

標準写像における加速モードによる異常拡散

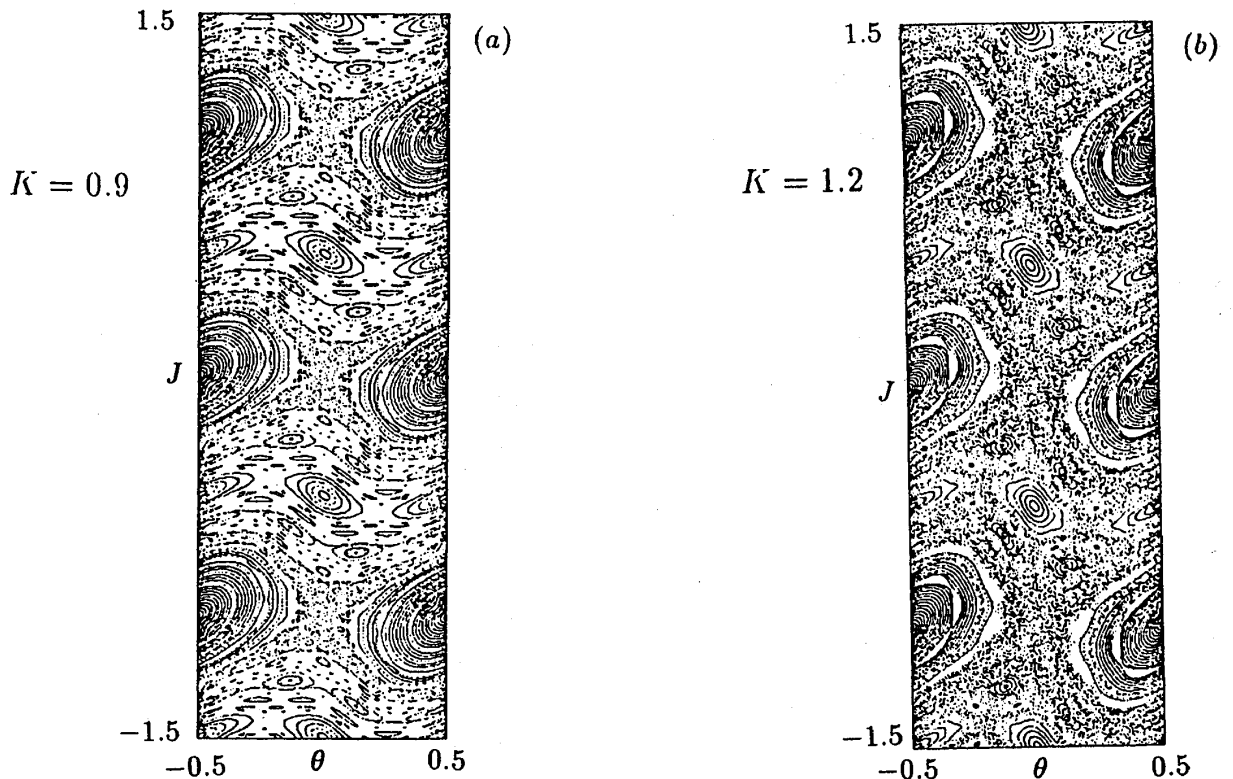
九大・理・物理
九州共立大・工

石崎龍二、小林 達治、堀田武彦
森 肇

標準写像は、次のような

$$\begin{bmatrix} \theta_{i+1} \\ J_{i+1} \end{bmatrix} = F(X_i) = \begin{bmatrix} \theta_i + J_{i+1}, \pmod{1} \\ J_i + (K/2\pi) \sin(2\pi\theta_i) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

保存系の二次元写像であり、 J 方向に確率的に加速する運動を作り出す事ができる。この確率的な加速運動を統計的に調べる為、位相空間上での初期点の集合が時間と共にどう拡がっていくのかという事が数值的、解析的に調べられている。加速運動は、 $K > K_c(0.971635406\dots)$ で起こる。下図は位相空間の構造が K_c 前後でどう変わるのかを示したもので、黒くぬりつぶされた部分（確率的に運動する領域）が、 $K > K_c$ で J 方向につながっているのがわかる。



位相空間上での点の集合の拡散の統計的性質は、拡散係数によって特徴づけられる。拡散係数のパラメータ K 依存性は数值的にも、解析的にもよく調べられていて、加速モードといわれる周期点が安定なパラメータの範囲以外ではうまく説明されている。しかし、加速モードが安定である場合、拡散係数は発散してしまう。これは加速モードが1回写像ごとに、 J の値が一定の間隔で増加する周期点で、この為加速モードが安定である場合カオス軌道は普通よりも速い拡散が生じる。¹⁾ そしてこの加速モードは、2方向に周期的な二次元の写像には必ず存在するので、この加速モードによる異常拡散はこのような二次元写像に常に生ずる現象である。¹⁾

