

ステファン問題の有限要素近似解

京大 数理研 森 正武

§1 序

境界の移動を伴う熱方程式系によって記述される Stefan 問題は、いわゆる自由境界問題の典型例として古くから多くの人々の関心をひいており、その数値解法に関して多くの論文が発表されている。(例えば [3, 1, 2, 6])。Mori は、境界の時間変動と共に変化する基底関数を考え、これに基づく有限要素法による解法を提案した [4]。そして Dirichlet 境界条件の下での 1 次元 1 相問題に対する解法の安定性の条件を与え、その収束を論じた [5]。この方法は、moving boundary problem および free boundary problem に広く適用することができるが、ここでは 2 相 Stefan 問題および 2 次元の Stefan 問題への適用法と数値例を示す。

§2 2 相 Stefan 問題

話をわかりやすくするために、領域 $0 \leq x \leq 1$ に水と氷が存在し、両者が時刻 t において $x = s(t)$ で境を接している内

題を考えよう。すなわち、領域 $D_0 = \{0 < x < s(t)\}$ には水が存在し、領域 $D_1 = \{s(t) < x < l\}$ には氷が存在して、水の温度 u_0 と氷の温度 u_1 はそれぞれの領域で次の熱方程式を満足しているものとする。

$$\begin{cases} (2.1) & \frac{\partial u_0}{\partial t} = \sigma_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} & \text{in } D_0, \\ (2.2) & \frac{\partial u_1}{\partial t} = \sigma_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & \text{in } D_1, \end{cases}$$

境界条件は、境界 $x = s(t)$ において等温

$$(2.3) \quad u_0(t, s(t)) = u_1(t, s(t)) = 0$$

であり、それぞれの領域の他端では Dirichlet 条件

$$\begin{cases} (2.4) & u_0(t, 0) = g_0(t) \\ (2.5) & u_1(t, l) = g_1(t) \end{cases}$$

を満たしているものとしよう。境界 $s(t)$ は熱の流れを平衡させる方向へ次の関係に従って移動する。

$$(2.6) \quad \frac{ds}{dt} = -\kappa_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}(t, s(t)) + \kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(t, s(t))$$

これがいわゆる Stefan 条件である。 κ_0, κ_1 はそれぞれ水および氷の熱伝導係数である。また初期条件は次のように与

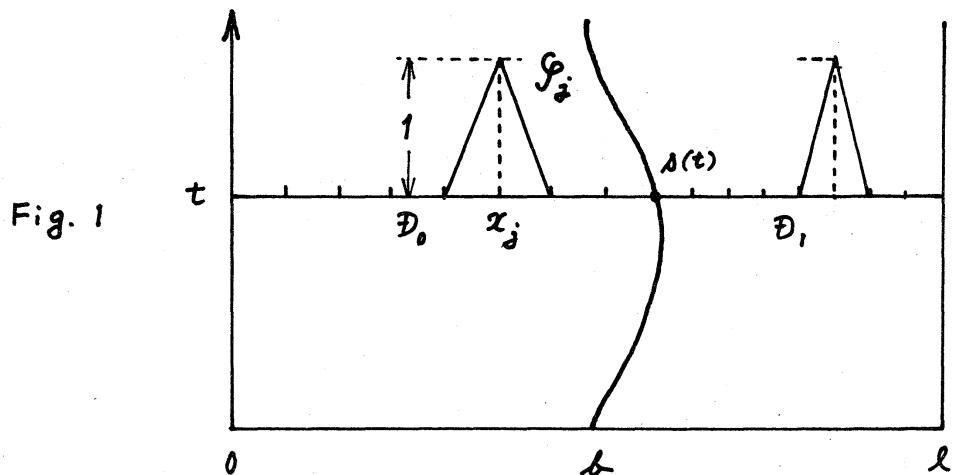
えられているものとする.

$$\left\{ \begin{array}{ll} (2.7) & \Delta(0) = b \\ (2.8) & u_0(0, x) = f_0(x) \\ (2.9) & u_1(0, x) = f_1(x) \end{array} \right.$$

上記の Stefan 問題に有限要素法を適用しよう. まず時刻 t を固定し, 仮りに $\Delta(t)$ は既知の情報を通して計算によって既に得られているものとする. そこで Fig. 1 のように領域 D_0 を n_0 個, D_1 を n_1 個の小区間に分割し, $n_0 + n_1 + 1$ 個の格子点

$$(2.10) \quad 0 = x_0, x_1, \dots, x_{n_0} = \Delta(t), x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+n_1}$$

を作る. そして各格子点 x_j を中心として次のような piece-wise linear な基底関数を構成する.



$$(2.11) \quad g_j(t, x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & ; x_{j-1} \leq x < x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & ; x_j \leq x < x_{j+1} \end{cases}$$

