

指数関数の有理点での値の有理近似について

慶応・理工 塩川宇賢 (Iekata ShioKawa)

1. はじめに表題に関して知られている主な結果を紹介しよう。

定理 1. (Davis [5]) 任意の正数 ε に対し不等式

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \frac{1}{q^2} \frac{\log \log q}{\log q}$$

は無有限個の整数解 $q(>0)$, p をもつ。さらに定数 $q_0 = q_0(\varepsilon)$ が存在して, 不等式

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \frac{1}{q^2} \frac{\log \log q}{\log q}$$

がすべての整数 $q(\geq q_0)$, p に対し成り立つ。

定理 2. (Bundschuh [3], c.f. Mahler [9], Durand [6])

整数 $a(>0)$, b に対し正の定数 $c = c(a, b)$ が存在して,

不等式

$$\left| e^{a/b} - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^2 + 4 \log a / \log \log q} \frac{\log \log q}{\log q}$$

がすべての整数 $q(\geq 3)$, p に対し成り立つ。

定理 3. (Durand [7]) 相異なる 0 でない n 個の有理数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ に対し, 正の定数 $C = C(n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ が存在して, 不等式

$$|q_0 + q_1 e^{\alpha_1} + \dots + q_n e^{\alpha_n}| > q^{-n-C/\log \log q}$$

がすべての整数の組 $(q_0, q_1, \dots, q_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ に対し成り立つ。但し, $q = \max(|q_1|, |q_2|, \dots, |q_n|, 3)$ 。

定理 4. (Baker [1], [2; chap. 10], Mahler [10])

相異なる 0 でない有理数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ に対し正の定数 $C = C(n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ が存在して, 不等式

$$|q e^{\alpha_1} - p_1| \cdot |q e^{\alpha_2} - p_2| \dots |q e^{\alpha_n} - p_n| > q^{-1-C/\sqrt{\log \log q}}$$

がすべての整数 $q (\geq 3)$, $p_1, p_2, \dots, p_n$ に対し成り立つ。

注意, 定数 C はいずれも explicit に与えられている。

定理 1 の q_0 も計算可能である。

2. 証明の方法について述べよう。Mahler, Durand の証明は Hermite の方法による。 m, n をパラメタとし, 多項式

$$f(t) = \frac{t^m (t-1)^n}{m! n!}$$

を考える。

$$f(z; t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} f^{(k)}(t)$$

とおくと、部分積分により

$$f(z; 0)e^z - f(z; 1) = e^z \int_0^1 f(t) e^{-zt} dt$$

を得る。両辺に $(m+1)! z^{m+n+1}$ をかけてそれを

$$(1) \quad Q(z)e^z - P(z) = R(z)$$

とおく。(これがいわゆる Hermite's identity である。Hermite

は類似の多項式から出発し (1) を用いて e の超越性を証明

した。) 定義より $Q(z), P(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $\deg Q = n$, $\deg P = m$,

$R(z)$ の $z=0$ での order $= m+n+1$ がわかる。ここで、

パラメータ (m, n) をそれぞれ $(n-1, n)$ または $(n, n-1)$

と選び、対応する P, Q, R をそれぞれ P_n, Q_n, R_n または

P_n^*, Q_n^*, R_n^* と書く。すると degree と order の比較から

$$(2) \quad \det \begin{pmatrix} P_n(z) & Q_n(z) \\ P_n^*(z) & Q_n^*(z) \end{pmatrix} \neq 0 \quad (\forall z \neq 0)$$

