

点推定問題の一例

区間 $(0, \theta]$ 上の一様分布にしたがう観測値に
もとづく, θ の種々の推定量

大阪市大 理学部 森本治樹

区間 $(0, \theta]$ 上の一様分布を P_θ と書く. これはこの本の
草間氏の報告 §2, 定理 3 の特殊な場合で, $r(x) = 1$, $g(\theta)$
 $= 1/\theta$ であるものをいうのである. θ の推定とは $\alpha = 1$ であ
るということだから, 2 乗損失関数の下では

[定理 A] (Karlin) 推定量 $\varphi_0(x) = 3/2 x$ は AD
(admissible の略). $\varphi(x) = kx$ ($k \neq 3/2$) は IAD
(inadmissible の略).

この問題に直接適用できる定理を, もう一つ挙げておく.

[定理 B] (工藤 [53]) 標本空間 $\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$,
母数空間 $\Theta = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i$ という分割が,

$$P_\theta \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{X}_i \right) = 0, \quad \theta \in \Theta_n; \quad n=1, 2, \dots,$$

という条件を満足すると仮定する. ξ_i は $\mathbb{H}$ 上の σ 有界測度で $\xi_i(\mathbb{H}) = 1$ であるとする ($i = 1, 2, \dots$). また

$$r_i(\xi_i, \varphi) = \int_{\mathbb{H}} \int_{\mathbb{R}} L(\varphi(x), \theta) dP_\theta(x) d\xi_i(\theta)$$

と定義する.

さらに推定量 φ^* が次の条件をみたすとする.

もしも $\mathbb{R}_i$ 上で $\varphi^\dagger(x) = \varphi^*(x)$ a.e. P_θ , $\theta \in \mathbb{H}$ でない限り

$$r_i(\xi_i, \varphi^*) < r_i(\xi_i, \varphi^\dagger).$$

以上の前提のもとで, もしもある推定量 φ に対して

$$r_\varphi(\theta) \leq r_{\varphi^*}(\theta) \quad \theta \in \mathbb{H}$$

なら, それぞれの ξ_i について殆ど到る所で

$$r_\varphi(\theta) = r_{\varphi^*}(\theta).$$

現在の問題に対しては $\mathbb{R} = \mathbb{H} = (0, \infty)$, $L(\varphi(x), \theta) = (\varphi(x) - \theta)^2$ と仮定しており, また終結部の下線の個所は不要であることが容易に示される. つまり φ^* は AD になる事を注意しておく.

§ 1. θ の推定量としてどのようなものが AD になるかを考えるのであるが, 最初に次の 2 つのことはすぐにわかる.

[C] $\varphi(x)$ が $AD \Rightarrow \varphi(x) \geq x$.

[D] " $\Rightarrow \varphi(x)$ は単調増大.

何故なら, $\bar{\varphi}(x) = \text{Max}(\varphi(x), x)$, $\bar{\varphi}(x) = y(\mu[\varphi_1(x) < y] \leq x \leq \mu[\varphi_1(x) = y])$ とおけば $r_{\varphi}(\theta) \geq r_{\bar{\varphi}}(\theta) \geq r_{\bar{\varphi}}(\theta)$ で, それぞれの等号がすべての $\theta \in \Theta$ について成立つのは両辺にあらわれる2つの推定量が互いに相等しいときだけである. なお μ は Lebesgue 測度をあらわす.

§ 2. しばらく問題をさらに特殊化して $\Theta = \{1, 2, \dots, n\}$ とする. このとき量小十分統計量は $[x]$ となるので, [C], [D] のほかにさらに

[E] $\varphi(x)$ が $AD \Rightarrow \varphi(x)$ は $[x]$ の関数.