数値計算を実行するとき， $\Delta(t)$ は区間の分割に依存して近似的に決められるので，以下これを $\Delta_n(t)$ と書くことにする。

次に，温度 u_0, u_1 を，これら基底関数の 1 次結合 $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ によって近似する。

$$\begin{cases} (2.12) & \tilde{u}_0(t, x) = \sum_{j=0}^{n_0-1} a_j(t) g_j(t, x) & ; 0 < x < \Delta_n(t) \\ (2.13) & \tilde{u}_1(t, x) = \sum_{j=n_0+1}^{n_0+n_1} a_j(t) g_j(t, x) & ; \Delta_n(t) < x < l \end{cases}$$

ただし

$$(2.14) \quad a_0(t) = g_0(t), \quad a_{n_0+n_1}(t) = g_1(t)$$

で， $g_0, g_{n_0+n_1}$ はそれぞれ (2.11) の右辺オ 2 およびオ 1 の式で表わされる関数である。境界条件 (2.3) のために， $g_{n_0}(t, x)$ の項は現われず，これは数値計算上も都合が良い。

以上の準備の下に，近似解を求めるために Galerkin 法を適用する。すなわち，(2.12) と (2.13) をそれぞれ (2.1)，(2.2) に代入し，両辺に $g_k(t, x)$ を乗じて x に関して D_0, D_1 で積分する。積分はそれぞれ全領域 $0 < x < l$ で行っても結果は同じである。こうして $(n_0-1) \times n_0$ 行列および $(n_1-1) \times n_1$ 行列を係数にもつ次の連立常微分方程式を得る。

$$\begin{cases} (2.15) & M_0 \frac{d\alpha_0}{dt} = -(\sigma_0 K_0 + N_0) \alpha_0 \\ (2.16) & M_1 \frac{d\alpha_1}{dt} = -(\sigma_1 K_1 + N_1) \alpha_1 \end{cases}$$

ただし

$$(2.17) \quad \alpha_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n_0-1} \end{bmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{n_0+1} \\ a_{n_0+2} \\ \vdots \\ a_{n_0+n_1} \end{bmatrix}$$

$$(2.18) \quad M_{ij} = \int_0^l g_i g_j dx \quad ; \quad \text{mass matrix}$$

$$(2.19) \quad K_{ij} = \int_0^l \frac{\partial g_i}{\partial x} \frac{\partial g_j}{\partial x} dx \quad ; \quad \text{stiffness matrix}$$

$$(2.20) \quad N_{ij} = \int_0^l g_i \frac{\partial g_j}{\partial t} dx \quad ; \quad \text{velocity matrix}$$

(添字1, 2は省略した)

行列 N の要素は，格子点の見かけ上の移動の速度に相当するので，これに velocity matrix という名を付した。

以下 D_0, D_1 の分割をそれぞれ等間隔にとるとすると，各行列の具体形は，lumped mass system の場合次のようになる。

$$(2.21) \quad M_0 = \frac{\Delta_n(t)}{n_0} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \frac{l - \Delta_n(t)}{n_1} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.22) \quad K_0 = \frac{n_0}{\Delta_n(t)} \times \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \frac{n_1}{l - \Delta_n(t)} \times \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2.23) \quad N_0 = \frac{1}{6n_0} \times \frac{d\lambda_n}{dt} \times \begin{bmatrix} 2 & & & 0 \\ & \alpha_{i-1}^{(0)} & 2 & \alpha_{i+1}^{(0)} \\ & 0 & & 2 \\ & & & & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ i \\ n_0-1 \\ n_0+1 \end{matrix}, \quad \begin{cases} \alpha_{i-1}^{(0)} = 3i-1 \\ \alpha_{i+1}^{(0)} = -3i-1 \end{cases}$$

$$(2.24) \quad N_1 = \frac{1}{6n_1} \times \frac{d\lambda_n}{dt} \times \begin{bmatrix} 2 & & & 0 \\ & \alpha_{i-1}^{(1)} & 2 & \alpha_{i+1}^{(1)} \\ & 0 & & 2 \\ & & & & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ i \\ n_0+1 \\ n_0+n_1-1 \end{matrix}, \quad \begin{cases} \alpha_{i-1}^{(1)} = 3(n_0+n_1-i)-1 \\ \alpha_{i+1}^{(1)} = -3(n_0+n_1-i)-1 \end{cases}$$

consistent mass system の場合は, mass matrix のみを次のように変更すればよい.

$$(2.25) \quad M_0 = \frac{\lambda_n(t)}{6n_0} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \frac{\lambda_n(t)}{6n_1} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

次に (2.15), (2.16) の時間微分を時間差分で近似する. 時間 t を等しい間隔 Δt で刻む.

$$(2.26) \quad \frac{d\alpha_0}{dt} \doteq \frac{\alpha_0(k\Delta t) - \alpha_0((k-1)\Delta t)}{\Delta t}, \quad \frac{d\alpha_1}{dt} \doteq \frac{\alpha_1(k\Delta t) - \alpha_1((k-1)\Delta t)}{\Delta t}$$

さて, 実際には $\lambda_n(t)$ は温度 $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ と共に決められるものであるが, この三者を連立させて解くことはかなり手間がかかるので, ここでは正確な $\lambda_n(t)$ の代りに Δt だけ前の時刻の温度 $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ から計算した値を採用することにする. すなわち, $\lambda_n(t)$ の増分 $\Delta\lambda_n$ は, (2.6) の右辺をそれまでに得られている最新の近似解 $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ の境界における勾配で近似することによって計算する. また, velocity matrix N の要素は

$$(2.27) \quad \frac{d\Delta_n}{dt} \doteq \frac{\Delta\Delta_n}{\Delta t}$$

によって, 計算された増分 $\Delta\Delta_n$ を使って計算する.