がわかる。 $z = a/b$ ($a, b \in \mathbb{N}$) を代入する。 $P_n(a/b)$,

$Q_n(a/b)$, $P_n^*(a/b)$, $Q_n^*(a/b)$ をそれぞれ p_n, q_n, p_n^*, q_n^*

とおく。これらの有理数の共通分母は $d_n := b^n / (n-1)!$ である。

さて, $p, q (> 0)$ を与えられた整数とする。(2)より, 任意の n に対して $p_n q - q_n p \neq 0$ または $p_n^* q - q_n^* p \neq 0$.
各 n に対して $\neq 0$ となる p_n, q_n または p_n^*, q_n^* を選び, それを改めて, p_n, q_n と書く。(1)より

$$d_n q_n e^{a/b} - d_n p_n = d_n R_n(a/b)$$

故に
$$d_n (q_n p - p_n q) = (q e^{a/b} - p) d_n q_n - q d_n R_n(a/b)$$

左辺 $\in \mathbb{Z}, \neq 0$. したがって,

$$|(q e^{a/b} - p) d_n q_n - q d_n R_n(a/b)| \geq 1$$

従って

$$(3) \quad |q d_n R_n(a/b)| \leq \frac{1}{2}$$

ならば

$$|(q e^{a/b} - p) d_n q_n| \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{i.e. } |e^{a/b} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{2} q^{-1 - \log |d_n q_n| / \log q}$$

$q_n, R_n(a/b)$ の大きさ (小ささ) は正確にわかっている。

そこで (3) をみたす n を選び, $d_n q_n$ を q の関数として,

上から評価する事ができる。

Davis も Hermite の証明から idea を得ている。 $f(t)$ を多項式とすると、

$$\int_0^{\infty} e^{-t} f(t) dt = \int_0^1 e^{-t} f(t) dt + e^{-1} \int_0^{\infty} e^{-t} f(t+1) dt$$

これを $q = u + e^{-1} p$ と書くと、

$$e - \frac{p}{q} = \frac{v}{q^2}, \quad \text{但し } v = e u q.$$

いま $f(t)$ として次の多項式 $f_n(t)$ ($n \geq 0$) をとる。

$$f_{3n-2}(t) = \frac{t^n(t-1)^n}{n!}, \quad f_{3n-1}(t) = \frac{t^n(t-1)^{n+1}}{n!}, \quad f_{3n}(t) = \frac{t^{n+1}(t-1)^n}{n!}$$

対応する p, q, v を p_n, q_n, v_n と書くと

$$p_n, q_n \in \mathbb{Z}, \quad e - \frac{p_n}{q_n} = \frac{v_n}{q_n^2},$$

かつ次の回帰関係をもたす。

$$q_{3n} = q_{3n+1} + q_{3n-2}, \quad q_{3n-1} = 2q_{3n-2} + q_{3n-3}, \quad q_{3n-2} = q_{3n-3} + q_{3n-4}$$

(p_n) も同様) これより e の正則連分数展開

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \dots]$$

が得られる。 p_n/q_n はその n 近似分数であり、 q_n の大きさは計算できる。正則連分数が最良近似を与える事から、定理 1 が証明される。

Bundschuh は合流型超幾何関数に対する Kummer の
変換公式

$${}_1F_1(\alpha; \beta; z) = e^z {}_1F_1(\beta - \alpha; \beta; -z)$$

を用いて e^z の有理関数近似を構成している。実際これは、
 e^z の Padé table (Perron [11; § 75] 参照) の主対角線
に一致している。彼は同じ方法で $\tanh z$ と Bessel 関数
の比 $J_\nu(z) / J_{\nu+1}(z)$ の有理点での値を扱っている。
(cf [4].)

Hermite の方法の最も重要な改良は Siegel E 関数の理
論である。Baker - Mahler の結果はこれによる。

定理 4 において $\sqrt{\log \log q}$ を $\log \log q$ に置きかえる事が
残されている。同じ方法で Shidlovskii, Sprindzhuks,
Galochkin 等が e^z を含む超幾何 E 関数に対して, § 1
と同種の結果を得ている。

3. 本論文において定理 2 のオ 3 の証明を与えよう。前 §
の証明では, まず e^z の有理関数近似を構成し, $z = a/b$ と
おいて, その値の有理数近似を導いた。そこで能率の良い関
数近似 — Padé 近似 — が必要となる。"良い関数近似 $\Rightarrow$

