

解析的擬微分作用素の核関数と表象について

青木 貴史 (Takashi Aoki)*
本多 尚文 (Naofumi Honda)**
山崎 晋 (Susumu Yamazaki)***

§ 1. 序

解析的カテゴリーにおける擬微分作用素は Boutet de Monvel-Kreé [6], Boutet de Monvel [5], Sato-Kawai-Kashiwara [15] によって導入された. [6] は Gevrey 族カテゴリーにおける擬微分作用素を定義しており, その特別な場合として解析的なものを考えている. また, 作用素は有限階のもののみを扱っている. 無限階の作用素を込めて定式化したのが [5], [15] である. [5], [6] では C^∞ 級の擬微分作用素の類似として解析的表象を用いた定式化が行われ, [15] ではコホモロジーを用いた定義が与えられた. [15] で定義された pseudo-differential operator は, 現在では超局所微分作用素 (micro-differential operator) と呼ばれていて, これらのなす層は, $\mathcal{E}^\infty$ で表記される. これは, いわば整数階数の作用素 (の和) のみを含むものであり, 本稿で扱う擬微分作用素より狭いクラスであるが, 無限階の作用素も含む. [15] のみならず Kashiwara-Kawai [11] では, 無限階の超局所微分作用素が本質的に重要な役割を果たした. さらに [11] においては, これらの作用素の超局所関数への作用が詳細に議論されており, Kashiwara-Kawai [10] とともに本稿の理論構成の土台が与えられている. 本稿の意味での擬微分作用素は本質的には [15] で与えられているが, これを最初に表立って用いたのは [10] であろう. そこでは記号 $\mathcal{D}^R$ が用いられた. しかし, 補助的に用いらただけであり, $\mathcal{D}^R$ の作用素には名前が付けられていなかった. その後もこの作用素のなす層は Kashiwara-Schapira [12] 等, 随所で用いられたが, 特に呼称は与えられなかった. [12] では記号 $\mathcal{E}^R$ が用いられ, 現在はこれが一般的である. 本稿でもこの記号を用いる. [5] で導入されたものは実領域に限定しているが, 本質的には複素領域で定義された $\mathcal{E}^R$ の実への制限と変わらない. 後者は普

2000 Mathematics Subject Classification(s): 32W25, 35S05, 47G30

キーワード: microdifferential operators, pseudodifferential operators, symbols, kernels

*近畿大学理工学部 (Kinki University)

**北海道大学大学院理学研究院 (Hokkaido University)

***日本大学理工学部 (Nihon University)

遍性が高い反面、微分方程式への応用には若干使いにくい面があった。[6] の定式化は [7] など多くの論文で活用されたが、 C^∞ 級カテゴリーにおける擬微分作用素と統一した定式化が広く受け入れられたからであろう。一方、片岡 [13] は $\mathcal{E}^R$ ([13] では holomorphic microlocal operator と呼ばれ、記号 $\mathcal{L}^R$ が用いられた。) に対して表象を定義し C^∞ 級の場合と同様の取り扱いが可能であることを示した。残念ながらこの理論は出版されなかったので Aoki [2] において基礎理論の一部が展開され、 $\mathcal{E}^R$ の元 (切断) を擬微分作用素 (pseudodifferential operator) と呼ぶことが提唱された。[5] の意味での擬微分作用素を、異なる定式化により複素領域も込めて一般化したのが $\mathcal{E}^R$ である、との立場からの呼称である。 $\mathcal{E}^R$ の表象は Aoki [1], [3] 等で無限階擬微分作用素の解析に活用された。これらの内容の大部分は青木-片岡-山崎 [4] に盛り込まれた。しかしながら、留数写像を用いてコホモロジ的に定められた作用素の積が表象の Leibniz 則と対応するか等の基礎的部分は厳密な議論が行われないうままになっていた。一方で、神本晋吾は [2], [4] の核関数の取り扱いには積の定義において不十分な点があることを指摘し、その解決策を片岡とともに提示した (Kamimoto-Kataoka [8], 神本-片岡 [9])。ただし、ここでもコホモロジ的な積と Leibniz 則の整合性は議論されていない。そこで本稿ではこれらの問題を解決するためのアイデアについて報告する。基本的な発想は核関数に余分なパラメータを導入することである。これにより核関数同士の積を定義する際に現れる積分の端点の問題を回避できる。もちろん、余分なパラメータを導入すると核関数の空間の構造が見かけ上変わってしまうが、modulo class をうまく取ることにより元の空間と同型であることが示される。このような核関数から定めた表象も当然余分なパラメータを持つが、これもまた実質は消し去ることができるのである。パラメータを導入するというアイデアは [8], [9] から発想を得ている。見かけ上、扱いは異なっているが、余分なパラメータを導入しなければならない必然性があるように思われる。両者の関連性を調べることは今後の課題である。本稿では概略のみを述べる。詳細は現在準備中の論文で発表予定である。

§ 2. 正則超局所函数の見かけのパラメータ付き表現

$X = \mathbb{C}^n$ とする。本稿において擬微分作用素とは層 $\mathcal{E}_X^R$ の切断のことをいう。 $\mathcal{E}_X^R$ は $X \times X$ 上の対角線に対する正則超局所函数 (a holomorphic microfunction) を核とする積分作用素として定義される。そこで、まず正則超局所函数の見かけのパラメータ付き表現について考察する。

X の座標を $z = (z_1, \dots, z_n)$, $1 \leq d \leq n$ に対し $Y = \{z \in X; z_1 = \dots = z_d = 0\}$ とする。また、 $z = (z', z'')$, $z' = (z_1, \dots, z_d)$ と書く。 $z \in \mathbb{C}^n$ に対し $\|z\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|z_i|\}$ とおく。 Y の余法束 T_Y^*X 上の正則超局所函数の層を $\mathcal{E}_{Y|X}^R$ とする。定義より T_Y^*X の点

$z_0^* = (z_0'', \zeta_0') \ (|\zeta_0'| = 1)$ に対して

$$(2.1) \quad \mathcal{C}_{Y|X, z_0^*}^{\mathbb{R}} = \varinjlim_{\varrho, L, U} H_{G_{\varrho, L} \cap U}^d(U, \mathcal{O}_X)$$

である ([15] 参照). ここで, $U \subset X$ は $z_0 = (0, z_0'')$ の近傍を, また, L は

$$\{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 0\} \cup \{0\}$$

に含まれる原点を頂点とする閉凸錐をそれぞれ動き,

$$(2.2) \quad G_{\varrho, L} = \{z \in X; \varrho^2 |z' - \langle z', \zeta_0' \rangle \bar{\zeta}_0'| \leq |\langle z', \zeta_0' \rangle|, \langle z', \zeta_0' \rangle \in L\}$$

とおいた. $\mathcal{O}_X$ は X 上の正則関数の層である. (2.1) の右辺に現れたコホモロジーの別表現を考える.