全体のスキームをまとめると次のようになる. ニニで

$$(2.28) \quad f(x) = \begin{cases} f_0(x) & ; \quad 0 < x < \lambda(t) \\ f_1(x) & ; \quad \lambda(t) < x < l \end{cases}$$

とおく. また θ は $0 \leq \theta \leq 1$ なる適当な値に選んでおく.

初期ステップ

$$(2.29) \quad \begin{cases} a_j(0) = f(x_j) & ; \quad j = 0, 1, \dots, m_0 + n_1 \\ \Delta\Delta_n(\Delta t) = -k_0 \frac{n_0 \Delta t}{\lambda} a_{n_0-1}(0) + k_1 \frac{n_1 \Delta t}{l - \lambda} a_{n_0+1}(0) \\ \lambda_n(\Delta t) = \lambda + \Delta\Delta_n(\Delta t) \end{cases}$$

一般のステップ $k=1, 2, \dots$ について以下の操作を繰返す.

(I) $\lambda_n(k\Delta t), \Delta\Delta_n(k\Delta t)$ の値を使って $M_0(k\Delta t), M_1(k\Delta t), K_0(k\Delta t), K_1(k\Delta t), N_0(k\Delta t), N_1(k\Delta t)$ を計算し次の 1 次連立方程式を解く.

$$\begin{cases} (2.30) & \{M_0 + \theta \Delta t (\sigma_0 K_0 + N_0)\} \alpha_0(k\Delta t) = \{M_0 - (1-\theta) \Delta t (\sigma_0 K_0 + N_0)\} \alpha_0((k-1)\Delta t) \\ (2.31) & \{M_1 + \theta \Delta t (\sigma_1 K_1 + N_1)\} \alpha_1(k\Delta t) = \{M_1 - (1-\theta) \Delta t (\sigma_1 K_1 + N_1)\} \alpha_1((k-1)\Delta t) \end{cases}$$

ただし, α_0 の σ_0 成分および α_1 の最後の成分にはそれぞれ既知の境界値 g_0 および g_1 の値が入る.

(II) 次の式により $\Delta A_n((k+1)\Delta t)$, $A_n((k+1)\Delta t)$ を計算する.

$$(2.32) \quad \Delta A_n((k+1)\Delta t) = -\frac{k_0 n_0 \Delta t}{2} \left\{ \frac{a_{n_0-1}((k-1)\Delta t)}{A_n((k-1)\Delta t)} + \frac{a_{n_0-1}(k\Delta t)}{A_n(k\Delta t)} \right\} \\ + \frac{k_1 n_1 \Delta t}{2} \left\{ \frac{a_{n_0+1}((k-1)\Delta t)}{l - A_n((k-1)\Delta t)} + \frac{a_{n_0+1}(k\Delta t)}{l - A_n(k\Delta t)} \right\}$$

$$(2.33) \quad A_n((k+1)\Delta t) = A_n(k\Delta t) + \Delta A_n((k+1)\Delta t)$$

ΔA_n の計算 (2.32) において, 時刻 $t = (k-1)\Delta t$ および $t = k\Delta t$ における勾配の平均値を用いた理由は, 理論上の取扱いを容易にするためである [5].

具体的な数値例として, 次のような問題を $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq t \leq 2.6$ において解いた. これは, ほぼ水と氷の系に相当する.

$$(2.34) \quad \begin{cases} \sigma_0 = 1 \\ k_0 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \sigma_1 = 4 \\ k_1 = 2 \end{cases}$$

境界条件:

$$(2.35) \quad \begin{cases} g_0(t) = 1 \\ g_1(t) = \begin{cases} 0.7t - 1 & ; 0 \leq t \leq 1 \\ -0.3 & ; 1 < t \leq 2.6 \end{cases} \end{cases}$$

