

Fuzzy-Fuzzy オートマトン

水本雅晴

田中幸吉

(大阪大学・基礎工学部・情報工学科)

1965年, L.A. Zadehによりあいまいな事柄を表現する手法として fuzzy 集合の概念が発表されて以来⁽¹⁾, オートマトン, 言語, 制御, パターン認識, 意志決定, 論理などの分野に应用されている. たとえば, fuzzy オートマトンについていえば, Wee⁽²⁾ により, 学習オートマトンとして定式化されたのが最初で, その後 fuzzy オートマトンによる多峰探索, プラント制御, ランダム媒体との相互作用, ゲーム, fuzzy プログラム, GMDH アルゴリズムなどに应用されている. これらと並行に, fuzzy オートマトンそのものに対する性質も調べられており,⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾ また fuzzy オートマトンの変形または拡張として, マックス・積オートマトン, ミニ・マックスオートマトン, L-fuzzy オートマトンなど種々のオートマトンが定式化されている.⁽⁶⁾⁽⁷⁾

本稿では, fuzzy 集合の拡張である fuzzy-fuzzy 集合の性質を述べ, これを基に fuzzy-fuzzy オートマトンを新しく定義し, 2, 3 の性質を導き出す.

1. Fuzzy-Fuzzy 集合

準備として通常の fuzzy 集合について簡単に述べておこう. 集合 X における fuzzy 集合 A とは

$$\mu_A: X \rightarrow [0, 1] \quad (1)$$

なる X 上のメンバーシップ関数 μ_A によって特性づけられた集合で, 値 $\mu_A(x) \in [0, 1]$ は要素 $x \in X$ が fuzzy 集合 A に属する グレードを表わす. fuzzy 集合の表記法として

$$\begin{aligned} A &= \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \cdots + \mu_A(x_n)/x_n \\ &= \sum_i \mu_A(x_i)/x_i \end{aligned} \quad (2)$$

を採用する. ここで, $+$ は論理和 ($\max$) を表わす.

fuzzy 集合に関する演算としては

$$\text{包含: } A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X. \quad (3)$$

$$\text{和: } A \cup B \Leftrightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]. \quad (4)$$

$$\text{交わり: } A \cap B \Leftrightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]. \quad (5)$$

$$\text{補集合: } \bar{A} \Leftrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x). \quad (6)$$

正規 fuzzy 集合, 凸 fuzzy 集合が以下の様に定義される.

正規 fuzzy 集合: fuzzy 集合 A が 正規 であるとは

$$\max_{x \in X} \mu_A(x) = 1 \quad (7)$$

を満足する場合をいう。

凸 fuzzy 集合: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($\in \mathbb{R}$ で, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ で, x_i は実数とする) における fuzzy 集合 A が 凸 であるとは任意の $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して

$$\mu_A(x_i) \geq \min[\mu_A(x_k), \mu_A(x_l)] \quad (7)$$

を満足する場合をいう。ここで, $k \leq i \leq l$ である。

(例) 次の fuzzy 集合 A は正規凸 fuzzy 集合である。

$$A = 0.3/1 + 0.6/2 + 1/3 + 0.7/4 + 0.2/5.$$

さて, 上述の fuzzy 集合においてはグレードは区間 $[0, 1]$ 内の値を取るものであったが(たとえば, $\mu_A(2) = 0.8$ などで), 現実にはグレードそのものがはっきり定まらなくて, たとえば, グレードは "高い", "中位", "非常に低い", "0.8 ぐらい" といったことがある。このようなことを説明するためにグレードが $[0, 1]$ 上の fuzzy 集合で表わされるような fuzzy-fuzzy 集合 (またはタイプ 2 の fuzzy 集合) が Zadeh により提案された⁽⁸⁾。

Fuzzy-Fuzzy 集合: 集合 X における fuzzy-fuzzy 集合 A とは

$$\mu_A: X \rightarrow [0, 1]^{[0, 1]} \quad (8)$$

なる fuzzy ユーザーシップ関数 μ_A によって特性づけられた fuzzy 集合で、値 $\mu_A(x)$ は fuzzy グレード と名付けられ、 $[0, 1]$ (またはその部分集合) における fuzzy 集合である。