$\hat{X} = X \times \mathbb{C}$ とおき, $\hat{X}$ の元を (z, η) と書く. $\eta \in \mathbb{C}$ が見かけのパラメータを表す.

$$\pi_\eta: \hat{X} \rightarrow X$$

を自然な射影とする. 開セクター $S_{r, \theta}$ を

$$S_{r, \theta} = \{\eta \in \mathbb{C}; |\arg \eta| < \theta, 0 < |\eta| < r\}$$

により定義する. さらに

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \hat{G}_{\varrho, L} &= \{(z, \eta) \in \hat{X}; \varrho |z' - \langle z', \zeta_0' \rangle \bar{\zeta}_0'| \leq |\eta|, \langle z', \zeta_0' \rangle \in L\}, \\ \hat{U}_{\varrho, r, \theta} &= \{(z, \eta) \in U \times S_{r, \theta}; |\langle z', \zeta_0' \rangle| < \varrho |\eta|\} \end{aligned}$$

とおくとき,

$$(2.4) \quad \varinjlim_{\varrho, r, \theta, L, U} H_{\hat{G}_{\varrho, L} \cap \hat{U}_{\varrho, r, \theta}}^k(\hat{U}_{\varrho, r, \theta}; \mathcal{O}_{\hat{X}}) = 0 \quad (k \neq d).$$

であることが示される.

定義 2.1. これらの記法のもとに

$$\hat{C}_{Y|X, z_0^*}^{\mathbb{R}} = \varinjlim_{\varrho, r, \theta, L, U} H_{\hat{G}_{\varrho, L} \cap \hat{U}_{\varrho, r, \theta}}^d(\hat{U}_{\varrho, r, \theta}; \mathcal{O}_{\hat{X}}),$$

と定める. ここで, $U \subset \hat{X}$ は z_0 の近傍を, また, L は $\{x \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} x > 0\} \cup \{0\}$ に含まれる原点を頂点とする閉凸錐をそれぞれ動く. さらに,

$$C_{Y|X, z_0^*}^{\mathbb{R}} = \operatorname{Ker} (\partial_\eta: \hat{C}_{Y|X, z_0^*}^{\mathbb{R}} \rightarrow \hat{C}_{Y|X, z_0^*}^{\mathbb{R}})$$

と定める.

このとき次の定理が成り立つ.

定理 2.2. 自然な同型

$$\mathcal{C}_{Y|X, z_0^*}^{\mathbb{R}} \simeq C_{Y|X, z_0^*}^{\mathbb{R}}$$

が存在する.

余分なパラメータ η を導入して, コホモロジーを考える正則函数の変数を一旦増やして, コホモロジー類として η に依らないもののみを考えるので, 実際には本来の正則超局所函数と変わらないものが得られる. 証明は割愛するが, コホモロジーの消滅定理が必要となる. η は擬微分作用素の積を与える核関数の合成を定義する際の積分において活用される.

§ 3. 見かけのパラメータ付き擬微分作用素

前節の X を $X^2 := X \times X$, Y を対角線集合 $\Delta := \{(x, x); x \in X\}$ ($\simeq X$ と同一視) に読み替えて得られる正則超局所函数の層 $\mathcal{C}_{\Delta|X^2}^{\mathbb{R}}$ の切断 (に n 型式を掛けたもの) が擬微分作用素の核関数である. 従って前節の議論を繰り返せば見かけのパラメータ付きの擬微分作用素が得られる. X^2 の座標を $(z, w) = (z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n)$ とし, 対角線集合は $z_1 - w_1 = \dots = z_n - w_n = 0$ で定まると考える. また, 見かけのパラメータ η を込めた空間 $X^2 \times \mathbb{C}_\eta$ を $\hat{X}^2$ と記す. 核関数の代表元である正則函数の正則域を詳しく見るために記号を導入する. 以下, $T_\Delta^* X^2$ を $T^* X$ と

$$T^* X = \{(z; \zeta)\} \simeq \{(z, z; \zeta, -\zeta)\} = T_\Delta^* X^2$$

により同一視する. $z_0^* = (z_0; \zeta_0) \in T^* X$ ($|\zeta_0| = 1$) において考える. 以下では, 簡単のため $z_0 = 0$ とする. 閉凸錐 $L \subset \mathbb{C}$ に対して

$$G_{\Delta, \varrho, L} = \{(z, w) \in X^2; \varrho^2 |z - w - \langle z - w, \zeta_0 \rangle \bar{\zeta}_0| \leq |\langle z - w, \zeta_0 \rangle|, \langle z - w, \zeta_0 \rangle \in L\}$$

とおく. $\mathcal{C}_X^{\mathbb{R}}$ の定義によって

$$\mathcal{C}_{X, z_0^*}^{\mathbb{R}} = \varinjlim_{\varrho, L, U} H_{G_{\Delta, \varrho, L} \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X^2}^{(0, n)})$$

である. ここで, $\mathcal{O}_{X^2}^{(0, n)}$ は $dw_1, \dots, dw_n$ に関する正則 n 型式の層を表し $U \subset X^2$ は (z_0, z_0) の開近傍を, また, $L \subset \mathbb{C}$ は $L \subset \{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 0\} \cup \{0\}$ を満たし原点を頂点とする閉凸錐を動く.

この場合も見かけのパラメータ付きのコホモロジーを考える。開集合 $U \subset X^2$ および閉凸錐 $L \subset \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\widehat{U}_{\Delta, \varrho, r, \theta} &= \{(z, w, \eta) \in U \times \mathbb{C}; |\langle z - w, \zeta_0 \rangle| < \varrho |\eta|\}, \\ \widehat{G}_{\Delta, \varrho, L} &= \{(z, w, \eta) \in \widehat{X}^2; \varrho |z - w - \langle z - w, \zeta_0 \rangle \bar{\zeta}_0| \leq |\eta|, \langle z - w, \zeta_0 \rangle \in L\}\end{aligned}$$

とおく。

定義 3.1. 上の記法の下に

$$\widehat{E}_{X, z_0}^{\mathbb{R}} = \varinjlim_{\varrho, r, \theta, L, U} H_{\widehat{G}_{\Delta, \varrho, L} \cap \widehat{U}_{\Delta, \varrho, r, \theta}}^n(\widehat{U}_{\Delta, \varrho, r, \theta}; \mathcal{O}_{\widehat{X}^2}^{(0, n, 0)})$$

とおく。ただし、 $\mathcal{O}_{\widehat{X}^2}^{(0, n, 0)}$ は $dw_1, \dots, dw_n$ に関する正則 n 型式の層であり、 $U \subset X$ は z_0 の開近傍を、 $L \subset \mathbb{C}$ は $L \subset \{\tau \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \tau > 0\} \cup \{0\}$ を満たす閉凸錐を動く。さらに、

$$E_{X, z_0}^{\mathbb{R}} = \operatorname{Ker}(\partial_\eta: \widehat{E}_{X, z_0}^{\mathbb{R}} \rightarrow \widehat{E}_{X, z_0}^{\mathbb{R}})$$