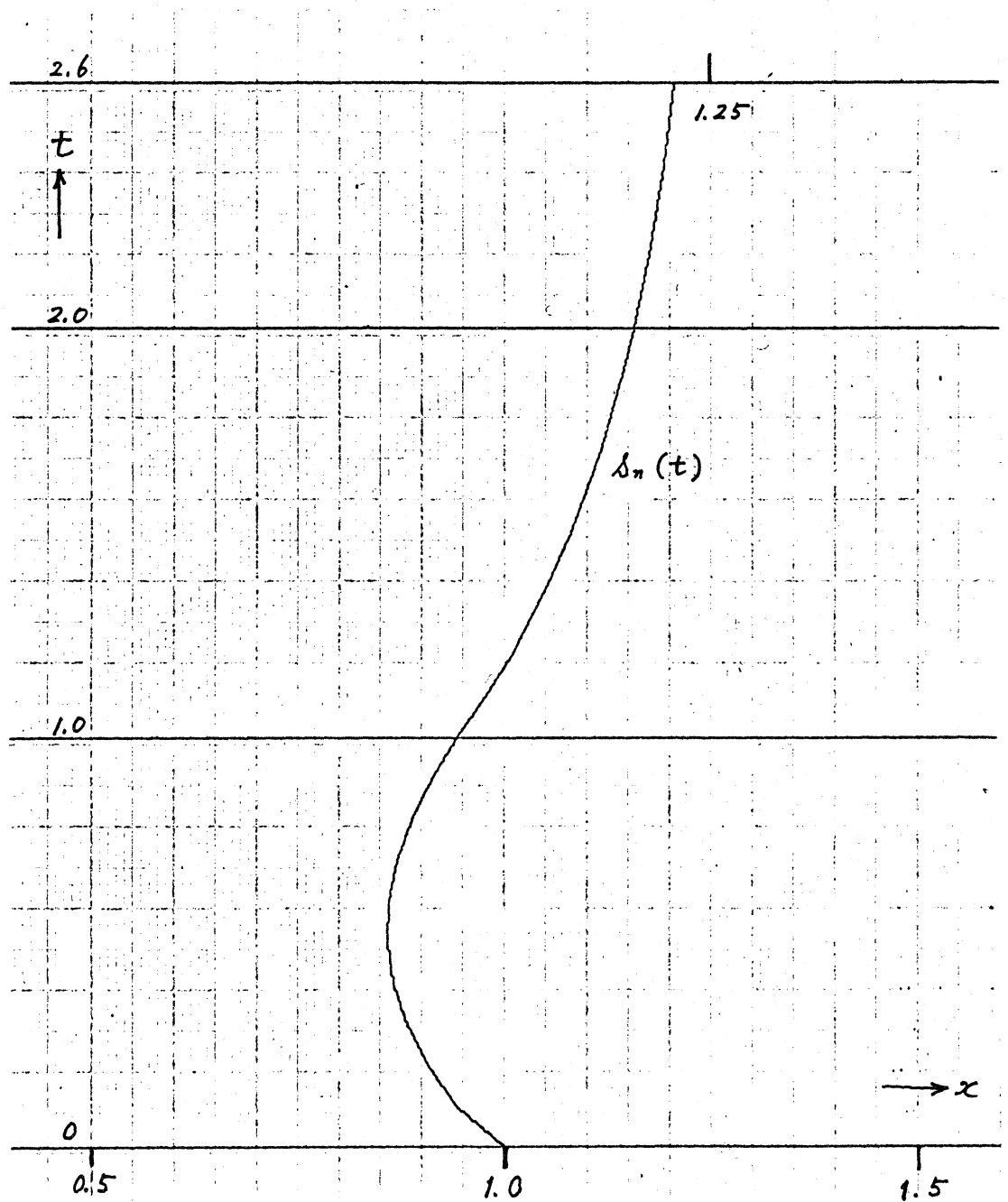
初期条件:

$$(2.36) \quad A(0) = \phi = 1$$

$$(2.37) \quad f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

領域 D_0, D_1 はそれぞれ10等分し, 時間のきざみは $\Delta t = 0.001$ にとった. 計算で得た境界 $\Delta_n(t)$ の動きを Fig. 2 に示す.

Fig. 2



§3 2次元帯状領域における1相Stefan問題

ここでは上記の有限要素法を2次元のStefan問題に適用する。その場合注意しなければならない事は、格子点の位置が常に境界の位置によって一意的に定められるという事であり、領域の形状に対応して適当な分割を行わなければならない。ここでは最も単純な、帯状領域における問題を扱うことにする。

Fig. 3 のような、幅が L_y なる半無限帯状領域を考え、図のように半無限の方向に x 座標、有限の幅の方向に y 座標をと

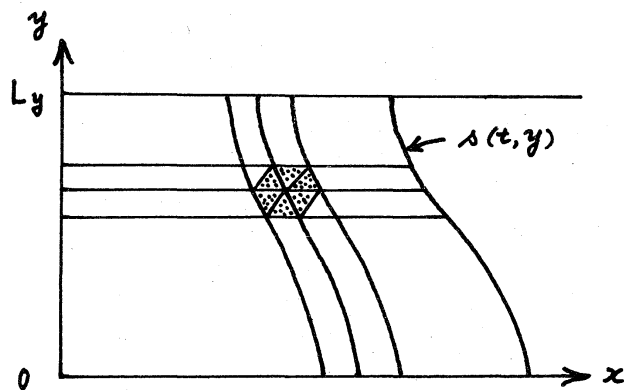


Fig. 3

る。時刻 t を固定するとき、境界は $s(t, y)$ で与えられるものとする。ただし $s(0, y) > 0$ とする。

そこで次の問題を考えよう。

$$(3.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$(3.2) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, L_y$$

$$(3.3) \quad u(t, 0, y) = g(t, y)$$

$$(3.4) \quad u(0, x, y) = f(x, y)$$

$$(3.5) \quad s(0, y) = s_0(y)$$

$$(3.6) \quad u(t, \lambda(t, y), y) = 0$$

$$(3.7) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} = -k \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{x=\lambda(t, y)}$$