Fuzzy-fuzzy 集合の演算は拡張原理[†]を使用することにより以下の様になされる。

fuzzy グレード $\mu_A(x), \mu_B(x)$ は

$$\mu_A(x) = \sum_i \alpha_i / u_i, \quad \mu_B(x) = \sum_j \beta_j / v_j \quad (9)$$

と表わす。ここで、 α_i, β_j はそれぞれ $u_i, v_j \in [0, 1]$ に対するグレードである。 $\vee = \max, \wedge = \min$ とおくと

$$\begin{aligned} \text{和: } A \vee B &\Leftrightarrow \mu_{A \vee B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \\ &= (\sum_i \alpha_i / u_i) \vee (\sum_j \beta_j / v_j) \\ &= \sum_{i,j} (\alpha_i \wedge \beta_j) / (u_i \vee v_j). \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{交わり: } A \wedge B &\Leftrightarrow \mu_{A \wedge B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \\ &= \sum_{i,j} (\alpha_i \wedge \beta_j) / (u_i \wedge v_j). \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{補集合: } \bar{A} &\Leftrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \\ &= \sum_i \alpha_i / (1 - u_i). \end{aligned} \quad (12)$$

[†] $A = \sum_i \mu_A(x_i) / x_i, B = \sum_j \mu_B(y_j) / y_j \in X$ における fuzzy 集合とすると、 X の要素に対する二項演算 $*$ は fuzzy 集合 A, B には拡張定義され、以下の様になされる (拡張原理)。

$$\begin{aligned} A * B &= (\sum_i \mu_A(x_i) / x_i) * (\sum_j \mu_B(y_j) / y_j) \\ &= \sum_{i,j} (\mu_A(x_i) \wedge \mu_B(y_j)) / (x_i * y_j), \quad \wedge = \min. \end{aligned}$$

(例) $J = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1\} \subseteq [0, 1]$ とし

$$\mu_A(x) = \underline{\text{high}} = 0.4/0.7 + 0.7/0.8 + 0.9/0.9 + 1/1$$

$$\mu_B(x) = \underline{\text{low}} = 1/0 + 0.9/0.1 + 0.7/0.2 + 0.4/0.3$$

とすると, $\mu_A(x) \vee \mu_B(x) =$

$$(0.4/0.7 + 0.7/0.8 + 0.9/0.9 + 1/1) \vee (1/0 + 0.9/0.1 + 0.7/0.2 + 0.4/0.3) \\ = 0.4/0.7 + 0.7/0.8 + 0.9/0.9 + 1/1 = \underline{\text{high}};$$

$$\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \underline{\text{low}}; \mu_{\bar{A}}(x) = \neg \underline{\text{high}} = \underline{\text{low}}.$$

[性質1] 任意の fuzzy グレードは演算 $\vee, \wedge, \neg$ に関して

① 中等律; ② 交換律; ③ 結合律; ④ 二重否定の法則; ⑤ ド・モルガンの法則などが成立するが, 一般に吸収律; 分配律; 定数演算の法則; 相補律は不成立となる. さらに, 定数演算のうち $\mu_A(x) \vee 0 = \mu_A(x), \mu_A(x) \wedge 1 = \mu_A(x)$ は成立する.

(例) $\mu_A(x) = 0.3/0 + 0.4/0.2 + 0.6/0.4 + 0.8/0.6 + 0.9/0.8,$

$$\mu_B(x) = 0.1/0 + 0.2/0.2 + 0.3/0.4 + 0.4/0.5 + 0.5/0.8,$$

$$\mu_A(x) \wedge (\mu_A(x) \vee \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x))$$

$$= 0.3/0 + 0.4/0.2 + 0.5/0.4 + 0.5/0.6 + 0.5/0.8$$

$\neq \mu_A(x).$ (吸収律の不成立).