と定める。

前節で述べたことを言い換えると次が得られる。

定理 3.2. 自然な同型

$$\mathcal{O}_{X, z_0}^{\mathbb{R}} \simeq E_{X, z_0}^{\mathbb{R}}$$

が得られる。

以下では $z_0^* = (0; 1, 0, \dots, 0)$ とし、 $E_{X, z_0^*}^{\mathbb{R}}$ の Čech 表現を考えよう。帰納極限を取る際の集合の形状を精密に記述するためにパラメータの組を表す文字

$$\kappa = (r, r', \varrho, \theta) \in \mathbb{R}^4$$

を導入する。ここで、 r, r', ϱ, θ は

$$(3.1) \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varrho < 1, \quad 0 < r < \varrho r'$$

を満たしているものを考える。このパラメータに対して

$$\begin{aligned}S_\kappa &= S_{r, \theta/4} = \{\eta \in \mathbb{C}; |\arg \eta| < \frac{\theta}{4}, 0 < |\eta| < r\}, \\ \widehat{U}_{\Delta, \kappa} &= \bigcap_{i=1}^n \{(z, w, \eta) \in X^2 \times S_\kappa; |z_1 - w_1| < \varrho |\eta|, |z_i - w_i| < r', \|z\| < r'\}, \\ \widehat{G}_{\Delta, \kappa} &= \{(z, w, \eta) \in \widehat{X}^2; |\arg(z_1 - w_1)| \leq \frac{\pi}{2} - \theta, \varrho |z_i - w_i| \leq |\eta|\}\end{aligned}$$

とおく。

定義 3.3. $\widehat{E}_X^{\mathbb{R}}(\kappa)$ および $E_X^{\mathbb{R}}(\kappa)$ を

$$\begin{aligned}\widehat{E}_X^{\mathbb{R}}(\kappa) &= H_{\widehat{G}_{\Delta, \kappa} \cap \widehat{U}_{\Delta, \kappa}}^n(\widehat{U}_{\Delta, \kappa}; \mathcal{O}_{\widehat{X}^2}^{(0, n, 0)}), \\ E_X^{\mathbb{R}}(\kappa) &= \text{Ker}(\partial_\eta: \widehat{E}_X^{\mathbb{R}}(\kappa) \rightarrow \widehat{E}_X^{\mathbb{R}}(\kappa))\end{aligned}$$

により定める.

これらのČech 表現を与える.

$$\begin{aligned}\widehat{V}_{\Delta, \kappa}^{(1)} &:= \{(z, w, \eta) \in \widehat{U}_{\Delta, \kappa}; \frac{\pi}{2} - \theta < \arg(z_1 - w_1) < \frac{3\pi}{2} + \theta\}, \\ \widehat{V}_{\Delta, \kappa}^{(i)} &:= \{(z, w, \eta) \in \widehat{U}_{\Delta, \kappa}; \varrho|z_i - w_i| > |\eta|\} \quad (2 \leq i \leq n)\end{aligned}$$

と定める. これらの集合による被覆を用いて

$$(3.2) \quad \widehat{E}_X^{\mathbb{R}}(\kappa) = \Gamma\left(\bigcap_{j=1}^n \widehat{V}_{\Delta, \kappa}^{(j)}; \mathcal{O}_{\widehat{X}^2}^{(0, n, 0)}\right) / \sum_{k=1}^n \Gamma\left(\bigcap_{j \neq k} \widehat{V}_{\Delta, \kappa}^{(j)}; \mathcal{O}_{\widehat{X}^2}^{(0, n, 0)}\right),$$

$$(3.3) \quad E_X^{\mathbb{R}}(\kappa) = \left\{ K \in \widehat{E}_X^{\mathbb{R}}(\kappa); \partial_\eta K = 0 \right\}$$

と表される. (3.3) 右辺の元が擬微分作用素 $P \in \mathcal{O}_{X, z_0}^{\mathbb{R}}$ の核函数を与える. この表現を用いると 2 つの擬微分作用の積を具体的に対応する 2 つの核函数の積の積分として得ることができる.

2 つの核函数の代表元 $K_1(z, w, \eta)dw, K_2(z, w, \eta)dw \in \Gamma\left(\bigcap_{j=1}^n \widehat{V}_{\Delta, \kappa}^{(j)}; \mathcal{O}_{\widehat{X}^2}^{(0, n, 0)}\right)$ を考える. $(z, \eta) \in \widehat{X}$ に対して w_1 -平面における路

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & \left\{ w_1 = z_1 + \frac{t\varrho\eta}{2} e^{-\sqrt{-1}t(\frac{\pi+\theta}{2})}; 1 \geq t \geq \epsilon \right\} \\ & \vee \left\{ w_1 = z_1 + \frac{\epsilon\varrho\eta}{2} e^{\sqrt{-1}t}; \frac{-(\pi+\theta)}{2} \leq t \leq \frac{\pi+\theta}{2} \right\} \\ & \vee \left\{ w_1 = z_1 + \frac{t\varrho\eta}{2} e^{\sqrt{-1}t(\frac{\pi+\theta}{2})}; \epsilon \leq t \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

を $\gamma_1(z, \eta; \varrho, \theta)$ とする. ただし, $\epsilon > 0$ は十分小さいとし, ϱ, θ は κ の成分のパラメータである. この路は 2 点 $z_1 + \frac{\varrho\eta}{2} e^{-\sqrt{-1}(\frac{\pi+\theta}{2})}, z_1 + \frac{\varrho\eta}{2} e^{\sqrt{-1}(\frac{\pi+\theta}{2})}$ を結び z_1, η に正則に依存することに注意する. また, w_j 平面 ($j = 2, \dots, n$) における路

$$(3.5) \quad \left\{ w_j = z_j + \left(\frac{|\eta|}{\varrho} + \epsilon \right) e^{\sqrt{-1}t}; 0 \leq t \leq 2\pi \right\}.$$

を $\gamma_j(z, \eta; \varrho)$ とする. これは z_j を中心とした半径 $\frac{|\eta|}{\varrho} + \epsilon$ の円周である. X における実 n 鎖を

$$(3.6) \quad \gamma(z, \eta; \varrho, \theta) = \gamma_1 \times \dots \times \gamma_n$$

により定める.

