

雑音に誘起された対流発生にみられる パターンダイナミクス

京都大学大学院情報学研究科
京都大学大学院情報学研究科
神戸芸術工芸大学

大原英範
藤坂博一
大内克哉

1 序論

ネマティック液晶を2枚の平行な電極に薄くはさみ、プレーナー配向(電極板と平行な分子配向)させたネマティック液晶に電場を付加すると、電気力学的流体不安定性(EHD)によって熱対流に類似した対流パターンが発生する。この実験は、通常、印加電場として交流電場を用いて行なわれるが、交流電場の代わりに雑音電場を用いた研究もいくつかなされている[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]。その中で、Behn 達は印加電場に二値雑音電圧を用いた場合にも EHD によって対流が間欠的に発生するということを線形の範囲で理論的に予想した[5, 6, 7]。John 達は実験でこの間欠的な転移を観測し、この間欠性とオンオフ間欠性との比較を行なっている[8, 9]。

本研究では、この間欠的な転移を非線形効果を取り入れて理論的に取り扱うために現象論的なモデルを構成して、このモデルを用いて対流発生の間欠性及びパターンの変動について調べた。

2 モデルの構成

液晶対流系を理論的に考察しようとする場合、異方性流体の方程式と Maxwell 方程式と連立させなければならないので、基礎方程式は非常に複雑になる。ところで、等方流体の対流発生点近傍の現象は現象論的・定性的なアプローチによって記述できる。本研究の主な目的はネマティック液晶の対流発生点近傍の研究であるので、等方流体の熱対流の現象論的なモデル Swift-Hohenberg 方程式に雑音電圧に対応した雑音項と熱雑音項を取り入れ拡張した、

$$\frac{\partial w(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = [\lambda + f(t) - (\nabla^2 + k_c^2)^2]w(\mathbf{r}, t) - w^3(\mathbf{r}, t) + g(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

を現象論的な運動方程式を雑音電圧を印加した場合のネマティック液晶の EHD による対流発生点近傍のモデルとする。雑音項については、 $f(t)$ は、空間一様で、

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \Gamma_f = \int_0^\infty \langle f(t)f(t') \rangle dt \quad (2)$$

の性質も持つ雑音であり、 $g(\mathbf{r}, t)$ は、ガウス型白色雑音、

$$\langle g(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad \langle g(\mathbf{r}, t)g(\mathbf{r}', t') \rangle = 2\epsilon\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \quad (3)$$

である。ここで、ブラケットはアンサンブル平均である。

各変数と John らの実験との対応は、 w はディレクターの電極板と水平方向に対する微小角、 k_c は最初に不安定化するモードの波数、 λ は閾値電圧からのずれ、 $f(t)$ は雑音電圧のモジュレーション

ン、 $g(x, t)$ は熱雑音である。また、実際の実験では外部雑音電圧に比べて熱雑音の影響は小さいので $\Gamma_f \gg \varepsilon$ と仮定する。

このモデルでは、プレーナー配向状態では空間一様に $w = 0$ であり、熱対流系の熱伝導状態に対応する。雑音がない場合、この状態の線形安定性は、 $w(x, t)$ のフーリエ成分 $w_k(t)$ が線形の範囲で $w_k(t) = w_k(0) \exp(\lambda_k t)$ と求まることより、

$$\lambda_k \equiv \lambda - (k^2 - k_c^2)^2 \quad (4)$$

で調べることができる。 $\lambda < 0$ では全ての波数に対して $\lambda_k < 0$ となりプレーナー配向状態は安定であるが、 $\lambda > 0$ では k_c 近傍の波数を持つ揺らぎが不安定化しパターンが形成され安定となるが、このモデルでは、雑音項 $f(t)$ によってパターン強度が時間に関して間欠的に変動することが予想される。

このモデルを二次元の場合について調べた場合 [10] にはパターンが間欠的に発生し、その統計性はオンオフ間欠性の統計則に一致していること、熱雑音が無い場合にはパターンができる位置は変化しないが熱雑音を加えることによってパターンのできる位置が変化することが分かっている。