(例) $\mu_A(x) = 0.9/0.1 + 0.2/0.2 + 0.1/0.3 + 0.8/0.4$

$$\mu_B(x) = 0.4/0.1 + 0.5/0.2 + 0.6/0.3 + 0.3/0.4$$

$$\mu_C(x) = 0.2/0.1 + 0.3/0.2 + 0.6/0.3 + 0.8/0.4$$

とすると

$$\begin{aligned}\mu_A(x) \wedge (\mu_B(x) \vee \mu_C(x)) \\ &= 0.6/0.1 + 0.3/0.2 + 0.6/0.3 + 0.6/0.4, \\ (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) \vee (\mu_A(x) \wedge \mu_C(x)) \\ &= 0.6/0.1 + 0.5/0.2 + 0.6/0.3 + 0.6/0.4\end{aligned}$$

となり分配律は成立していい。

$$(例) \mu_A(x) = 0.7/0.1 + 0.5/0.2 + 0.8/0.3$$

とすると

$$\begin{aligned}\mu_A(x) \vee 1 &= 0.8/1 \neq 1/1 (=1), \\ \mu_A(x) \wedge 0 &= 0.8/0 \neq 1/0 (=0),\end{aligned}$$

となり定数演算の法則(一部分)は成立していい。

$$(例) \mu_A(x) = 0.8/0.1 + 1/0.2 + 0.5/0.3$$

$$\text{とすると, } \neg \mu_A(x) = 0.8/0.9 + 1/0.8 + 0.5/0.7$$

$$\text{となる. } \mu_A(x) \vee (\neg \mu_A(x)) = 0.8/0.9 + 1/0.8 + 0.5/0.7 \neq 1/1 (=1)$$

$$\mu_A(x) \wedge (\neg \mu_A(x)) = 0.8/0.1 + 1/0.2 + 0.5/0.3 \neq 0/0 (=0)$$

より相補律は不成立となる。

《定理1》 fuzzy グレードに対する順序関係 $\leq$ は

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \Leftrightarrow \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \mu_A(x)$$

と定義すれば, $\leq$ の下で半順序集合となる。同様に $\geq$ は

$$\mu_A(x) \geq \mu_B(x) \Leftrightarrow \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \mu_B(x)$$

と定義すれば, $\geq$ の下で半順序集合となる。一般に $\leq \neq \geq$ 。

[性質2] $\mu_A(x), \mu_B(x)$ を凸 fuzzy グレード とすれば

$\mu_A(x) \vee \mu_B(x), \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \neg \mu_A(x)$ も凸である.

[性質3] 凸 fuzzy グレード に対しては分配律が成立する†.

$$\mu_A(x) \wedge (\mu_B(x) \vee \mu_C(x)) = (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) \vee (\mu_A(x) \wedge \mu_C(x)),$$

$$\mu_A(x) \vee (\mu_B(x) \wedge \mu_C(x)) = (\mu_A(x) \vee \mu_B(x)) \wedge (\mu_A(x) \vee \mu_C(x)).$$

《定理2》 凸 fuzzy グレード は $\vee, \wedge$ の下で半環 (詳しくは単位元をもつ可換半環) をなす.

(証明) $\vee, \wedge$ に関して分配的であり, また $\vee, \wedge$ の下で単位元をもつ可換半群をなす. 単位元は, $\vee$ の下では $\vee_0 (=0)$, $\wedge$ の下では $\vee_1 (=1)$ である. なお, 凸 fuzzy グレード $\phi = \sum_i o_i / u_i$, $u_i \in [0, 1]$, は $\vee, \wedge$ に対する零元となる.

[性質4] $\mu_A(x), \mu_B(x)$ を正規 fuzzy グレード とすれば

$\mu_A(x) \vee \mu_B(x), \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \neg \mu_A(x)$ も正規である.

[性質5] 正規 convex fuzzy グレード に対しては定数演算の法則の他方, すなわち

$$\mu_A(x) \vee 1 = 1, \mu_A(x) \wedge 0 = 0$$

が成立する.

[性質6] 正規 convex fuzzy グレード に対しては吸収律が成立する.

† $\mu_A(x)$ は凸である必要はあるが, $\mu_B(x), \mu_C(x)$ は必ずしも凸でなくても分配律は成立する.

(定理3) 正規凸 fuzzy グレードは $V, \wedge$ の下で分配束となる。ただし, 最大元 = $1/1$, 最小元 = $1/0$ である (例参照.)