最後の (3.7) が Stefan 条件である。境界条件 (3.2), (3.3) は他にもいろいろ考えられるが、いずれにしてもアルゴリズムには大差はない。以下前節と同様、近似解であることを明示するために、 $\lambda(t, y)$ には添字 n を付して $\lambda_n(t, y)$ と書く。

まず基底関数を作ろう。領域 D の幅を平行線によって分割し、 m_y 個の小さい帯状領域に分ける。得られた $m_y + 1$ 本の格子線に、 y 座標の小さい方から $0, 1, \dots, m_y$ なる番号を付け、 j 番目の格子線の y 座標を y_j とし、 $j-1$ 番目と j 番目の格子線ではさまれる小帯状領域の幅を h_j とする。次に、 j 番目の格子線 $0 \leq x \leq \lambda_n(t, y_j)$ を m_x 個の小区間に一定の規則に従って分割し、各格子点の x 座標を x_{ij} ($i=0, 1, \dots, m_x; j=0, 1, \dots, m_y$) とする (Fig. 4)。 x_{ij} は $\lambda_n(t, y_j)$ から一意的に計算できるものでなければならぬ。例えば、 $0 \leq x \leq \lambda_n(t, y_j)$ を m_x 等分すればこの条件にかなう。

Fig. 4 に示す点 x_{ij} を中心とする六角形領域 D_{ij} 上

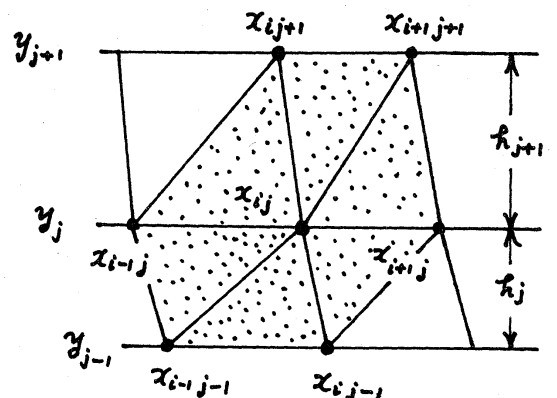


Fig. 4

に, piece-wise linear な基底関数 $\varphi_{ij}(t, x, y)$ を構成する.

この関数の値は, 点 (x_{ij}, y_j) では 1, 点 $(x_{i-1,j-1}, y_{j-1}), (x_{i,j-1}, y_{j-1}), (x_{i+1,j}, y_j), (x_{i+1,j+1}, y_{j+1}), (x_{i,j+1}, y_{j+1}), (x_{i-1,j}, y_j)$ では 0 である. あとはこの基底関数に基づいて前節と同様通常の有限要素法を適用すればよい.

mass matrix M , stiffness matrix K , velocity matrix N の定義は次の通りである.

$$(3.8) \quad M(i, j; k, l) = \iint_{D_{ij}} \varphi_{ij} \varphi_{kl} dx dy$$

$$(3.9) \quad K(i, j; k, l) = \iint_{D_{ij}} \left(\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial y} \right) dx dy$$

$$(3.10) \quad N(i, j; k, l) = \iint_{D_{ij}} \varphi_{ij} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial t} dx dy$$

半無限帯状領域の問題を解くとき一般的に役立つと思われるので, 各行列の非零要素を附録に掲げておく.

Stefan 条件 (3.7) は補間によって次のように近似する. 点 $(x_{n-1,j}, y_j)$ における近似解の値を $a_{n-1,j}$ と書く.

$$(3.11) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=A} \doteq \frac{-1}{\Delta_n(t, y_j) - x_{n-1,j}} a_{n-1,j}$$

$$(3.12) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{x=A} \doteq \frac{1}{2} \left[-\frac{\Delta_n(t, y_j) - \Delta_n(t, y_{j+1})}{h_{j+1} \{ \Delta_n(t, y_{j+1}) - x_{n-1,j+1} \}} a_{n-1,j+1} + \frac{\Delta_n(t, y_j) - \Delta_n(t, y_{j-1})}{h_j \{ \Delta_n(t, y_{j-1}) - x_{n-1,j-1} \}} a_{n-1,j-1} \right]$$

$$(3.13) \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y} \doteq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x_{j+1}} \times \{ \Delta_n(t, y_{j+1}) - \Delta_n(t, y_j) \} + \frac{1}{x_j} \times \{ \Delta_n(t, y_j) - \Delta_n(t, y_{j-1}) \} \right]$$