そこで $[x] = i$ のときの φ の値を φ_i とおく. また Θ 上に確率測度 ξ をとり, $\xi(\{i\}) = \xi_i$ とおく. ξ に対する Bayes 解は次の形で与えられる ([13]):

$$\varphi_i = \frac{\sum_{k=i}^n \xi_k}{\sum_{k=i}^n \frac{1}{k} \xi_k}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

この φ が一意にきまるのは $\xi_n \neq 0$ のときで, そのとき φ は AD なのであるから, 逆にどのような φ が (1) の形に書けるかが問題になる. 結果は簡単で,

[F] $n \geq y_i, y_{i+1} \geq y_i, y_i > i \quad (i=1, 2, \dots, n)$
 ならば φ は (1) の形に書け、従って AD.

何らかの i に対して $y_i = i$ となる場合は、 $\xi_{i+1} = \dots = \xi_n = 0$ となる。このようなときは $\times$ 及び $\oplus$ を $(0, i]$ および $(i, n]$ に分割して、それぞれの中で同じことを行い、[定理 B] を援用すれば、そのようなものも AD であることが示される。 $y_i = i$ となるような i がいくつあっても、分割をさらに細かくすればよいだけであるから、

[G] $n \geq y_i, y_{i+1} \geq y_i, y_i \geq i \quad (i=1, 2, \dots, n)$
 ならば φ は AD.

これは [C][D][E] の逆になっている。それ故この問題に対しては、[G] の条件をみたす φ が最小完全類をなしていることがわかるのである。

§ 3. もとの問題にかえて、 $\Theta = (0, \infty]$ を任意の可算個の点列 $0 = \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \dots$ を用いて $\Theta = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i, \Theta_i = (\theta_i, \theta_{i+1}]$ に分割し、これに [定理 B] を適用することにする。各々の Θ_i の中に有限個の点列 $\theta_i = \theta_{i1} < \theta_{i2} < \dots < \theta_{i+1}$ を取る。[定理 B] において ξ_i としては、これら有限個の点にのみ重さをもつ測度を考えれば、“どのような φ^* がこの定理の条件をみたすか？”という問題は各 $X_i = (\theta_i, \theta_{i+1}]$ の上

で §2. と同じ問題を解くことに帰着する。したがって、

[F] $\varphi(x)$ が単調増加階段関数で, $\sup \{x; \varphi(x)=x\} = \infty$ ならば, $\varphi(x)$ は AD.

また §2 と同様に “どのような φ が, もとの問題の Bayes 解となっているか?” ということを調べることもできる。すなわち ④ 上の先験分布 ξ が存在して, それについての φ の事後危険が殆ど確実に有限であり, かつ

$$\varphi(x) = \frac{\int_x^\infty d\xi(\theta)}{\int_x^\infty \frac{1}{\theta} d\xi(\theta)} \quad (2)$$

となるとき $\varphi(x)$ は ξ に対する Bayes 解であり, それ以外に Bayes 解がなければ AD である。例えばここで, $\varphi(x)$ が x に関して微分可能な関数であるとし, $d\xi(\theta) = \xi(\theta)d\theta$, $\int_x^\infty \frac{1}{\theta} \xi(\theta) d\theta = A(x)$, すなわち $-\xi(\theta) = \theta A'(\theta)$ とおけることに注意して (2) を変形すると

$$A(x) \varphi'(x) + A'(x)(x - \varphi(x)) = 0$$

という微分方程式となる。これから $A(x)$ を求めることは容易であり, それから導かれる ξ についての φ の事後危険が有限になるための条件も求められる。

§4. 他方, [定理 A] から想像されることは

$$[H] \quad \varphi(x) \geq \varphi_0(x), \quad x \leq x_1$$

$$\varphi(x) > \varphi_0(x) + \varepsilon_3(x - x_1) \quad x > x_1$$

あるいは,

$$\varphi(x) \leq \varphi_0(x) \quad x \leq x_1$$

$$\varphi(x) < \varphi_0(x) - \varepsilon_4(x - x_1) \quad x > x_1$$

ならば $\varphi(x)$ は IAD.

このことは $\varphi(x)$ と, $\varphi_1(x) = \varphi(x)$, $x \leq x_1$,
 $\varphi_1(x) = \varphi(x) + C(x - x_1)$ との危険関数を比較することによ
 って容易に証明できる.