本稿では、一次元の場合についてこのモデルを詳しく調べた結果を報告する。

3 数値計算と理論解析

熱雑音がない場合と熱雑音がある場合について、提案モデルを用いてシミュレーションと理論解析を行なってパターン発生のダイナミクスとその統計性を調べた。シミュレーションの状況設定は、周期境界条件で 256 点の 1 次元格子のスカラー場 $w(x, t)$ で、パラメータは、 $k_c = 1, L = 32\pi$ 、時間幅は、 $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ とした。雑音項 $f(t)$ は、熱雑音がない場合は式 (5) の性質を持った Ornstein-Uhlenbeck 過程を用い、熱雑音がある場合は式 (5) の性質を持った Ornstein-Uhlenbeck 過程と二値雑音 ($\sqrt{D/\gamma}, -\sqrt{D/\gamma}$ しかとらない) を用いた。このとき $\Gamma_f = D/\gamma^2$ となる。

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = \frac{D}{\gamma} e^{-\gamma|t-t'|} \quad (5)$$

パターン強度の時間変化は、

$$l(t) \equiv \left\{ \frac{1}{L} \int_0^L (w(x, t))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

で見積もる。もし、パターンが形成されていなければ、 $l(t) = 0$ となる。

3.1 熱雑音がない場合

式 (1) で $\varepsilon = 0$ とおくと、

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = [\lambda + f(t) - (\nabla^2 + k_c^2)w(x, t) - w^3(x, t)] \quad (7)$$

を得る。式 (7) を用い λ, D, γ をいろいろ変えてシミュレーションを行なった。シミュレーション方法は擬スペクトル法とオイラー法を用いた。パターン図とそれに対応する $l(t)$ の時系列 (図 1) よ

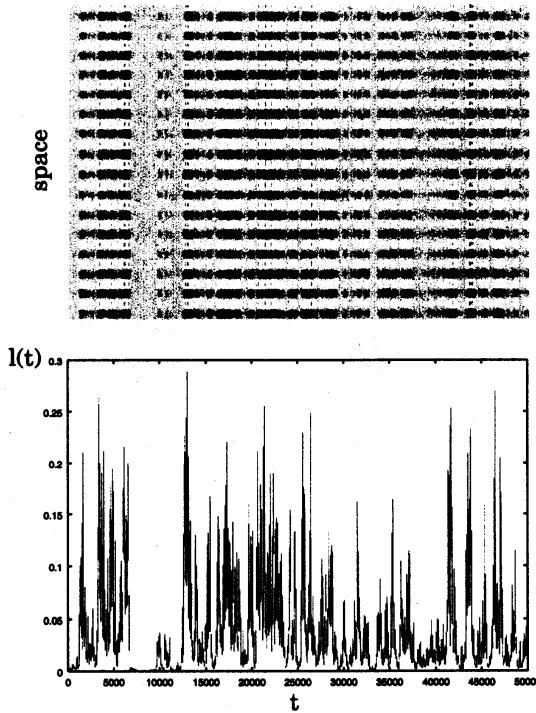


図 1: パターン図と $l(t)$ の時系列。 ($\lambda = 0.002$, $D = 10$, $\gamma = 50$)

り、 $l(t)$ が時間的に間欠的な振舞をしており、それに対応してパターンが形成された状態とパターンが消えている状態 (John 等の実験ではプレーナー配向の状態に対応。以下ラミナー状態と呼ぶ。) が間欠的に振舞っているのがわかる。しかし、パターンの形成される位置の変動は見られなかった。 $l(t)$ の統計量は、図 2、図 3 の様になった。ラミナーの継続時間の分布は実験で報告されている $\tau^{-3/2}$ に良く一致している。

パターンの変動について理論解析をする。状況設定として周期境界条件としているので空間についてモード展開をする。

$$w(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{w}_n e^{ik_n x}, \quad k_n = nk_0, \quad k_0 = \frac{2\pi}{L} \quad (8)$$

L は系の大きさである。これを式 (7) に代入すると $\hat{w}_n$ に対する方程式は次のようになる。

$$\frac{d\hat{w}_n(t)}{dt} = [\lambda_{k_n} + f(t)]\hat{w}_n(t) - \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \hat{w}_{n_1}\hat{w}_{n_2}\hat{w}_{n_3} \quad (9)$$

各モードでの $\hat{w}_n(t) = 0$ という解の線形安定性を議論する。式 (9) の非線形項を無視すれば、 $\hat{w}_n(t)$ のアンサンブル平均 $\langle \hat{w}_n(t) \rangle$ は定常状態で、

$$\langle \hat{w}_n(t) \rangle \sim \exp([\lambda_{k_n} + \Gamma_f] t) \quad (10)$$

となる。 $\lambda_{k_n} + \Gamma_f$ が負になるようなモードは安定であり、正になるようなモードのみが残る。したがって、対流発生点近傍で λ があまり大きくないときには、 $k = k_c$ 近傍のモードしか残らない。