時刻 t におけるこれらの値から (3.7) の右辺を計算し、時刻 $t+\Delta t$ における Δ_n の増分 $\Delta \Delta_n$ を求める。

全体を通しての計算法は、各時刻ごとに、それまでに得られている最新の解 u の勾配から計算した $\Delta_n, \Delta \Delta_n$ を用いて行列要素を計算しなおすことを除いては、通常の有限要素法と全く同様である。

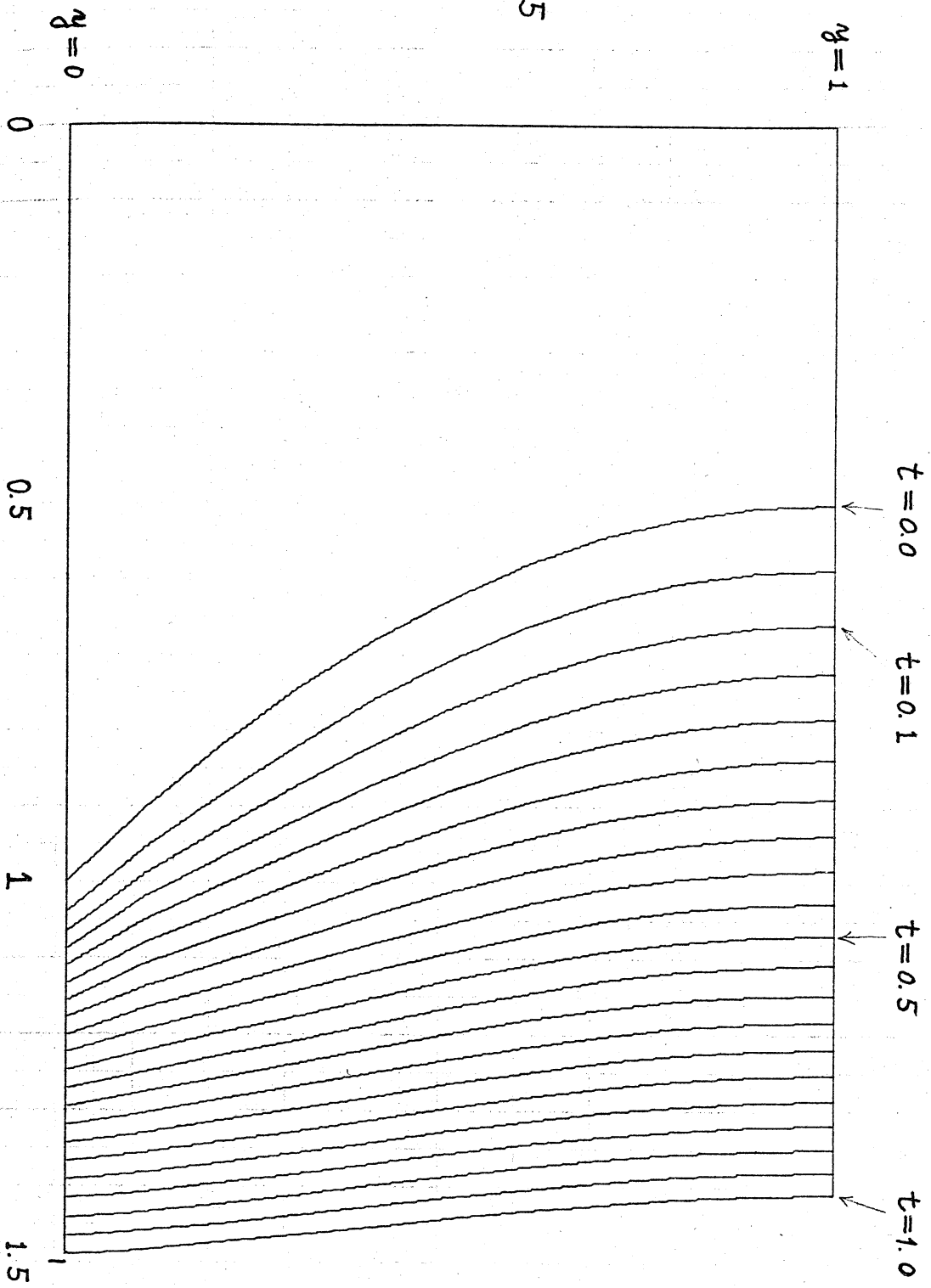
数値例として、(3.1) ~ (3.7) に対応して次のような簡単な問題を $0 \leq y \leq 1$ ($L_y=1$), $0 \leq t \leq 1$ に対して解いた。

$$(3.14) \quad \begin{cases} u(t, 0, y) = g(t, y) = 1 \\ \Delta(0, y) = \Delta_0(y) = \frac{1}{2}(y-1)^2 - \frac{1}{2} \\ u(0, x, y) = f(x, y) = 1 - \frac{1}{\Delta(0, y)} x \end{cases}$$