そこで私達は、この場合の統計的記述として拡散係数に換わるものとして、速度分布のスケールリング則を数値的に示した。⁴⁾ それは次のようなものである。

1回写像当たりの J 方向の増分を n で粗視化した速度 $v_n(X_0) = (J_n(X_0) - J_0(X_0))/n$ を考えて、この速度分布は次のようなスケールリング則に従うとする。^{2), 4)}

$$P(v; n) = n^\delta \hat{p}(n^\delta v) \quad (2)$$

もし普通の拡散が起きていれば

$$\delta = 1/2,$$

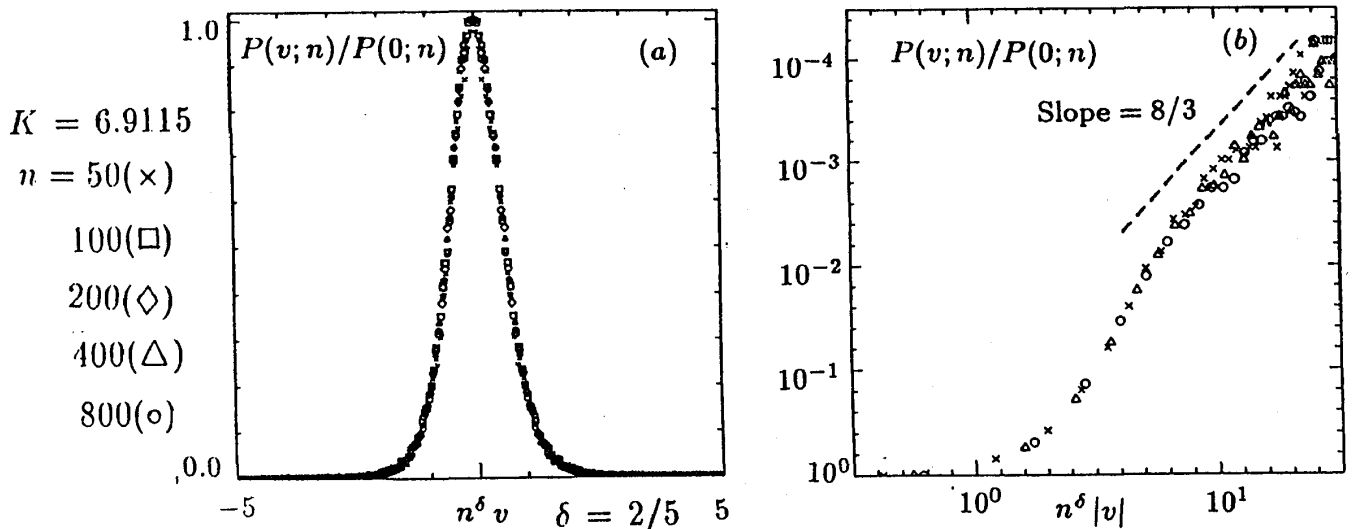
$$\hat{p}(x) = \sqrt{1/4\pi D} \exp[-x^2/4D], \quad (3)$$

これに対して、加速モードが安定である場合は、フェラーの再帰事象の定理により^{3)~5)}

$$\delta = (\beta - 1)/\beta,$$

$$\hat{p}(x) \propto |x|^{-(1+\beta)} \quad \text{for } x = n^\delta v \rightarrow \pm\infty, \quad (4)$$

となる事が予想される。ここで β は、カオス軌道が加速モードの近くに滞在する時間の分布関数の指数である。これらを数値的に調べたのが下図である。



これらは、(4) とよく一致している。同様の事が、他の二次元写像 (2 方向に周期的) にも成り立つと考えられる。⁴⁾

参考文献

- 1) A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion* (Springer-Verlag, New York, 1982).
- 2) H. Mori, H. Hata, T. Horita and T. Kobayashi, Prog. Theor. Phys. Suppl. 99(1989), 1, and reference cited therein.
- 3) T. Horita, R. Ishizaki, H. Hata and H. Mori, Prog. Theor. Phys. 83(1990), 1065.
- 4) R. Ishizaki, T. Horita, T. Kobayashi and H. Mori, Prog. Theor. Phys. (to be submitted).
- 5) W. Feller, Trans. Am. Math. Soc. 67(1949), 98.
W.-J. Wang, Phys. Rev. 81(1989), 3214.