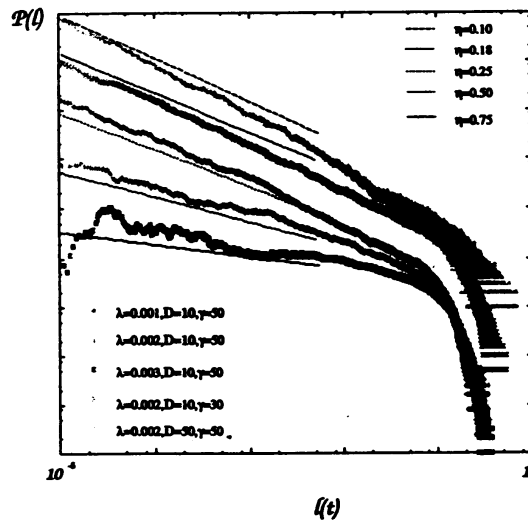
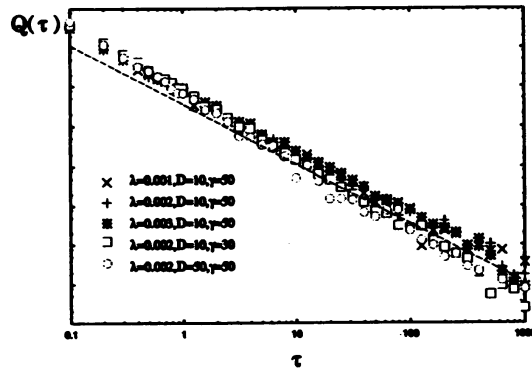
図 2: $l(t)$ の大きさの分布 $P(l)$ 

図 3: ラミナー状態の継続時間の分布

式 (9) で $k = k_c$ 以外のモードを $\hat{w}_n(t) \simeq 0$ として k_c モード $\hat{w}_{k_c}(t) (\equiv \hat{w}_c(t))$ のみを取り出し、 $\hat{w}_c(t) \equiv r(t) \exp(i\theta(t))$ とおくと、 $r(t)$ と $\theta(t)$ の時間発展は、

$$\frac{dr(t)}{dt} = [\lambda + f(t)]r(t) - 3r(t)^3 \quad (11)$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = 0 \quad (12)$$

とかける。系全体の振る舞いが k_c モードの振る舞いによって決まっているものとするれば、パターンの強度の時間変動は $r(t)$ の時間変動に対応し、パターンの形成される位置の変動は $\theta(t)$ の時間変動に対応する。式 (12) をみると $\theta(t)$ は時間変動しないことがわかる。つまり、パターンの形成される位置は変化しない。これは、数値実験の結果と一致する。

一方、 $f(t)$ を白色雑音近似する。すると、式 (5) は、

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle \simeq \Gamma_f \delta(t - t') \quad (13)$$

と書き換えられる。式 (11) と式 (13) より $r(t)$ の分布関数 $P(r, t)$ の満たす Fokker-Planck 方程式は、

$$\frac{\partial P(r, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} \{ [\lambda r - 3r^3] P(r, t) \} - \frac{D}{2\gamma^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} [r P(r, t)] \right\} \quad (14)$$

とかける。したがって、定常分布 $P_{st}(r)$ は、

$$P_{st}(r) = N r^{-1 + \frac{\lambda}{\Gamma_f}} \exp\left(-\frac{3}{2\Gamma_f} r^2\right) \quad (15)$$

$$N^{-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\Gamma_f}{3}\right)^{\frac{\lambda}{2\Gamma_f}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2\Gamma_f}\right)$$

となる。ただし、 $\Gamma(z)$ はガンマ関数である。したがって、 $l(t)$ の分布関数 $P(l)$ は

$$P(l) \propto l^{-1+\eta} \quad (16)$$

というべき則に従う。 $\Gamma_f = D/\gamma^2$ であるので、 $P(l) \propto l^{-1+\eta}$ の指数 η は、 $\eta = \lambda/\Gamma_f$ で計算できる。図2のようにシミュレーションの結果と良く一致している。