命題 3.4. パラメータ $\tilde{\kappa} = (\tilde{r}, \tilde{r}', \tilde{\theta}, \tilde{\varrho}) \in \mathbb{R}^4$ が

$$(3.7) \quad 0 < \tilde{r} < r, \quad 0 < \tilde{r}' < \frac{r'}{8}, \quad 0 < \tilde{\theta} < \frac{\theta}{4}, \quad 0 < \tilde{\varrho} < \frac{\varrho}{2} \sin \frac{\theta}{4},$$

を満たすとする. このとき

$$\begin{aligned} & K_1(z, w, \eta)dw \otimes K_2(w, x, \eta)dx \\ & \longrightarrow \left(\int_{\gamma(z, \eta; \varrho, \theta)} K_1(z, w, \eta)K_2(w, x, \eta)dw \right) dx \end{aligned}$$

により定まる双線型射

$$\mu : E_X^{\mathbb{R}}(\kappa) \otimes_{\mathbb{C}} E_X^{\mathbb{R}}(\kappa) \rightarrow E_X^{\mathbb{R}}(\tilde{\kappa})$$

が存在する.

Kashiwara-Kawai [11], Chapter III の論法を用いて次の定理が得られる.

定理 3.5. 次の図式が可換となる:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X, z_0^*}^{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{O}_{X, z_0^*}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X, z_0^*}^{\mathbb{R}} \\ \parallel & & \parallel \\ \varinjlim (E_X^{\mathbb{R}}(\kappa) \otimes E_X^{\mathbb{R}}(\kappa)) & \xrightarrow{\mu} & \varinjlim E_X^{\mathbb{R}}(\kappa). \end{array}$$

ただし μ は**命題 3.4**における μ から導かれた射であり, 上の矢印はコホモロジー類の積分で定義された擬微分作用素の積を表す.

すなわち, **命題 3.4**において具体的に核関数と積分で与えられた合成がコホモロジー的に定められた擬微分作用素の積と両立する. ここでは, 作用素の積についてのみ述べたが, 擬微分作用素の正則超局所関数への作用に関しても同様に議論することが可能である.

§ 4. 見かけのパラメータ付き表象

本節においても前節までの記号を踏襲する. $T^*X \simeq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ の座標を $(z; \zeta)$ で表し, $z_0^* = (0; 1, 0, \dots, 0)$ とする. T^*X から X への標準射影を π で表す. T^*X の部分集合 V が錐的であるとは ζ に関して錐的であることをいう. 錐的部分集合 $V \subset T^*X$ に対して

$$V[d] = \{(z, \zeta) \in V; \|\zeta\| \geq d\}$$

とおく. 任意の錐的開部分集合 $\Omega \subset T^*X$ と $\rho > 0$ に対して

$$\Omega_\rho = \text{Cl} \left[\bigcup_{(z, \zeta) \in \Omega} \{(z + z', \zeta + \zeta') \in \mathbb{C}^n; \|z'\| \leq \rho, \|\zeta'\| \leq \rho\|\zeta\|\} \right]$$

とおく. また, 簡単のため $d > 0$ および $\rho \in]0, 1[$ に対し

$$d_\rho = d(1 - \rho)$$

とおく. T^*X の錐的部分集合 U, V に対して V が U のコンパクト部分集合で生成されるとき $V \Subset U$ と書く. $\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$ の表象の定義を復習しておく ([4] 参照).

定義 4.1. $\Omega \Subset T^*X$ を錐的開集合とする.

(1) $P(z, \zeta)$ が Ω で定義された表象であるとは, $d > 0$ と $\rho \in]0, 1[$ が存在して $P(z, \zeta) \in \Gamma(\Omega_\rho[d_\rho]; \mathcal{O}_{T^*X})$ であり, 任意の $h > 0$ に対して定数 $C_h > 0$ が存在して

$$|P(z, \zeta)| \leq C_h e^{h\|\zeta\|} \quad ((z, \zeta) \in \Omega_\rho[d_\rho])$$

が成り立つことをいう. Ω で定義された表象全体のなす集合を $\mathcal{S}(\Omega)$ と書く.

(2) $P(z, \zeta)$ が Ω で定義された零表象であるとは, $d > 0$ と $\rho \in]0, 1[$ が存在して $P(z, \zeta) \in \Gamma(\Omega_\rho[d_\rho]; \mathcal{O}_{T^*X})$ であり, 定数 $C > 0, h > 0$ が存在して

$$|P(z, \zeta)| \leq C e^{-h\|\zeta\|} \quad ((z, \zeta) \in \Omega_\rho[d_\rho])$$

を満たすことをいう. Ω で定義された零表象全体のなす集合を $\mathcal{N}(\Omega)$ と書く.

(3) $z_0^* \in T^*X$ に対して

$$\mathcal{S}_{z_0^*} = \varinjlim_{\Omega \ni z_0^*} \mathcal{S}(\Omega) \supset \mathcal{N}_{z_0^*} = \varinjlim_{\Omega \ni z_0^*} \mathcal{N}(\Omega)$$

とおく. ここで $\Omega \Subset T^*X$ は z_0^* の錐的開近傍である.

この記号の元に同型

$$(4.1) \quad \mathcal{O}_{X, z_0^*}^{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{z_0^*} / \mathcal{N}_{z_0^*}$$

が知られている. 前節で導入したパラメータ $\kappa = (r, r', \varrho, \theta)$ および S_κ に対し, 以下では

$$(4.2) \quad S = S_\kappa$$

とおく.

定義 4.2. 集合 $\mathfrak{N}(\Omega; S)$ を次の条件を満たす関数 $P(z, \zeta, \eta)$ 全体の集合とする:

- (1) ある $d > 0$ と $\rho \in]0, 1[$ に対して $P(z, \zeta, \eta) \in \Gamma(\Omega_\rho[d_\rho] \times S; \mathcal{O}_{T^*X \times \mathbb{C}})$.
 (2) $h > 0$ が存在して任意の $Z \in S$ に対し適当な $C_Z > 0$ を取れば

$$(4.3) \quad |P(z, \zeta, \eta)| \leq C_Z e^{-h\|\eta\zeta\|} \quad ((z, \zeta, \eta) \in \Omega_\rho[d_\rho] \times Z).$$

Cauchy の評価式により $P(z, \zeta, \eta) \in \mathfrak{N}(\Omega; S)$ ならば $\partial_\eta P(z, \zeta, \eta) \in \mathfrak{N}(\Omega; S)$ であることが分かる.

次の命題は以下の議論において基本的である.

命題 4.3. $P(z, \zeta, \eta) \in \Gamma(\Omega_\rho[d_\rho] \times S; \mathcal{O}_{T^*X \times \mathbb{C}})$ が $\partial_\eta P(z, \zeta, \eta) \in \mathfrak{N}(\Omega; S)$ を満たしていると仮定する.

- (1) 次の 2 条件は同値である :

- (i) $v > 0$ が存在して任意の $Z \in S$ に対して $C_Z > 0$ を適切に選べば

$$|P(z, \zeta, \eta)| \leq C_Z e^{v\|\eta\|\|\zeta\|} \quad ((z, \zeta, \eta) \in \Omega_\rho[d_\rho] \times Z)$$

が成り立つ.