良い有理数近似”という図式である。我々の証明は Gauss による合流型超幾何関数の連分数展開にもとづく。即ち連分数の n 近似分数 $p_n(z)/q_n(z)$ という既製の有理関数近似を用いる。それ故証明は単純明快で e^z , $\tan z$, $\tanh z$, $J_\nu(z)/J_{\nu+1}(z)$ etc を含む広いクラスの合流型超幾何関数の有理数値が一様に扱える。もちろん得られる定数は計算可能である。

補題 1 関数

$$Y = F(X) := X \log X + \lambda X \quad (\lambda \text{ は実定数})$$

の逆関数 $X = F^{-1}(Y)$ は, X, Y が十分大きい所で次の級数に展開される。

$$X = F^{-1}(Y) = \frac{Y}{\log Y} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k} \frac{(\log \log Y - \lambda)^{n-k}}{(\log Y)^n} \right\}$$

ここで $A_{n,k}$ は次の関係式で帰納的に定義される。

$$A_{n,0} = 1 \quad (n \geq 0), \quad A_{n,n-1} = (-1)^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

$$A_{n+1,k+1} = A_{n,k+1} - \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ k_1+k_2=k \\ 0 \leq k_i \leq n_i}} A_{n_1,k_1} B_{n_2,k_2} \quad (n \geq 1, 0 \leq k \leq n-1)$$

但し,

$$B_{n,k} = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j} \sum_{\substack{n_1+\dots+n_j=n \\ k_1+\dots+k_j=k \\ n_i \geq 1, 0 \leq k_i \leq n_i}} A_{n_1,k_1} \dots A_{n_j,k_j} \quad (n \geq 1, k \geq 0)$$

はじめの数項を書けば,

$$X = F^{-1}(Y) = \frac{Y}{\log Y} \left\{ 1 + \frac{\log \log Y - \lambda}{\log Y} + \frac{(\log \log Y - \lambda)^2}{(\log Y)^2} - \frac{\log \log Y - \lambda}{(\log Y)^2} \right. \\ \left. + \frac{(\log \log Y - \lambda)^3}{(\log Y)^3} - \frac{5}{2} \frac{(\log \log Y - \lambda)^2}{(\log Y)^3} + \frac{\log \log Y - \lambda}{(\log Y)^3} + \frac{(\log \log Y - \lambda)^4}{(\log Y)^4} - \dots \right\}$$

証明省略

定理 整数 $a(>0)$, b に対して, 正の定数 $C = C(a, b)$ が存在して不等式

$$\left| e^{a/b} - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^{2+2\log a \cdot \nu(q)}} \frac{\log \log q}{\log q}, \quad \nu(q) := \frac{F^{-1}(\log q)}{\log q}.$$

がすべての整数 $p, q (q \geq 3)$ に対して成り立つ。

系 整数 $a(>0)$, b に対して, 正の定数 $C = C(a, b)$ が存在し,

$$\left| e^{a/b} - \frac{p}{q} \right| > C q^{-2-2\log a \cdot (1/\log \log q + \log \log \log q / (\log \log q)^2)}$$

がすべての整数 $p, q (q \geq 3)$ に対して成り立つ。

C の下からの評価は可能であるが, 相当小さくなる。

4. Gauss は Euler, Lambert, Lagrange 等の連分数を一般化して超幾何関数の連分数展開を得た。これを合流型超幾何関数

$$\Phi(\beta; \gamma; z) := 1 + \frac{\beta}{\gamma} \frac{z}{1} + \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

($\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ は定数, $\gamma \notin \{0, -1, -2, \dots\}$) に限定して述べよう。

Φ は entire で, Kummer の関数と呼ばれ, しばしば ${}_1F_1(\beta; \gamma; z)$ と表示される。これは Kummer の方程式 $z d^2 w / dz^2 + (\gamma - z) dw / dz - \beta z = 0$ をみたす。いま $n \geq 0$ に対し

$$P_{2n} := \Phi(\beta+n; \gamma+2n; z), \quad P_{2n+1} := \Phi(\beta+n+1; \gamma+2n+1; z)$$