3.2 熱雑音がある場合

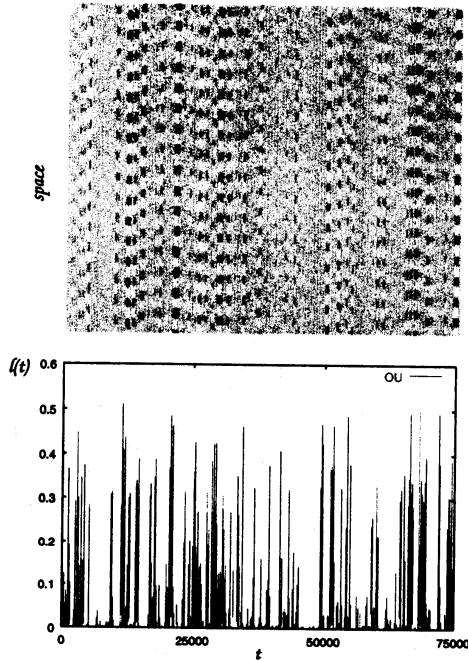


図 4: パターン図と $l(t)$ の時系列

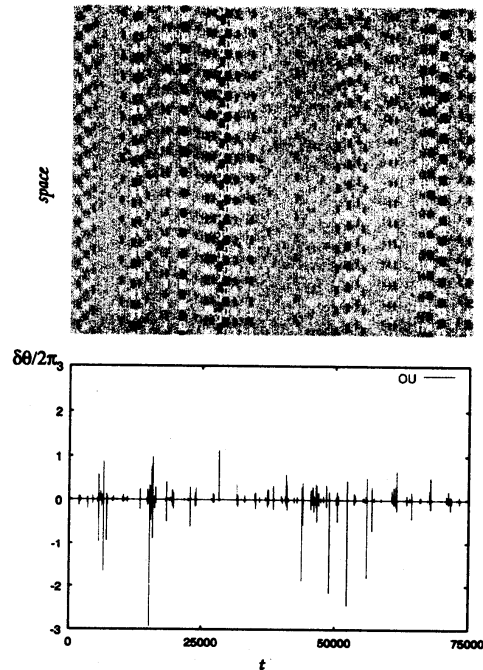


図 5: パターン図と $\delta\theta/2\pi$ の時系列

熱雑音がない場合では、 k_c モード以外は消えてしまい k_c モードの位相に対応した場所にパターンができるが、そのパターンの形成される位置の変動は起きなかった。しかし、実際にはパターンの強度が小さくなったときには熱雑音が影響すると考えられるので、以下では熱雑音を取り入れて議論する。熱雑音による影響を調べたいのでパラメータ $\lambda = 0.002$, $D = 10$, $\gamma = 20$ に固定する。このとき、 $k = k_c$ の近傍にスペクトルが集中するので、式 (1) をモード展開すると

$$\frac{d\hat{w}_n(t)}{dt} = [\lambda_{k_n} + f(t)]\hat{w}_n(t) - \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \hat{w}_{n_1}\hat{w}_{n_2}\hat{w}_{n_3} + \hat{g}_n(t) \quad (17)$$

となる。ただし、 $k_0 = 2\pi/L$, $n_c = k_c/k_0$ である。 $\hat{g}_n(t)$ は、式 (1) の熱雑音 $g(x, t)$ をモード展開したときの k_n モードに対応する係数で、式 (3) より、

$$\langle \hat{g}_n(t) \rangle = 0, \quad \langle \hat{g}_n(t) \hat{g}_{n'}(t') \rangle = 2\bar{\epsilon} \delta_{n, -n'} \delta(t - t'), \quad \bar{\epsilon} = \epsilon L \quad (18)$$

となる。ここで、 k_c モードとそのまわりの4つのモードとその波数に共役なモード以外のモードを打ち切って、熱雑音の強度に関するパラメータ $\bar{\epsilon} = \epsilon L$ をいろいろ変えてシミュレーションを行った。図4はパターン図とそれに対応する $l(t)$ の時系列、図5はパターン図とそれに対応する k_c

モードの単位時間当たりの位相変化 $\delta\theta(2\pi$ で割ってある) の時系列である。図4よりパターンの強度の時間変動は間欠的に振舞うが、熱雑音の強度が強くなるとパターンが消えにくくなる。また、パターンが形成される位置も変動し、図5のようにこの空間変動に対応して k_c モードの位相変化も間欠的に振舞う。

シミュレーションによる $l(t)$ の統計量は図6、図7のようになった。 $\Gamma_f = D/\gamma^2 = 2.5 \times 10^{-2}$ であるので、 $P(l) \propto l^{-1+\eta}$ の指数 η は、 $\eta = \lambda/\Gamma_f = 0.08$ で、シミュレーションの結果と良く一致しているが、熱雑音の強度が強くなると $l(t)$ が小さい領域でベキ則になっている領域がなくなってくる。ラミナーの継続時間の分布は、 $\tau^{-3/2}$ に良く一致している。 k_c モードの位相変化についての統計性をみるために $\Delta\theta(t) \equiv \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$ (Δt : 時間積分の幅) という量を定義して、 $\Delta\theta(t)$ の大きさの分布を求めたのが図8、図9である。 $\Delta\theta(t)$ の大きさの分布には何らかの統計則がありそうである。