- (ii) 任意の $h > 0$ と $Z \in S$ に対して $C_{h,Z} > 0$ が存在して

$$|P(z, \zeta, \eta)| \leq C_{h,Z} e^{h\|\zeta\|} \quad ((z, \zeta, \eta) \in \Omega_\rho[d_\rho] \times Z)$$

が成り立つ.

- (2) $P(z, \zeta, \eta)$ が上の同値な条件を満たしているとする. このとき任意の $\eta_0 \in S$ に対し $P(z, \zeta, \eta_0) \in \mathcal{S}(\Omega)$ であり $P(z, \zeta, \eta) - P(z, \zeta, \eta_0) \in \mathfrak{N}(\Omega; S)$ である.
 (3) $P(z, \zeta, \eta) \in \mathfrak{N}(\Omega; S)$ ならば $P(z, \zeta, \eta_0) \in \mathfrak{N}(\Omega; S)$ である.

この命題は微積分の基本定理と $\partial_\eta P(z, \zeta, \eta) \in \mathfrak{N}(\Omega; S)$ を組み合わせて証明される. これにより次の定義が意味を持つ.

定義 4.4. 次の条件を満たす $P(z, \zeta, \eta)$ 全体の集合を $\mathfrak{G}(\Omega; S)$ と定める :

- (1) ある $d > 0$, $\rho \in]0, 1[$ に対し $P(z, \zeta, \eta) \in \Gamma(\Omega_\rho[d_\rho] \times S; \mathcal{O}_{T^*X \times \mathbb{C}})$.
 (2) $\partial_\eta P(z, \zeta, \eta) \in \mathfrak{N}(\Omega; S)$.
 (3) $P(z, \zeta, \eta)$ は命題 4.3 (1) の同値な条件を満たす.

定義 4.5. $z_0^* \in T^*X$ に対し

$$\mathfrak{S}_{z_0^*} = \varinjlim_{\Omega, S} \mathfrak{S}(\Omega; S) \supset \mathfrak{N}_{z_0^*} = \varinjlim_{\Omega, S} \mathfrak{N}(\Omega; S)$$

とおく. ただし, $\Omega \in T^*X$ は z_0^* の錐的開近傍を動き, S については (4.2) において $r_0, \theta \rightarrow 0$ となる極限を取る.

$\mathfrak{S}(\Omega; S)$ の元を Ω において定義された表象 (symbol) という. また, $\mathfrak{N}(\Omega; S)$ の元を Ω において定義された零表象 (null symbol) という. 明らかに $\mathfrak{S}(\Omega; S)$ は通常の演算のもとに $\mathbb{C}$ -代数となり, $\mathfrak{N}(\Omega; S)$ はその部分代数である. 定義により

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Omega) &= \{P(z, \zeta, \eta) \in \mathfrak{S}(\Omega; S); \partial_\eta P(z, \zeta, \eta) = 0\} \subset \mathfrak{S}(\Omega; S), \\ \mathcal{N}(\Omega) &= \mathcal{S}(\Omega) \cap \mathfrak{N}(\Omega; S) \subset \mathfrak{N}(\Omega; S) \end{aligned}$$

である. 従って単射 $\mathcal{S}(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega) \rightarrow \mathfrak{S}(\Omega; S)/\mathfrak{N}(\Omega; S)$ がある. 命題 4.3 によつて, これは同型となる. $P(z, \zeta, \eta) \in \mathfrak{S}(\Omega; S)$ に対し, この $\mathfrak{S}(\Omega; S)/\mathfrak{N}(\Omega; S)$ における同値類, あるいは対応する $\mathcal{S}(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega)$ の元を $:P(z, \zeta, \eta):$ で表す. 同型 (4.1) により, これが定める $\mathcal{O}_{X, z_0^*}^{\mathbb{R}}$ の元も同じ記号で表す.

§ 5. 核函数と表象

前 2 節で導入された見かけのパラメータ付き核函数と表象の対応は通常核函数と表象の対応と同様である. これに関して簡単な説明を与える. 記号は前節までのものを踏襲する.

$K(z, w, \eta)dw \in \varinjlim_{\kappa} E_X^{\mathbb{R}}(\kappa)$ に対してこの類の代表元である正則関数も $K(z, w, \eta)$ で表す. $K(z, w, \eta)$ を 1 つとると $r', \varrho, \theta > 0$ があつて $K(z, z+w, \eta)$ は

$$\bigcap_{i=2}^n \left\{ (z, w, \eta) \in \mathbb{C}^{2n+1}; \|z\| < r', \frac{1}{\varrho}|\eta| < |w_i| < r', |w_1| < \varrho|\eta|, \eta \in S, |\arg w_1| < \frac{\pi}{2} + \theta \right\}$$

で正則となる. そこで

$$(5.1) \quad \sigma(K)(z, \zeta, \eta) = \int_{\gamma(0, \eta; \varrho, \theta)} K(z, z+w, \eta) e^{\langle w, \zeta \rangle} dw$$

とおく. ただし, γ は第 3 節で定められた鎖である. γ_1 の端点の選び方より $\partial_\eta \sigma(K)(z, \zeta, \eta) \in \mathfrak{N}_{z_0^*}$ であることが分かる. また, $\gamma(0, \eta; \varrho, \theta)$ を適切に変形することにより $\sigma(K)(z, \zeta, \eta) \in \mathfrak{S}_{z_0^*}$ であることが示せる. 従つて σ から線型写像 $\varinjlim_{\kappa} E_X^{\mathbb{R}}(\kappa) \rightarrow \mathfrak{S}_{z_0^*}/\mathfrak{N}_{z_0^*}$ が引き起こされる. 従つて線型写像 $\mathcal{O}_{X, z_0^*}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{S}_{z_0^*}/\mathfrak{N}_{z_0^*}$ が得られる. この写像も同じ σ で表す.

定理 5.1. σ は線型同型写像である.