(例) $J = \{0, 0.5, 1\}$ における fuzzy グレード Σ

$$A_i = a_1/0 + a_2/0.5 + a_3/1, \quad i=1, 2, \dots, 27$$

とする。ただし $a_1, a_2, a_3 \in \{0, 0.5, 1\}$ とする。各 fuzzy グレード $A_i (i=1, \dots, 27)$ は表1のように表わされているものとし, また, このうち正規凸 fuzzy グレードを $\textcircled{A_i}$ と記すことにすると, 正規凸 fuzzy グレード $\textcircled{A_i}$ の全体は図1のような分配束となる。

表1. Fuzzy グレード $A_i = a_1/0 + a_2/0.5 + a_3/1$
($\textcircled{A_i}$ は正規凸 fuzzy グレード)

fuzzy グレード	a_1	a_2	a_3		
A_1	0	0	0	$\textcircled{A_{15}}$	1 . 5 . 5
A_2	.5	0	0	$\textcircled{A_{16}}$	0 1 . 5
$\textcircled{A_3}$	1	0	0	$\textcircled{A_{17}}$	.5 1 . 5
A_4	0	.5	0	$\textcircled{A_{18}}$	1 1 . 5
A_5	.5	.5	0	$\textcircled{A_{19}}$	0 0 1
$\textcircled{A_6}$	1	.5	0	A_{20}	.5 0 1
$\textcircled{A_7}$	0	1	0	A_{21}	1 0 1
$\textcircled{A_8}$	.5	1	0	$\textcircled{A_{22}}$	0 . 5 1
$\textcircled{A_9}$	1	1	0	$\textcircled{A_{23}}$	.5 . 5 1
A_{10}	0	0	.5	A_{24}	1 . 5 1
A_{11}	.5	0	.5	$\textcircled{A_{25}}$	0 1 1
A_{12}	1	0	.5	$\textcircled{A_{26}}$	.5 1 1
A_{13}	0	.5	.5	$\textcircled{A_{27}}$	1 1 1
A_{14}	.5	.5	.5		

最小元 $\Rightarrow$

$\Leftarrow$ 最大元

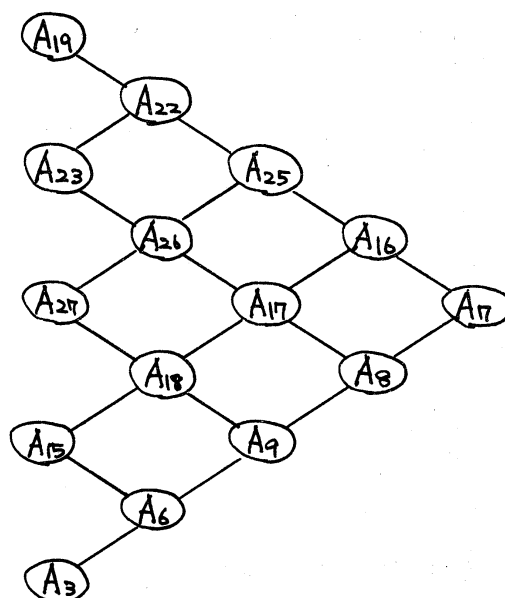


図1. 正規凸 fuzzy グレード $\textcircled{A_i}$ による分配束

各種の fuzzy グレードに対する各法則の成立, 不成立をまとめてみると表えるようになる. ここで, $\circ$ は成立を表わし, $\times$ は一般には不成立であることを示す. また, Δ は一部不成立であることを表わす(すなわち, 定数演算の法則のうち $\mu_A(x) \vee 1 \neq 1$, $\mu_A(x) \wedge 0 \neq 0$ となることを表わす). なお通常の fuzzy 集合に対するグレード, および通常の集合に対する特性関数値(すなわち, 二値グレード($0, 1$ のみをとる))も対比のために付加しておく.

表 2. 各種 fuzzy グレードに対する法則の成立, 不成立
($\circ$: 成立, $\times$: 一般には成立せず, Δ : 一部成立)

法則 グレード	巾等	交換	結合	吸収	分配	二重否定	ド・モルガン	定数演算	相補
任意の fuzzy グレード	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\times$	$\times$	$\circ$	$\circ$	Δ	$\times$
正規 fuzzy グレード	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\times$	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\times$
凸 fuzzy グレード	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	Δ	$\times$
正規凸 fuzzy グレード	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\times$
グレード (通常の fuzzy 集合に対する)	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\times$
二値グレード (通常の集合に対する)	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$

2. Fuzzy-Fuzzy オートマトン

アルファベット Σ における fuzzy-fuzzy オートマトン A とは

$$A = (S, S_0, \mu_A, F). \quad (13)$$

(1) S は状態集合.