計算は $n_x = n_y = 10$, $\Delta t = 0.001$ にとり、mass matrix system で行った。また (2.30) の $\theta = 1$ の場合に対応する implicit method を採用した。この計算で得た境界 $\Delta(t, y)$ の動きを Fig. 5 に示す。

111

Fig. 5



References

- [1] J.Douglas, Jr. and T.M.Gallie, On the numerical integration of a parabolic differential equation subject to a moving boundary condition, Duke Math.J. 22(1955) 557-571.
- [2] H.Kawarada and M.Natori, On numerical solution of Stefan problem I, Memoir of Numerical Mathematics No.1(1974) 43-54.
- [3] H.G.Landau, Heat conduction in a melting solid, Quart. Appl. Math. 8(1950) 81-94.
- [4] M.Mori, Numerical solution of the Stefan problem by the finite element method, Memoir of Numerical Mathematics No.2 (1975) 35-44.
- [5] M.Mori, On the stability and the convergence of the finite element method for solving the Stefan problem, to appear.
- [6] T.Nogi, A difference scheme for solving the Stefan problem, Publ. of RIMS, Kyoto Univ. 9(1974) 543-575.

附 録 (以下に記す要素以外はすべて0である)

mass matrix

[lumped mass system]

$$M(i, j; i, j) = M_1 + M_2$$

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{8} h_j \times \{ (x_{i+1,j} - x_{i,j}) + (x_{i,j-1} - x_{i,j-1}) \} & \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ M_2 = \frac{1}{8} h_{j+1} \times \{ (x_{i,j} - x_{i,j}) + (x_{i,j+1} - x_{i,j+1}) \} & \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

[consistent mass system]

$$M(i, j; i-1, j-1) = \frac{1}{24} h_j \times \{ (x_{i,j-1} - x_{i,j-1}) + (x_{i,j} - x_{i,j}) \} \quad \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0$$

$$M(i, j; i-1, j) = M_1 + M_2$$

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{24} h_j \times (x_{i,j} - x_{i,j}) & \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ M_2 = \frac{1}{24} h_{j+1} \times (x_{i,j} - x_{i,j}) & \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$M(i, j; i, j-1) = \frac{1}{24} k_j \times \{ (x_{ij-1} - x_{i-1, j-1}) + (x_{i+1, j} - x_{ij}) \} \quad \text{但 } j=0 \text{ のとき } 0$$

$$M(i, j; i, j) = M_1 + M_2$$

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{12} k_j \times \{ (x_{ij-1} - x_{i-1, j-1}) + (x_{ij} - x_{i-1, j}) + (x_{i+1, j} - x_{ij}) \} & \text{但 } j=0 \text{ のとき } 0 \\ M_2 = \frac{1}{12} k_{j+1} \times \{ (x_{ij} - x_{i-1, j}) + (x_{i+1, j} - x_{ij}) + (x_{i+1, j+1} - x_{ij+1}) \} & \text{但 } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$M(i, j; i, j+1) = \frac{1}{24} k_{j+1} \times \{ (x_{ij} - x_{i-1, j}) + (x_{i+1, j+1} - x_{ij+1}) \} \quad \text{但 } j=n_y \text{ のとき } 0$$

$$M(i, j; i+1, j) = M_1 + M_2$$

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{24} k_j \times (x_{i+1, j} - x_{ij}) & \text{但 } j=0 \text{ のとき } 0 \\ M_2 = \frac{1}{24} k_{j+1} \times (x_{i+1, j} - x_{ij}) & \text{但 } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$M(i, j; i+1, j+1) = \frac{1}{24} k_{j+1} \times \{ (x_{i+1, j} - x_{ij}) + (x_{i+1, j+1} - x_{ij+1}) \} \quad \text{但 } j=n_y \text{ のとき } 0$$

stiffness matrix

$$K(i, j; i-1, j-1) = \frac{1}{2 k_j} \times \{ (x_{ij} - x_{ij-1}) - (x_{i-1, j-1} - x_{i-1, j}) \} \quad \text{但 } j=0 \text{ のとき } 0$$

$$K(i, j; i-1, j) = K_1 + K_2$$

$$\begin{cases} K_1 = -\{ k_j + \frac{1}{k_j} \times (x_{i-1, j-1} - x_{i-1, j}) \times (x_{i-1, j-1} - x_{ij}) \} / \{ 2(x_{ij} - x_{i-1, j}) \} & \text{但 } j=0 \text{ のとき } 0 \\ K_2 = -\{ k_{j+1} + \frac{1}{k_{j+1}} \times (x_{ij+1} - x_{i-1, j}) \times (x_{ij+1} - x_{ij}) \} / \{ 2(x_{ij} - x_{i-1, j}) \} & \text{但 } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$K(i, j; i, j-1) = -\frac{1}{2 k_j} \times \{ (x_{ij} - x_{i-1, j-1}) - (x_{ij-1} - x_{i+1, j}) \} \quad \text{但 } j=0 \text{ のとき } 0$$