これは σ の逆写像を構成することにより証明される. $P(z, \zeta, \eta) \in \mathfrak{G}_{z_0^*}$ とする. これを $\zeta'/\zeta_1 = (\zeta_2/\zeta_1, \dots, \zeta_n/\zeta_1)$ に関して Taylor 展開する:

$$(5.2) \quad P(z, \zeta, \eta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1}} P_\alpha(z, \zeta_1, \eta) \left(\frac{\zeta'}{\zeta_1} \right)^\alpha.$$

$P_\alpha(z, \zeta_1, \eta)$ は $z' = (z_2, \dots, z_n)$ および η をパラメータとする 1 変数の表象と見なせる. その核関数としては 1 変数のものを取り出すことが出来る:

$$K_\alpha(z, w_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_d^\infty P_\alpha(z, \zeta_1, \eta_0) e^{-\zeta_1(z_1-w_1)} d\zeta_1.$$

ここで η_0 は S 内の点, $d > 0$ は適当に取っている. また, $(\zeta'/\zeta_1)^\alpha$ の核関数としては η に依存しないもので $\alpha \neq 0$ に対しては

$$L_\alpha(w, x) = \frac{\alpha!}{(2\pi\sqrt{-1})^n (|\alpha| - 1)!} \frac{(x_1 - w_1)^{|\alpha|-1} \log(x_1 - w_1)}{(w_2 - x_2)^{\alpha_2+1} \dots (w_n - x_n)^{\alpha_n+1}}$$

が取れる. そこで $\eta \in S$ および ϱ, θ を適当に選んで

$$K_\alpha *_{\eta} L_\alpha = \int_{\gamma_1(z_1; \varrho, \theta)} K_\alpha(z, w_1) L_\alpha(w_1, z_2, \dots, z_n, x) dw_1$$

とおく. これは 1 変数の核関数の合成の積分端点を η に依存させたものである. このことにより $K_\alpha *_{\eta} L_\alpha$ の正則域が確保でき見かけのパラメータ付き核関数として意味を持つ. さらに

$$\varpi(P) = K_0 + \sum_{\alpha \neq 0} K_\alpha *_{\eta} L_\alpha$$

とおくと, これは収束して $\varpi(P)(z, x, \eta) dx$ は $\lim_{\kappa} E_X^{\mathbb{R}}(\kappa)$ の元を定めることが分かる. さらに $\varpi\sigma = \text{id}$, $\sigma\varpi = \text{id}$ が示される.

§ 6. 見かけのパラメータ付き古典的形式表象

擬微分作用の積等の演算を表象で表すためには古典的形式表象 ([4], [14] 参照) を用いる必要があった. この定義を復習しておく.

定義 6.1. t を不定元とする.

(1) $P(t; z, \zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu P_\nu(z, \zeta)$ が $\widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}}(\Omega)$ に属するとは, 適当な $d > 0$ および $\rho \in]0, 1[$ に対して $P(t; z, \zeta, \eta) \in \Gamma(\Omega_\rho[d_\rho]; \mathcal{O}_{T^*X})[[t]]$ であり, $A > 0$ が存在して次が成り立つこ

とである: 任意の $h > 0$ に対して定数 $C_h > 0$ を適切に選べば

$$|P_\nu(z, \zeta)| \leq \frac{C_h A^\nu \nu! e^{h\|\zeta\|}}{\|\zeta\|^\nu} \quad (\nu \in \mathbb{N}_0, (z; \zeta) \in \Omega_\rho[d_\rho])$$

となる.

(2) $P(t; z, \zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu P_\nu(z, \zeta, \eta) \in \widehat{\mathcal{P}}_{\text{cl}}(\Omega)$ が $\widehat{\mathcal{N}}_{\text{cl}}(\Omega)$ に属するとは, 次を満たす定数 $A > 0$ が存在することである: 任意の $h > 0$ に対して定数 $C_h > 0$ を適切に選べば

$$\left| \sum_{\nu=0}^{m-1} P_\nu(z, \zeta) \right| \leq \frac{C_h A^m m! e^{h\|\zeta\|}}{\|\zeta\|^m} \quad (m \in \mathbb{N}, (z; \zeta) \in \Omega_\rho[d_\rho])$$

となる.

(3) $z_0^* \in \dot{T}^*X$ に対して

$$\widehat{\mathcal{P}}_{\text{cl}, z_0^*} = \varinjlim_{\Omega} \widehat{\mathcal{P}}_{\text{cl}}(\Omega) \supset \widehat{\mathcal{N}}_{\text{cl}, z_0^*} = \varinjlim_{\Omega} \widehat{\mathcal{N}}_{\text{cl}}(\Omega)$$

と定める. $\widehat{\mathcal{P}}_{\text{cl}}(\Omega)$ の元を Ω で定義された古典的形式表象という. また, $\widehat{\mathcal{N}}_{\text{cl}}(\Omega)$ の元を古典的零形式表象という.

形式表象に見かけのパラメータを導入する. 表象の場合と同様に, まず見かけのパラメータ付き古典的零形式表象を定義する.

定義 6.2. t を不定元とする. $P(t; z, \zeta, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu P_\nu(z, \zeta, \eta)$ が $\widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ に属するとは次の条件が成り立つことである:

(i) 適当な $d > 0$ および $\rho \in]0, 1[$ に対して $P(t; z, \zeta, \eta) \in \Gamma(\Omega_\rho[d_\rho] \times S; \mathcal{O}_{T^*X \times \mathbb{C}})[[t]]$ である.

(ii) 定数 $A > 0$ が存在して任意の $Z \in S$ および $h > 0$ に対し定数 $C_{h,Z} > 0$ を適当に選ぶと

$$(6.1) \quad \left| \sum_{\nu=0}^{m-1} P_\nu(z, \zeta, \eta) \right| \leq \frac{C_{h,Z} A^m m! e^{h\|\zeta\|}}{\|\eta\zeta\|^m} \quad (m \in \mathbb{N}, (z; \zeta, \eta) \in \Omega_\rho[d_\rho] \times Z)$$

となる.

これを用いて見かけのパラメータ付き古典的形式表象を定義する.

定義 6.3. $P(t; z, \zeta, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu P_\nu(z, \zeta, \eta) \in \widehat{\mathfrak{G}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ であるとは次の条件が成り立つことである:

(i) 適当な $d > 0$ および $\rho \in]0, 1[$ に対して $P(t; z, \zeta, \eta) \in \Gamma(\Omega_\rho[d_\rho] \times S; \mathcal{O}_{T^*X \times \mathbb{C}})[[t]]$ である.

(ii) 定数 $A > 0$ が存在して任意の $Z \in S$ および $h > 0$ に対し定数 $C_{h,Z} > 0$ を適当に選ぶと

$$(6.2) \quad \left| P_\nu(z, \zeta, \eta) \right| \leq \frac{C_{h,Z} A^\nu \nu! e^{h\|\zeta\|}}{\|\eta\zeta\|^\nu} \quad (\nu \in \mathbb{N}_0, (z; \zeta, \eta) \in \Omega_\rho[d_\rho] \times Z)$$

となる.

(iii) $\partial_\eta P(t; z, \zeta, \eta)$ は $\widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ に属する.

以上の定義の元に $\widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S) \subset \widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ であることは容易に示される. また, $P(t; z, \zeta, \eta) \in \widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ のとき $\eta_0 \in S$ に対して $P(t; z, \zeta, \eta_0) \in \widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}}(\Omega)$ であり, $P(t; z, \zeta, \eta) - P(t; z, \zeta, \eta_0) \in \widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ となることが分かる.