(2) S_0 は 初期 fuzzy 状態 で

$$\mu_{S_0} : S \rightarrow [0, 1]^{[0, 1]} \quad (14)$$

なる fuzzy $\times$ ニンバーシップ関数 μ_{S_0} で特性づけられた状態集合 S における fuzzy-fuzzy 集合である.

(3) μ_A は fuzzy 状態推移関数で

$$\mu_A(s_{i+1}/s_i, a_i) \in [0, 1]^{[0, 1]}, \quad s_{i+1}, s_i \in S, a_i \in \Sigma \quad (15)$$

なる条件付 fuzzy $\times$ ニンバーシップ関数で表わされる†. これは状態 s_i , 入力 a_i が与えられた時に, 次の状態 s_{i+1} に対する fuzzy グレードを与える.

(4) $F \subseteq S$ は最終状態の集合.

† 一般に, Y における fuzzy-fuzzy 集合 $B(x)$ が $\forall x \in X$ によって条件付けられてゐる場合, $\mu_B(y/x)$ なる 条件付 fuzzy $\times$ ニンバーシップ関数 で表わされる. $A \in X$ における fuzzy-fuzzy 集合とすると, A は $\mu_B(y/x)$ により Y における fuzzy-fuzzy 集合 B を引き起こし, 次の様に定義される.

$$\mu_B(y) = \bigvee_{x \in X} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y/x)].$$

(参考) μ_{S_0}, μ_A が 凸 fuzzy グレードを取る場合, fuzzy-fuzzy オートマトン A は半環オートマトン⁽⁷⁾となり, μ_{S_0}, μ_A が正規凸 fuzzy グレードを取る時, A は束オートマトン⁽⁷⁾となる. さらに $\mu_A, \mu_{S_0} \in [0, 1]$ の時, A は通常の fuzzy オートマトンとなる.

次に, fuzzy-fuzzy オートマトン A の状態方程式を求めよう. 今, 初期 fuzzy 状態が S_0 で, 入力 $a_0 \in \Sigma$ の時, 次の fuzzy 状態 S_1 は p. 7 の脚注の式より

$$\mu_{S_1}(s_1) = \bigvee_{s_0 \in S} [\mu_{S_0}(s_0) \wedge \mu_A(s_1/s_0, a_0)]$$

と与えられる. ここで演算 $\vee, \wedge$ は式 (10), (11) で与えられる.

よって一般に, 初期 fuzzy 状態 S_0 で, 入力系列 $x = a_0 a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ が与えられた時の fuzzy 状態 S_{n+1} は

$$\mu_{S_{n+1}}(s_{n+1}) = \quad (15)$$

$$\bigvee_{s_0, s_1, \dots, s_n \in S} [\mu_{S_0}(s_0) \wedge \mu_A(s_1/s_0, a_0) \wedge \mu_A(s_2/s_1, a_1) \wedge \dots \wedge \mu_A(s_{n+1}/s_n, a_n)].$$

と与えられる. これより

$$\mu_A(s_{n+1}/s_0, a_0 a_1 \dots a_n) \triangleq$$

$$\bigvee_{s_1, \dots, s_n \in S} [\mu_A(s_1/s_0, a_0) \wedge \mu_A(s_2/s_1, a_1) \wedge \dots \wedge \mu_A(s_{n+1}/s_n, a_n)] \quad (16).$$

と置き直すと, 式 (15) は簡単に下記のようにならされる.

$$\mu_{S_{n+1}}(s_{n+1}) = \bigvee_{s_0 \in S} [\mu_{S_0}(s_0) \wedge \mu_A(s_{n+1}/s_0, a_0 a_1 \dots a_n)]. \quad (17)$$

これより, fuzzy 状態 S_{n+1} は初期 fuzzy 状態 S_0 と, 入力 $x = a_0 a_1 \dots a_n$ により表わされることから, 式 (17) を

$$\nu p_A(s/s_0, x) = \bigvee_{s_0 \in S} [\mu_{S_0}(s_0) \wedge \mu_A(s/s_0, x)] \quad (18)$$