とおくと, P_n は次の 3 項回帰関係をみたす;

$$P_n = P_{n+1} + a_{n+1} z P_{n+2} \quad (n \geq 0)$$

但し

$$a_{2n} = \frac{\beta+n}{(\gamma+2\beta-1)(\gamma+2n)}, \quad a_{2n+1} = -\frac{\gamma-\beta+n}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)}.$$

これより形式的に連分数

$$\frac{\Phi(\beta; \gamma; z)}{\Phi(\beta+1; \gamma+1; z)} = \frac{P_0}{P_1} = 1 + \frac{a_1 z}{P_1/P_2} = \dots = 1 + \frac{a_1 z}{1} + \frac{a_2 z}{1} + \dots$$

が得られる。この連分数は左辺の関数の poles を含まない任意の compact set 上で一様収束する事が分かる。特に $\beta=0$, $\gamma+1$ を γ で置きかえると

$$\Phi(1; r; z) = \frac{1}{1} + \frac{z}{r} + \frac{1 \cdot z}{r+1} - \frac{r \cdot z}{r+2} + \frac{2 \cdot z}{r+3} - \frac{(r+1)z}{r+4} + \frac{3z}{r+5} - \dots$$

さらに $r=1$ とすれば e^z が連分数

$$e^z = \Phi(1; 1; z) = \frac{1}{1} - \frac{z}{r} + \frac{z}{2} - \frac{z}{3} + \frac{2z}{4} - \frac{2z}{5} + \frac{3z}{6} - \frac{3z}{7} + \dots$$

に展開される。ここで連分数の変形公式

$$(1) \quad b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \dots = b_0 + \frac{r_1 a_1}{r_1 b_1 +} \frac{r_1 r_2 a_2}{r_2 b_2 +} \frac{r_2 r_3 a_3}{r_3 a_3 +} \dots$$

を用いれば

$$(2) \quad e^z = \frac{1}{1} + \frac{-z}{1} + \frac{z}{2} + \frac{-z}{3} + \frac{z}{2} + \frac{-z}{5} + \frac{z}{2} + \frac{-z}{7} + \dots$$

この形では扱いにくいのでもう少し“加速”する。一般に

2つの連分数

$$b_0^* + \frac{a_1^*}{b_1^* +} \frac{a_2^*}{b_2^* +} \dots, \quad b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \dots$$

があって、それらの n 近似分数 f_n^* , f_n の間に

$$f_n^* = f_{2n+1} \quad (n \geq 0)$$

の関係があるとき、前者は後者の odd part であるという。

補題 連分数 $b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \dots$ が odd part をもつ必要十分条件は $b_{2k+1} \neq 0$ ($k \geq 0$)。この時、odd part

$b_0^* + \frac{a_1^*}{b_1^*} + \frac{a_2^*}{b_2^*} + \dots$ は次の式で与えられる;

$$b_0^* = (a_1 + b_0 b_1) / b_1, \quad a_1^* = -a_1 a_2 b_3 / b_1, \quad b_1^* = a_2 b_3 + b_1 (a_3 + b_2 b_3),$$

$$a_k^* = -a_{2k-1} a_{2k} b_{2k-3} b_{2k+1}, \quad b_k^* = a_{2k} b_{2k+1} + b_{2k-1} (a_{2k+1} + b_{2k} b_{2k+1}).$$

この補題により (2) の odd part をとり (1) で変形すれば

$$(2') \quad e^z = 1 + \frac{2z}{2-z} + \frac{z^2}{2 \cdot 3} + \frac{z^2}{2 \cdot 5} + \frac{z^2}{2 \cdot 7} + \dots + \frac{z^2}{2(2n-1)} + \dots$$

を得る。さらに変形公式

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots = b_0 + \frac{1}{\frac{1}{a_1} b_1} + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2} b_2} + \frac{1}{\frac{a_2}{a_1 a_3} b_3} + \frac{1}{\frac{a_1 a_3}{a_2 a_4} b_4} + \dots$$