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}}(\Omega) &= \{P(t; z, \zeta, \eta) \in \widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}}(\Omega; S); \partial_\eta P(t; z, \zeta, \eta) = 0\} \subset \widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}}(\Omega; S), \\ \widehat{\mathcal{N}}_{\text{cl}}(\Omega) &= \widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}}(\Omega) \cap \widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S) \subset \widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S) \end{aligned}$$

と見なせるので単射

$$(6.3) \quad \widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}}(\Omega) / \widehat{\mathcal{N}}_{\text{cl}}(\Omega) \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}}(\Omega; S) / \widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$$

が得られる.

命題 6.4. 上で得られた単射は同型となる.

実際, $P(t; z, \zeta, \eta) \in \widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ に対して $\eta_0 \in S$ を固定すれば $P(t; z, \zeta, \eta_0) \in \widehat{\mathcal{S}}_{\text{cl}}(\Omega)$ であり, $[P(t; z, \zeta, \eta)] = [P(t; z, \zeta, \eta_0)] \in \widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}}(\Omega; S) / \widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ となる. また, $\mathfrak{S}(\Omega; S) = \widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}}(\Omega; S)|_{t=0}$ と見なすことができ, $\widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S) \cap \mathfrak{S}(\Omega; S) = \mathfrak{N}(\Omega; S)$ が成り立つ. さらに次が成り立つ:

定理 6.5. $\Omega \in T^*X$ を $z_0^* = (z_0; \zeta_0) \in \dot{T}^*X$ の十分小さな錐状近傍とする. このとき, 任意の $P(t; z, \zeta, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu P_\nu(z, \zeta, \eta) \in \widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ に対して $P(z, \zeta) \in \mathcal{S}(\Omega)$ が存在して

$$P(t; z, \zeta, \eta) - P(z, \zeta) \in \widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$$

となる.

系 6.6. $\Omega \in T^*X$ を $z_0^* = (z_0; \zeta_0) \in \dot{T}^*X$ の十分小さな錐状近傍とするとき, 同型 $\mathfrak{S}(\Omega; S) / \mathfrak{N}(\Omega; S) \rightarrow \widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}}(\Omega; S) / \widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ が得られる.

従って、正規積の記号を拡張して使用することができる。すなわち、

定義 6.7. $P(t; z, \zeta, \eta) \in \widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ に対して

$$:P(t; z, \zeta, \eta): = P(t; z, \zeta, \eta) \bmod \widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S) \in \widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}}(\Omega; S) / \widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$$

と書く。

見かけのパラメータ付き古典的形式表象の空間に積 $\circ$ を導入する。これは通常の（古典的）形式表象の場合と類似である。

定義 6.8. $P(t; z, \zeta, \eta), Q(t; z, \zeta, \eta) \in \widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ に対して

$$\begin{aligned} Q \circ P(t; z, \zeta, \eta) &= e^{t\langle \partial_{\zeta'}, \partial_{z'} \rangle} Q(t; z, \zeta', \eta) P(t; z', \zeta, \eta) \Big|_{z'=z, \zeta'=\zeta} \\ &= e^{t\langle \partial_{\zeta'}, \partial_{z'} \rangle} Q(t; z, \zeta + \zeta', \eta) P(t; z + z', \zeta, \eta) \Big|_{z'=z, \zeta'=0} \end{aligned}$$

と定める。

定理 6.9. 上の記法の元に

(1) $Q \circ P(t; z, \zeta, \eta) \in \widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ となる。更に $P(t; z, \zeta, \eta)$ または $Q(t; z, \zeta, \eta)$ が $\widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ の元であれば $Q \circ P(t; z, \zeta, \eta) \in \widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ となる。

(2) $R \circ (Q \circ P) = (R \circ Q) \circ P$ が成り立つ。

この積から導かれる $\widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}}(\Omega; S) / \widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}}(\Omega; S)$ の積が擬微分作用素の積と対応する。これは次の定理から分かる。

定理 6.10. $[K_1(z, w, \eta)], [K_2(z, w, \eta)] \in \mathcal{E}_{X, z_0}^{\mathbb{R}}$ とする。このとき、次が成り立つ：

- (1) $\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\zeta}^{\alpha} \sigma(K_1)(z, \zeta, \eta) \partial_z^{\alpha} \sigma(K_2)(z, \zeta, \eta) \in \mathfrak{S}_{z_0}.$
- (2) $\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\zeta}^{\alpha} \sigma(K_1)(z, \zeta, \eta) \partial_z^{\alpha} \sigma(K_2)(z, \zeta, \eta) - \sigma(K_1) \circ \sigma(K_2)(z, \zeta, \eta) \in \widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}, z_0}.$
- (3) $\sigma(\mu(K_1 \otimes K_2))(z, \zeta, \eta) - \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\zeta}^{\alpha} \sigma(K_1)(z, \zeta, \eta) \partial_z^{\alpha} \sigma(K_2)(z, \zeta, \eta) \in \mathfrak{N}_{z_0}.$

この定理によりコホモロジーから定められた擬微分作用素の積と見かけのパラメータ付き古典的形式表象の結合が対応していることが保証される。併せて形式表象、座標変換等の演算との整合性も確かめることが可能となる。

§ 7. 見かけのパラメータ付き形式表象

無限階擬微分作用素を効率的に取り扱うためには古典的形式表象だけでは不十分であり、(一般化された) 形式表象の概念が必要となる。[1] で導入された形式表象に見かけの

パラメータを導入する。まず、形式表象の定義を復習する。記法は前節までのものを踏襲する。

定義 7.1. t を不定元とする。

(1) $P(t; z, \zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^{\nu} P_{\nu}(z, \zeta)$ が $\widehat{\mathcal{S}}(\Omega)$ に属するとは、適当な $d > 0$ および $\rho \in]0, 1[$ に対して $P_{\nu}(z, \zeta) \in \Gamma(\Omega_{\rho}[(\nu+1)d_{\rho}]; \mathcal{O}_{T^*X})$ であり、ある $A \in]0, 1[$ が存在して、任意の $h > 0$ に対し $C_h > 0$ を適当に選べば

$$|P_{\nu}(z, \zeta)| \leq C_h A^{\nu} e^{h\|\zeta\|} \quad (\nu \in \mathbb{N}_0, (z, \zeta) \in \Omega_{\rho}[(\nu+1)d_{\rho}])$$

を満たすことである。

(2) $P(t; z, \zeta) \in \widehat{\mathcal{S}}(\Omega)$ とする。 $P(t; z, \zeta)$ が $\widehat{\mathcal{N}}(\Omega)$ に属するとは、定数 $A \in]0, 1[$ が存在して任意の $h > 0$ に対して $C_h > 0$ を適当に選べば

$$\left| \sum_{\nu=0}^{m-1} P_{\nu}(z, \zeta) \right| \leq C_h A^m e^{h\|\zeta\|} \quad (m \in \mathbb{N}_0, (z, \zeta) \in \Omega_{\rho}[md_{\rho}])$$