$$K(i, j; i, j) = K_1 + K_2$$

$$\begin{cases} K_1 = \frac{1}{2 k_j} \times (x_{ij-1} - x_{i-1, j-1}) + \{ k_j + \frac{1}{k_j} \times (x_{i-1, j-1} - x_{i-1, j})^2 \} / \{ 2(x_{ij} - x_{i-1, j}) \} \\ \quad + \{ k_j + \frac{1}{k_j} \times (x_{ij-1} - x_{i+1, j})^2 \} / \{ 2(x_{i+1, j} - x_{ij})^2 \} & \text{但 } j=0 \text{ のとき } 0 \\ K_2 = \frac{1}{2 k_{j+1}} \times (x_{i+1, j+1} - x_{ij+1}) + \{ k_{j+1} + \frac{1}{k_{j+1}} \times (x_{i+1, j+1} - x_{i-1, j})^2 \} / \{ 2(x_{ij} - x_{i-1, j}) \} \\ \quad + \{ k_{j+1} + \frac{1}{k_{j+1}} \times (x_{i+1, j+1} - x_{i+1, j})^2 \} / \{ 2(x_{i+1, j} - x_{ij})^2 \} & \text{但 } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$K(i, j; i, j+1) = -\frac{1}{2 k_{j+1}} \times \{ (x_{ij+1} - x_{i-1, j}) - (x_{ij} - x_{i+1, j+1}) \} \quad \text{但 } j=n_y \text{ のとき } 0$$

$$K(i, j; i+1, j) = K_1 + K_2$$

$$\begin{cases} K_1 = -\left\{ \hbar_j + \frac{1}{\hbar_j} \times (x_{i,j-1} - x_{i+1,j}) \times (x_{i,j-1} - x_{i,j}) \right\} / \{ 2(x_{i+1,j} - x_{i,j}) \} & \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ K_2 = -\left\{ \hbar_{j+1} + \frac{1}{\hbar_{j+1}} \times (x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j}) \times (x_{i+1,j+1} - x_{i,j}) \right\} / \{ 2(x_{i+1,j} - x_{i,j}) \} & \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$K(i, j; i+1, j+1) = -\frac{1}{2\hbar_{j+1}} \times \{ (x_{i,j} - x_{i+1,j+1}) - (x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j}) \} \quad \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0$$

velocity matrix

$$N(i, j; i-1, j-1) = \frac{1}{24} \hbar_j \times (\dot{x}_{i-1,j-1} + 2\dot{x}_{i,j} + \dot{x}_{i+1,j-1}) \quad \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0$$

$$N(i, j; i-1, j) = N_1 + N_2$$

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{24} \hbar_j \times (\dot{x}_{i-1,j-1} + 2\dot{x}_{i,j} + \dot{x}_{i+1,j}) & \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ N_2 = \frac{1}{24} \hbar_{j+1} \times (\dot{x}_{i,j+1} + 2\dot{x}_{i,j} + \dot{x}_{i+1,j}) & \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$N(i, j; i, j-1) = -\frac{1}{24} \hbar_j \times (\dot{x}_{i-1,j-1} + 2\dot{x}_{i,j} + \dot{x}_{i+1,j-1}) = -N(i, j; i-1, j-1) \quad \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0$$

$$N(i, j; i, j) = N_1 + N_2$$

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{24} \hbar_j \times (\dot{x}_{i+1,j} - \dot{x}_{i-1,j} + \dot{x}_{i,j-1} - \dot{x}_{i-1,j-1}) & \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ N_2 = \frac{1}{24} \hbar_{j+1} \times (\dot{x}_{i+1,j} - \dot{x}_{i-1,j} + \dot{x}_{i,j+1} - \dot{x}_{i+1,j+1}) & \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$N(i, j; i, j+1) = \frac{1}{24} \hbar_{j+1} \times (\dot{x}_{i+1,j+1} + 2\dot{x}_{i,j} + \dot{x}_{i+1,j+1}) \quad \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0$$

$$N(i, j; i+1, j) = N_1 + N_2$$

$$\begin{cases} N_1 = -\frac{1}{24} \hbar_j \times (\dot{x}_{i+1,j} + 2\dot{x}_{i,j} + \dot{x}_{i,j-1}) & \text{但し } j=0 \text{ のとき } 0 \\ N_2 = -\frac{1}{24} \hbar_{j+1} \times (\dot{x}_{i+1,j} + 2\dot{x}_{i,j} + \dot{x}_{i+1,j+1}) & \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0 \end{cases}$$

$$N(i, j; i+1, j+1) = -\frac{1}{24} \hbar_{j+1} \times (\dot{x}_{i+1,j+1} + 2\dot{x}_{i,j} + \dot{x}_{i+1,j+1}) = -N(i, j; i, j+1) \quad \text{但し } j=n_y \text{ のとき } 0$$

$$\text{但し } \dot{x}_{ij} = \frac{\partial x_{ij}}{\partial t} \quad \text{である.}$$