を用いて正則連分数に直せば

$$(*) \quad \begin{cases} e^z = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \\ a_1 = \frac{2-z}{2z}, \quad a_{2n} = \frac{4(4n-1)}{z}, \quad a_{2n+1} = \frac{4n+1}{z} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

を得る。

つぎに $\Phi(\beta; \gamma; z)$ において, z を z/β におきかえ $\beta \rightarrow +\infty$ とすると, 合流型超幾何関数

$$\Psi(\gamma; z) = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{z}{1} + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

及び連分数展開

$$\frac{\Psi(r; z)}{\Psi(r+1; z)} = 1 + \frac{\frac{z}{r(r+1)}}{1} + \frac{\frac{z}{(r+1)(r+2)}}{1} + \frac{\frac{z}{(r+2)(r+3)}}{1}$$

を得る。今度は (2) $\rightarrow$ (2') への変形は必要なく、このままで良い。 $\tan z$, $\tanh z$, $J_\nu(z)/J_{\nu+1}(z)$ などはこの形の連分数である。

以上連分数に関しては, Perron [11], Wall [12], Jones-Thron [8] を参照してほしい。但し [8] の (2.4.30) 式にはミスがある。上記 (2') が正しい。

5. 定理の証明

補題2, 連分数

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \quad (a_n \text{ 複素数})$$

において

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n a_{n+1}|^{-1} < +\infty.$$

とすると

(i) 比 $p_n / (a_2 a_3 \dots a_n)$, $q_n / (a_1 a_2 \dots a_n)$ はそれぞれ 0 でない有限値に収束する。

$$(ii) \alpha_n = \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + \dots}} \text{ とおくと, } |\alpha_n| \sim |a_{n+1}|^{-1}.$$

証明省略

定理の証明は連分数(*)にもとづく。(*)に $z = a/b$ を代入すると, n 近似分数 p_n/q_n において, $p_n, q_n \in \mathbb{Q}$. いま

$$(1) \quad d_n = 2a^n$$

とおくと, 帰納法により

$$d_n p_n, d_n q_n \in \mathbb{Z} \quad (n \geq 1)$$

がいえ。(*)は補題2の条件をみたすから, n_0 を十分大きく選べば,

$$(2) \quad \begin{cases} |q_n| < |q_{n+1}|, & |q_n/d_n| < |q_{n+1}/d_{n+1}| \\ |q_n| > 1, & |d_n| < 1/2 \end{cases} \quad (n \geq n_0)$$

と出来る。さて $p, q (> 0)$ を与えられた整数とする。

$$|q_{n_0}/d_{n_0}| < 4q$$

と仮定してよい。(そうでないものは有限個しかないから。)

すると(2)より

$$(3) \quad |q_{n-1}/d_{n-1}| \leq 4q < |q_n/d_n|$$

をみたす $n = n(q) > n_0$ が唯一つ定まる。

連分数の公式

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \pm 1$$

より $p_n q - q_n p \neq 0$ または $p_{n-1} q - q_{n-1} p \neq 0$ の少なくとも一方が成り立つ。

いま $p_n q - q_n p \neq 0$ とすると,

$$d_n q_n (e^{a/b} - \frac{p}{q}) = \frac{d_n (p_n q - q_n p)}{q} + d_n (q_n \alpha - p_n)$$

において

$$d_n (p_n q - q_n p) \in \mathbb{Z}, \neq 0, \quad \text{即ち}$$

$$|d_n (p_n q - q_n p)| \geq 1.$$

また連分数の公式

$$q_n \alpha - p_n = \pm \frac{1}{q_{n+1} + d_{n+1} q_n}$$

と(2), (3)より

$$|d_n (q_n e^{a/b} - p_n)| \leq \frac{2 d_n}{|q_{n+1}|} \leq \frac{1}{2q}.$$

よって

$$|d_n q_n (e^{a/b} - \frac{p}{q})| \geq \frac{1}{2q}$$

故に

$$|e^{a/b} - \frac{p}{q}| > \frac{1}{2} q^{-1} - \log |d_n q_n| / \log q.$$

$p_{n-1} q - q_{n-1} p \neq 0$ から同じ不等式が得られる。ここで(1),

(2)より

$$\log |d_n q_n| \leq \log |q_{n-1} / d_{n-1}| + 2 \log |d_n d_{n-1}| + \log |q_n / q_{n-1}|$$