を満たすことである。

(3) $z_0^* \in \dot{T}^*X$ に対して

$$\widehat{\mathcal{S}}_{z_0^*} = \varinjlim_{\Omega} \widehat{\mathcal{S}}(\Omega) \supset \widehat{\mathcal{N}}_{z_0^*} = \varinjlim_{\Omega} \widehat{\mathcal{N}}(\Omega)$$

とおく。

$\widehat{\mathcal{S}}(\Omega)$ の元を Ω で定義された形式表象、また、 $\widehat{\mathcal{N}}(\Omega)$ の元を Ω で定義された零形式表象という。

$Z \Subset S$ および $m \in \mathbb{N}$ に対し

$$(\Omega_{\rho} * Z)[md_{\rho}] = \{(z, \zeta, \eta) \in \Omega_{\rho} \times Z; \|\eta\zeta\| \geq md_{\rho}\} \subset \Omega_{\rho}[md_{\rho}] \times Z$$

とおく。今までの議論と同様に見かけのパラメータ付き零形式表象を先に定義する。

定義 7.2. t を不定元とする。形式和 $P(t; z, \zeta, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^{\nu} P_{\nu}(z, \zeta, \eta)$ が $\widehat{\mathfrak{N}}(\Omega; S)$ に属するとは

- (i) $d > 0, \rho \in]0, 1[$ が存在して $P_{\nu}(z, \zeta, \eta) \in \Gamma((\Omega_{\rho} * S)[(\nu+1)d_{\rho}]; \mathcal{O}_{T^*X \times C})$,
- (ii) 定数 $A \in]0, 1[$ が存在して任意の $Z \Subset S$ および $h > 0$ に対し $C_{h,Z} > 0$ を適当に選べば

$$\left| \sum_{\nu=0}^{m-1} P_{\nu}(z, \zeta, \eta) \right| \leq C_{h,Z} A^m e^{h\|\zeta\|} \quad (m \in \mathbb{N}, (z; \zeta, \eta) \in (\Omega_{\rho} * Z)[md_{\rho}])$$

となる。

定義 7.3. 形式和 $P(t; z, \zeta, \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^{\nu} P_{\nu}(z, \zeta, \eta)$ が $\widehat{\mathfrak{S}}(\Omega; S)$ に属するとは

- (i) 適当な $d > 0$, $\rho \in]0, 1[$ に対し $P_{\nu}(z, \zeta, \eta) \in \Gamma((\Omega_{\rho} * S)[(\nu + 1)d_{\rho}]; \mathcal{O}_{T^*X \times \mathbb{C}})$.
- (ii) 定数 $A \in]0, 1[$ が存在して任意の $Z \in S$ および $h > 0$ に対し $C_{h,Z} > 0$ を適当に選べば

$$|P_{\nu}(z, \zeta, \eta)| \leq C_{h,Z} A^{\nu} e^{h\|\zeta\|} \quad (\nu \in \mathbb{N}_0, (z; \zeta, \eta) \in (\Omega_{\rho} * Z)[(\nu + 1)d_{\rho}])$$

が成り立つ.

- (iii) $\partial_{\eta} P(t; z, \zeta, \eta) \in \widehat{\mathfrak{N}}(\Omega; S)$.

$\widehat{\mathfrak{S}}(\Omega; S)$ の元を Ω で定義された見かけのパラメータを S にもつ形式表象, また, $\widehat{\mathfrak{N}}(\Omega; S)$ の元を Ω で定義された見かけのパラメータを S にもつ零形式表象という. 見かけのパラメータをもつ形式表象に対しても定義 6.8 により積 $\circ$ を導入できる.

命題 7.4. 同型

$$\widehat{\mathcal{P}}(\Omega)/\widehat{\mathcal{N}}(\Omega) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathfrak{S}}(\Omega; S)/\widehat{\mathfrak{N}}(\Omega; S)$$

が存在する.

帰納極限を取り, 前節までに述べた結果と併せると次を得る. ただし, $\widehat{\mathfrak{S}}_{z_0^*}$ 等の定義は $\mathfrak{S}_{z_0^*}$ 等と同様である.

定理 7.5. $z_0^* \in \dot{T}^*X$ とするとき, 次の同型を得る:

$$\mathcal{E}_{X, z_0^*}^{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\kappa} E_X^{\mathbb{R}}(\kappa) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_{z_0^*}/\mathfrak{N}_{z_0^*} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathfrak{S}}_{\text{cl}, z_0^*}/\widehat{\mathfrak{N}}_{\text{cl}, z_0^*} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathfrak{S}}_{z_0^*}/\widehat{\mathfrak{N}}_{z_0^*}.$$

ここで 3 番目の空間以外は環の構造を持ち, それらに対して上の同型は環としての同型を与える.

[1], [3] 等で展開された指数関数表象の議論は, すべて見かけのパラメータをもつ表象についても同様に展開できる.

参考文献

- [1] Aoki, T., Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini, I, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **33** (1983), 227–250.
- [2] Aoki, T., Symbols and formal symbols of pseudodifferential operators, *Adv. Stud. Pure Math.*, **4** (1984), 181–208.
- [3] Aoki, T., Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini, II, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **36** (1986), 143–165.

- [4] 青木貴史, 片岡清臣, 山崎 晋, 超関数・FBI変換・無限階擬微分作用素, 共立出版 2004.
- [5] Boutet de Monvel, L., Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **22** (1972), 229–268.
- [6] Boutet de Monvel, L. and Kreé, P., Pseudo-differential operators and Gevrey classes, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **17** (1967), 295–323.
- [7] Hörmander, L., Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, *Comm. Pure Appl. Math.*, **24** (1971), 671–704.
- [8] Kamimoto, S. and Kataoka, K., On the composition of kernel functions of pseudo-differential operators $\mathcal{E}^R$ and the compatibility with Leibniz rule, To appear in RIMS Kôkûroku Bessatsu.
- [9] 神本晋吾, 片岡清臣, 無限階擬微分作用素の形式核関数, 本講究録に収録
- [10] Kashiwara, M. and Kawai, T., Micro-hyperbolic pseudo-differential operators, I, *J. Math. Soc. Japan*, **27** (1975), 359–404.
- [11] Kashiwara, M. and Kawai, T., On holonomic system of micro-differential equations. III, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **17** (1981), 813–979.
- [12] Kashiwara, M. and Schapira, P., Problème de Cauchy pour les systèmes micro-différentiels dans le domaine complexe. *Invent. Math.*, **46** (1978), 17–38.
- [13] 片岡清臣, 超関数のラドン変換とその応用について, 東京大学修士論文, 1976.
- [14] Laurent, Y., Microlocal operators with plurisubharmonic growth, *Compos. Math.*, **86** (1993), 23–67.
- [15] Sato, M., Kawai, T., and Kashiwara, M., Microfunctions and pseudo-differential equations, pp. 265–529. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 287, Springer, Berlin, 1973.