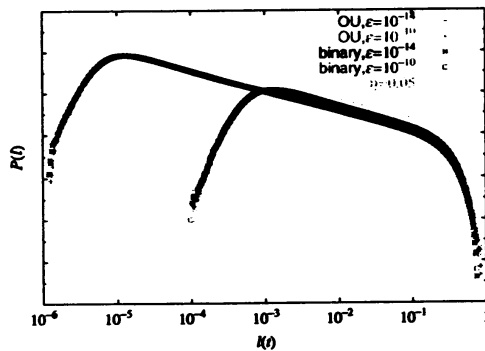


図 6: $l(t)$ の大きさの分布 $P(l)$

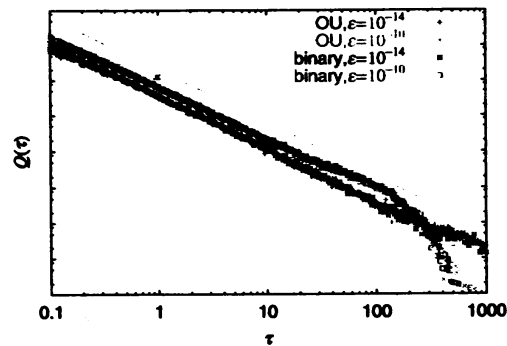


図 7: ラミナー状態の継続時間の分布

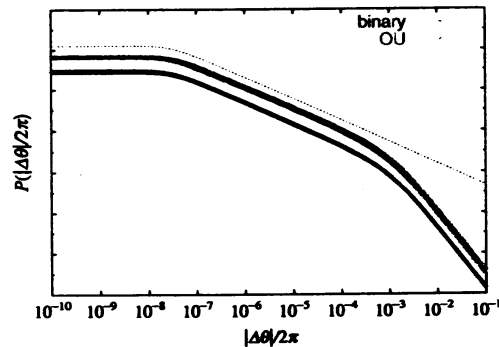


図 8: $\Delta\theta(t)/2\pi$ の分布 ($\varepsilon = 10^{-14}$)

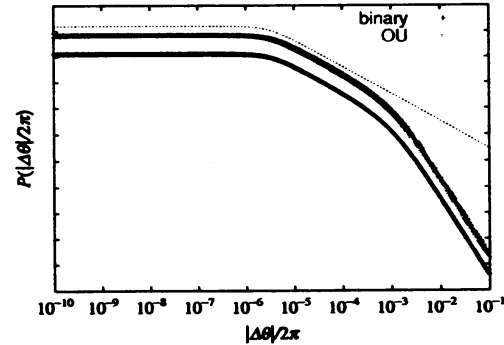


図 9: $\Delta\theta(t)/2\pi$ の分布 ($\varepsilon = 10^{-10}$)

$\Delta\theta(t)$ の分布の統計法則を理論的に考察してみる。 k_c モードのみ考慮してその大きさを $r(t)$ 、位相を $\theta(t)$ とおくと、 $r(t)$ と $\theta(t)$ の時間発展は、

$$\frac{dr(t)}{dt} = [\lambda + f(t)]r(t) - 3r(t)^3 + g_r(t) \quad (19)$$

$$r(t) \frac{d\theta(t)}{dt} = g_\theta(t) \quad (20)$$

とかける。ただし、 $g_r(t)$, $g_\theta(t)$ は互いに独立で、

$$\langle g_r(t) \rangle = \langle g_\theta(t) \rangle = 0, \quad \langle g_r(t)g_r(t') \rangle = \langle g_\theta(t)g_\theta(t') \rangle = \bar{\varepsilon}\delta(t-t') \quad (21)$$

を満たす白色雑音とする。ここで $\theta(t)$ の時間変動に比べて $r(t)$ の時間変動はゆっくりであるとして $r(t)$ を一定とみなすと、式 (20) より $\Delta\theta$ は平均 0, 分散 $\bar{\varepsilon}\Delta t/r^2$ の正規分布に従う。よって、

$$p(\Delta\theta|r(t)=r) = \frac{r}{\sqrt{2\pi\bar{\varepsilon}\Delta t}} \exp\left(-\frac{r^2(\Delta\theta)^2}{2\bar{\varepsilon}\Delta t}\right) \quad (22)$$