と表わす(応答を表わしてゐる)。

これより入力系列 $x \in \Sigma^*$ が fuzzy-fuzzy オートマトン A によつて受理されるグレードを

$$f_A(x) = \bigvee_{s \in F} r_{PA}(s/s_0, x) \quad (19)$$

と定義し, $f_A(x)$ によつて特性づけられた Σ^* 上の fuzzy-fuzzy 集合を $L(A)$ と記し, fuzzy-fuzzy 言語 と名付ける。

次に, fuzzy-fuzzy オートマトン (簡単に ffa) によつて特性づけられた fuzzy-fuzzy 言語の閉包性を議論しよう。

(定理 4) ffa A_1, A_2 による fuzzy-fuzzy 言語を $L(A_1), L(A_2)$ とすると

$$L(A) = L(A_1) \cup L(A_2) \quad (20)$$

となる ffa A が存在する。

(証明) $A_1 = (S^1, S_0^1, \mu_{A_1}, F^1)$, $A_2 = (S^2, S_0^2, \mu_{A_2}, F^2)$ に対し, $A = (S, S_0, \mu_A, F)$ とする。ここで, $S = S^1 \cup S^2$, $F = F^1 \cup F^2$ とし, μ_{S_0}, μ_A は以下の様にとえられる。

$$\mu_{S_0}(s) = \begin{cases} \mu_{S_0^1}(s) & \dots s \in S^1, \\ \mu_{S_0^2}(s) & \dots s \in S^2. \end{cases}$$

$$\mu_A(s'/s, a) = \begin{cases} \mu_{A_1}(s'/s, a) & \dots s', s \in S^1, \\ \mu_{A_2}(s'/s, a) & \dots s', s \in S^2, \\ 1/0 & \dots \text{その他の場合.} \end{cases}$$

《定理5》 $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$. (21)

(証明) $S = S^1 \times S^2$, $F = F^1 \times F^2$ とし,

$$\mu_{S_0}(s_1, s_2) = \mu_{S_0^1}(s_1) \wedge \mu_{S_0^2}(s_2).$$

$$\mu_A((s_1', s_2') / (s_1, s_2), a) = \mu_{A_1}(s_1' / s_1, a) \wedge \mu_{A_2}(s_2' / s_2, a).$$

《定理6》 $L(A) = L(A_1) * L(A_2)$. (連接[†]) (22)

(証明) $S = S^1 \cup S^2$, $F = F^2$, $\mu_i = \bigvee_{s \in S^i} \mu_{S_0^i}(s)$, $i=1, 2$, とし

$$\mu_{S_0}(s) = \begin{cases} \mu_{S_0^1}(s) \wedge \mu_2 & \dots s \in S^1, \\ \mu_{S_0^2}(s) \wedge \mu_1 & \dots s \in S^2. \end{cases}$$

$$\mu_A(s' / s, a) = \begin{cases} \mu_{A_1}(s' / s, a) & \dots s, s' \in S^1, \\ \mu_{A_2}(s' / s, a) & \dots s, s' \in S^2, \\ \mu_{S_2}(s') & \dots s \in S^1, s' \in S^2, \\ \% & \dots \text{その他の場合.} \end{cases}$$

《定理7》 $L(A) = L(A_1)^*$ (Kleene 閉包) (23)

(証明) $S = S^1$, $F = F^1$, $S_0 = S_0^1$ とあり

$$\mu_A(s' / s, a) = \mu_{A_1}(s' / s, a) \vee \mu_{S_0^1}(s').$$

《定理8》 ffa による fuzzy-fuzzy 言語は補集合の下で閉じており。

(証明) $L(A, \lambda) = \{x \mid \mu_A(x) \geq \lambda\}$ と定義すると, もし $\lambda_1 \leq \lambda_2$

[†] $L_1, L_2 \in \text{fuzzy-fuzzy 言語}$ とすると

連接: $L_1 * L_2 \Leftrightarrow \mu_{L_1 * L_2}(x) = \bigvee_u [\mu_{L_1}(u) \wedge \mu_{L_2}(v)], x = uv.$

Kleen 閉包: $L^* = \{\varepsilon\} \cup L \cup L * L \cup L * L * L \cup \dots$

ならば, $L(A, \lambda_1) \supseteq L(A, \lambda_2)$ となり, $L(A, \cdot)$ は非増加関数となる. 一方, $\overline{L(A, \cdot)}$ は非減少となることより証明される. 順序関係 $\supseteq$ は定理 8 参照. $\supseteq$ によりても同様である.

