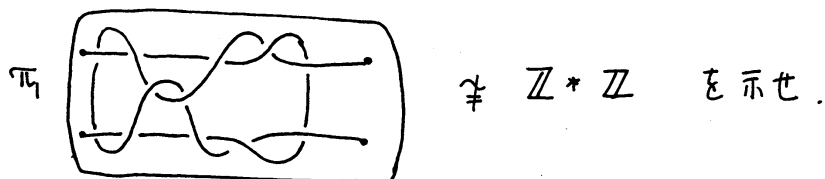
構成を行うことによつて V から V への homeo. h_2 で, $h_2(h_1h(m_1))$ は ∂V において a に freely homotopic, $h_2(h_1h(m_2))$ は ∂V において b に freely homotopic になるようなものがつくれる。(下図参照)



$h_2 \circ h_1 \circ h$ が所望の homeo. となる.

(証明終)

応用 阪市大の河内先生が 1986.5月の数理研での短期共同研究集会「Aspherical manifolds の幾何学」において提出された問題:



に答えることができる.

(解) 上図の tangle は trivial tangle を connected sum することによつて, Kinoshita-Terasaka knot になるが, Kinoshita-Terasaka

knot の bridge index は 3 であるから, この tangle は trivial でない.
よって 定理より π_1 は $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ でない.

この問題は 既に 九大の 金信氏 が Zeeman の方法で解いて
おり, より簡単な解決方法として 金信氏 が問題提起された
ことが 定理の発端となった.

参 考 文 献

- [1] J. Hempel (1976), 3-manifolds, Ann. of Math. Studies 86.
- [2] T. Kaneto (1979), S^3 の種数 2 の Heegaard diagrams に対応する
基本群の表示について, 京大数理研講究録 369.
- [3] W. Magnus, A. Karass, D. Solitar (1966), Combinatorial
group theory, Dover Publications.
- [4] R.C. Lyndon, P.E. Schupp (1977), Combinatorial group theory,
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York.
- [5] E.C. Zeeman (1960), Linking spheres, Abh. Math. Sem. Univ.
Hamburg 24, 149-153
- [6] H. Zieschang (1970), On simple systems of paths on complete
pretzels, Amer. Math. Soc. Transl. (2) vol. 92, 127-137