を得る。一方、 $f(t)$ を白色雑音近似して、さらに $\Gamma_f \gg \bar{\varepsilon}$ を仮定しているので、式 (19) で $g_r(t)$ を無視すると、 $r(t)$ の定常分布は式 (15) となる。したがって、 $\Delta\theta$ の定常分布 $P(\Delta\theta)$ は、

$$P(\Delta\theta) = \int_0^\infty p(\Delta\theta|r(t)=r)P_{st}(r)dr = A \left(1 + \frac{\Gamma_f}{3\bar{\varepsilon}\Delta t}(\Delta\theta)^2\right)^{-\frac{\lambda}{2\Gamma_f}-\frac{1}{2}} \quad (23)$$

$$\text{ただし、} A = \left(\frac{\Gamma_f}{3\pi\bar{\varepsilon}\Delta t}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2\Gamma_f} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2\Gamma_f}\right)} \quad (24)$$

となる。ただし、 $\Gamma(z)$ はガンマ関数。計算結果と理論値の比較してみると、図 8、図 9 に見られるように $\theta(t)$ が小さいところでは理論値は実験値を良く近似している。

4 まとめ

本研究では、雑音電圧環境の下での対流発生とそのパターンの間欠性について、Swift-Hohenberg 方程式に雑音の効果を加えたモデルを用いて、一次元の場合について調べた。数値実験の結果、John 達の実験で報告されたように k_c モードに対応したパターンが間欠的に形成され、パターンが消えた状態の継続時間の分布が指数が $-3/2$ のベキ則を示すことがわかった。さらに、パターンの強度の時間変動とパターンが形成される位置の変動を調べた結果、パターンの強度 $l(t)$ の分布は $l(t)$ が小さい領域で k_c モードの性質で決まる指数を持つベキ則を示し、熱雑音がない場合はパターンの形成される位置は変わらないが、熱雑音をいれた場合はパターンが形成される位置が変動し、それに対応して k_c モードの位相が間欠的に変動した。 Δt の間での位相変化 $\Delta\theta(t)$ の分布関数は、 $\Delta\theta(t)$ が小さい領域では、

$$P(\Delta\theta) \sim \left(1 + \frac{D}{3\gamma^2\bar{\varepsilon}\Delta t}(\Delta\theta)^2\right)^{-\frac{\lambda}{2D}-\frac{1}{2}} \quad (25)$$

で良く近似されることがわかった。これらの結果は、同じ性質を持った Ornstein-Uhlenbeck 過程による雑音と二値雑音を用いた場合では変わらなかった。

提案モデルを用いて John らが実験で観測したパターン強度の統計性は説明することができた。しかし、John らは印加電圧の相関関数の強度と相関時間を縦軸と横軸に取った相図をもとめているが、提案モデルではこの相図を説明することはできない。多数の不安定モードが生じるような状況で系の振る舞いを議論すること、実験で得られている相図を説明できるようにモデルを改良することなどが今後の課題である。

参考文献

- [1] S. Kai, T. Kai, M. Tanaka and K. Hirakawa : J. Phys. Soc. Jpn. **47**, 1379 (1979).
- [2] T. Kawakubo, A. Yanagita and S. Kabashima : J. Phys. Soc. Jpn. **50**, 1451 (1981).
- [3] H. R. Brand, S. Kai and S. Wakabayashi : Phys. Rev. Lett. **54**, 555 (1985).
- [4] S. Kai, H. Fukunaga and . H. R. Brand : J. Phys. Soc. Jpn. **56**, 3759 (1987); J. Stat. Phys **54**, 1133 (1987).
- [5] U. Behn and R. Müller : Phys. Lett. **113A**, 85 (1985).
- [6] R. Müller and U. Behn : Z. Phys. B **69**,185 (1987);Z. Phys. B **78**,229 (1990).
- [7] U. Behn,A. Lange and T. John : Phys.Rev.E.**58**,2047 (1998).
- [8] H. Amm, U. Behn, T. John and R. Stannarius : Mol. Cryst. Liq. Cryst. **304**, 525 (1997).
- [9] T. John, R. Stannarius and U. Behn : Phys.Rev.Lett.**83**, 749 (1999).
- [10] H. Fujisaka, K. Ouchi, and H. Ohara, Phys. Rev. E. **64**, 036201 (2001).