$$\leq \log q + 2n \log a + \log n + B.$$

(以後同じ文字 B で適当な正の定数を表わす。 B および 0 定数は高々 a, b にかみ依存する。) よって

$$(4) \quad |e^{a/b} - \frac{p}{q}| > B q^{-2 - (2n \log a + \log n) / \log q}$$

あとは $n = n(q)$ を q の関数として explicit に表わせればよ

い。 (X) より

$$a_1, a_2, \dots, a_{2m+1} = \frac{2-z}{8} \left(\frac{8}{z}\right)^{2m+1} (m!)^2 \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{16k^2}\right)$$

$$\log |a_1, a_2, \dots, a_{2m+1}| = 2 \log m! + (2m+1) \log (8/|z|) + O(1)$$

$$\begin{aligned} \log |a_1, a_2, \dots, a_{2m}| &= \log |a_1, a_2, \dots, a_{2m+1}| - \log |a_{2m+1}| \\ &= 2 \log m! + 2m \log (8/|z|) - \log (2m) + O(1) \end{aligned}$$

よって Stirling の公式

$$\log m! = m \log m - m + \frac{1}{2} \log m + O(1)$$

および補題 2 より

$$\log |g_n| = n \log n + n \log \frac{4}{|z|e} + O(1)$$

故に (1), (3) より

$$(5) \quad \log g + B < n \log n + \lambda n = F(n) < \log g + B'$$

$$\text{但し } \lambda = 2 \log 2 - 1 + \log |b| - 2 \log a.$$

特に

$$(6) \quad \log n = \log \log g - \log \log \log g + O(1).$$

また平均値の定理を用いて

$$F^{-1}(Y + O(\log Y)) = F^{-1}(Y) + O(1)$$

これと (5), (6) から

$$(7) \quad n = F^{-1}(\log g) + O(1)$$

(4), (6), (7) および補題 1 より定理と系が従う。

References

- [1] A. Baker: On some Diophantine inequalities involving the exponential function. *Canad. J. Math.* 17(1965), 616-626
- [2] A. Baker: Transcendental Number Theory. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975
- [3] P. Bundschuh: Irrationalitätsmasse für e^a , $a \neq 0$ rational oder Liouville-Zahl. *Math. Ann.* 192(1971), 229-242
- [4] P. Bundschuh: Scharfe Irrationalitätsmasse für Zahlen, die mit Bessel-funktion zusammenhängen. *Math. Zeit.* 165 (1979), 251-260
- [5] C. S. Davis: Rational approximations to e . *J. Austral. Math. Soc. (Ser. A)* 25(1978), 497-502
- [6] A. Durand: Note on rational approximations of the exponential function at rational points. *Bull. Austral. Math. Soc.* 14(1976), 449-455
- [7] A. Durand: Simultaneous Diophantine approximations and Hermite's method. *Bull. Austral. Math. Soc.* 21(1980), 463-470

- [8] W. B. Jones and W. J. Thron: Continued Fractions: Annalytic Theory and Applications, Encyclopedia of Math. Appl., vol. 11. Addison-Wesley, 1980
- [9] K. Mahler: On rational approximations of the exponential function at rational points. Bull. Austral. Math. Soc. 10(1974), 325-335
- [10] K. Mahler: On a paper by A. Baker on the approximation of rational powers of e . Acta Arith. 27(1975), 61-87
- [11] O. Perron: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Chelsea, New York, 1929
- [12] H. S. Wall: Analytic Theory of Continued Fractions. Van Nostrand, New York, 1948