〔定理 9〕 しきい値入をもつ言語

$$L(A, \lambda) = \{x \mid f_A(x) \geq \lambda\}, \lambda \in [0, 1]^{[0, 1]} \quad (24)$$

とすると, $L(A, \lambda)$ は正規言語である. $\supseteq$ によりても同様である. さらに式 (14), (15) の μ_{S_0}, μ_A が正規凸 fuzzy グレードの場合も $\supseteq = \supseteq$ となり同様なことが成立する.

〔証明〕 Σ^* 上の関係 R を

$$x R y \iff r_{PA}(s/s_0, x) = r_{PA}(s/s_0, y) \quad (25)$$

と定義すると, R は Σ^* 上の同値関係となる. また, 任意の $z \in \Sigma^*$ に対し

$$\begin{aligned} & r_{PA}(s/s_0, xz) \\ &= \bigvee_{t \in S} [r_{PA}(t/s_0, x) \wedge \mu_A(s/t, z)] \\ &= \bigvee_{t \in S} [r_{PA}(t/s_0, y) \wedge \mu_A(s/t, z)] \\ &= r_{PA}(s/s_0, yz) \end{aligned}$$

となり, R は右合同関係となる. さらに R は有限個の同値類をもつことよりいえる.

〔参考〕 fuzzy-fuzzy オートマトンの言語受理能力は通常の決定性オートマトンと同じことから, fuzzy-fuzzy 集合の

概念をタイプ3の形式文法に適用しても同様はことがいえる。

しかしながら、タイプ2の文法に適用した場合には言語生成能力は上がる。たとえば、fuzzyプロダクションが

- (1) $S \xrightarrow{\alpha} AB$, (2) $S \xrightarrow{\beta} CD$, (3) $A \xrightarrow{\gamma} aAb$, (4) $A \xrightarrow{\gamma} ab$
 (5) $B \xrightarrow{\gamma} cB$, (6) $B \xrightarrow{\gamma} c$, (7) $C \xrightarrow{\gamma} aC$, (8) $C \xrightarrow{\gamma} a$
 (9) $D \xrightarrow{\gamma} bDc$, (10) $D \xrightarrow{\gamma} bc$.

ただし、 α, β, γ はfuzzyグレードで、

$$\alpha = 0.5/0 + 1/0.5 + 0.5/1,$$

$$\beta = 1/0.5,$$

$$\gamma = 1/0.5 + 0.5/1.$$

により

$$L(G, \gamma) = \{x \mid \mu_G(x) \geq \gamma\} = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$$

となり、タイプ1言語が生成される。

(注) 通常^(fuzzy)のタイプ2文法ではタイプ1言語は生成できないことがわかっている(9)。

参考文献

(1) L.A.Zadeh: "Fuzzy sets", Inform. Control, 8, 338-358, 1965.

(2) W.G.Wee, K.S.Fu: "A formulation of fuzzy automata and its application as a model of learning systems", IEEE Trans. on SSC, ssc-5, 215-223, 1969.

- (3) L.A. Zadeh : "Toward a theory of fuzzy systems",
in "Aspects of Network and System Theory" (ed. Kalman
and Declaris), Holt, Rinehart and Winston, 1971.
- (4) E.S. Santos : "Maximin automata", Inform. Control,
13, 363-377, 1968.
- (5) M. Mizumoto, J. Toyoda, K. Tanaka : "Some considerations
on fuzzy automata", J. CSS, 3, 409-422, 1969.
- (6) E.S. Santos and W. G. Wee : "General formulation of
sequential machines", Inform. Control, 12, 5-10, 1968.
- (7) M. Mizumoto, J. Toyoda, K. Tanaka : "Various kinds of
automata with weights", J. CSS (in press).
- (8) L.A. Zadeh : "The concept of a linguistic variable
and its application to approximate reasoning", Inform.
Sci. (to appear).
- (9) M. Mizumoto, J. Toyoda, K. Tanaka : "N-fold fuzzy
grammars", Inform. Sci., 5, 25-43, 1973.