

シフト法の評価について

九州大学大学院数理学研究科 杉 田 洋 (Hiroshi SUGITA)

0. 序

確率数値解析における多くの問題は、「確率変数の大量のサンプルを計算機で生成しそれらの相加平均を計算することにより、その確率変数の平均を求めること」に帰着される。具体的なサンプリングの手段としては大きく分けて、(1) 確率論的に独立なランダムサンプリング、(2) Weyl 変換（無理数回転）などを用いる決定論的なサンプリング、(3) 確率論的に独立でないランダムサンプリング、がある。本稿の目的は最後の (3) の場合の一つの手法である「シフト法」について簡単な例を用いてその効用を説明することにある。

統計においても独立でないランダムサンプリングを行う「ブートストラップ法」が知られているが、シフト法はブートストラップ法的一种と見ることも可能である。しかし、解析的には以下に述べるように力学系のエルゴード定理と中心極限定理に関する問題と捕えるのがよい。

独立なランダムサンプリングでは、当然、確率変数のサンプルを生成するのに用いる乱数は「使い捨て」で、別のサンプルを生成するために再利用されることはない。これに対し、シフト法では、乱数の再利用が許され、また多くの場合、計算の能率を著しく高めることができる (cf. [1][2][3])。

シフト法は素朴には、多数の初期値から同時に独立なランダムサンプリングを行っているように見える。ただし、それらの初期値は独立にとられるのではなく、乱数の相続く値がとられるため、理論的に調べるには相関の強い力学系のエルゴード性を調べなければならない。

本稿では、シフト法についての一般論を紹介し、続いて explicit に分散を評価できる具体例をランダムウォークに見る。最後に数値実験の結果を示す。

1. シフト法のアルゴリズム

初めにシフト法のアルゴリズムを述べよう。いま、平均を求めたい確率変数を X とする。実際には X のサンプルが $\{0, 1\}$ -値乱数を用いて算出されることから分かるように、 X は確率空間 (Ω, P) 、ただし $\Omega = \{0, 1\}^\infty$ 、 P は Ω 上の平均 $1/2$ の Bernoulli 確率測度、で定義されていると考えるのが都合がよい。 $\theta: \Omega \rightarrow \Omega$ を Ω 上の 1-bit のシフトとする。すなわち、

$$\theta(\omega) = (\omega_2, \omega_3, \dots), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$$

このとき自然数 k に対して、 k -bit シフト θ^k は P を不変確率測度とするエルゴード的な変換である。そしてエルゴード定理 (cf. [8]) により、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(\theta^{kn} \omega) = \mathbf{E}[X], \quad P - \text{a.e. } \omega \in \Omega \quad (1)$$

が成り立つ。ここで $\mathbf{E}$ は P による平均を表す。シフト法は十分大きな N に対して

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(\theta^{kn}\omega)$$

を計算して X の平均 $\mathbf{E}[X]$ の近似値とするものである。ここに、 $\omega \in \Omega$ は 0 と 1 からなる列であるが、これを $\{0, 1\}$ -値乱数を生成して構成する。

2. シフト法の誤差の評価

独立なランダムサンプリングにおいて、その誤差評価が中心極限定理によって行われるように、シフト法でも力学系 θ^k に関する次の中心極限定理を利用する。

定理 1. ([4][5]) X は分散有限な確率変数¹とし、分散を $V(X)$ と書く。このとき、確率変数

$$\sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(\theta^{kn}\omega) - \mathbf{E}[X] \right) \quad (2)$$

の分布は $N \rightarrow \infty$ のとき、平均 0、分散 $V_s(X; k)$ の正規分布に収束する。ただし、 $V_s(X; k)$ は次で与えられる。

$$V_s(X; k) = V(X) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E} \left[\left(X(\theta^{kn}\omega) - \mathbf{E}[X] \right) \left(X(\omega) - \mathbf{E}[X] \right) \right] \quad (3)$$

注意 1. 定理の極限に現われる分散に関して次が成り立つ ([5]): X が次の形

$$X(\omega) = Y(\theta^k\omega) - Y(\omega) + c, \quad \exists Y \in L^2(\Omega, P), c = \text{const.} \quad (4)$$

のとき、またそのときに限り、 $V_s(X; k) = 0$ となる。

3. シフト法の乱数利用効率

前節で述べたシフト法の分散 $V_s(X; k)$ が独立なランダムサンプリングのときの中心極限定理の分散 $V(X)$ より大きいとき、独立なランダムサンプリングと同程度の精度を得るためにはシフト法でのサンプル数を大きくしなければならない。すなわち、独立な N 個のサンプルの相加平均の分散 $V(X)/N$ とシフト法による N_s 個のサンプルの相加平均の分散 $V_s(X)/N_s$ を等しくしようとすれば、 $N_s = NV_s(X; k)/V(X)$ でなければならない。しかしそのような場合でも、シフト法の方が計算時間が少なく済むことが少なくない。それは「乱数利用効率」という観点から説明される。

¹2 進写像 $T: \Omega \ni \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \mapsto \sum_i 2^{-i} \omega_i \in [0, 1]$ に対して $X \circ T^{-1}$ が $[0, 1]$ 上で Hölder 連続または有界変動、という条件が必要。

たとえば、確率変数 X の一つのサンプルを生成するために平均 L -bit の乱数が必要であると仮定しよう。独立なランダムサンプリングの場合に N 個のサンプルを生成するためには平均 (NL) -bit の乱数が必要なのに対して、シフト法では N_s 個のサンプルを生成するために平均 $((N_s - 1)k + L)$ -bit でよい。これに先に述べた等式 $N_s = NV_s(X; k)/V(X)$ を合わせると、 $N_s - 1 = (NV_s(X; k)/V(X)) - 1$ であるから、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{NL}{((NV_s(X; k)/V(X)) - 1)k + L} = \frac{LV(X)}{kV_s(X; k)} =: \text{Eff}(X; k) \quad (5)$$

とすれば、サンプル数が大きいときに、独立なランダムサンプリングと同程度の精度を獲得するためにシフト法では乱数が $1/\text{Eff}(X; k)$ 程度しか必要でないことが分かる。 $\text{Eff}(X; k)$ をシフト法の独立なランダムサンプリングに対する「乱数利用効率」と呼ぶ。

もっとも、乱数利用効率だけが計算時間を左右する要素でないのは明らかである。シフト法では通常非常に多くのサンプルを計算するので $\omega \in \Omega$ から $X(\omega)$ を計算する手続きに時間が掛かる場合は、結局、シフト法の方が時間が掛かることも少なくない。しかし、たとえば $X(\omega)$ から $X(\theta^k \omega)$ が容易に計算されるような場合はシフト法が非常に有効となる。

定理 2.

$$\frac{1}{k} \leq \text{Eff}(X; k) \leq \infty \quad (6)$$

(証明) 注意 1 で述べたように、 $V_s(X; k) = 0$ となることがあるので $\text{Eff}(X) \leq \infty$ である。そこで $1/k \leq \text{Eff}(X; k)$ を示す。簡単のため X の平均は 0 とする。いつでも成り立つ不等式

$$(x_1 + \cdots + x_L)^2 \leq L(x_1^2 + \cdots + x_L^2)$$

を用いると、

$$\left(\frac{1}{NL} \sum_{n=1}^{NL} X(\theta^{kn} \omega) \right)^2 \leq \frac{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(\theta^{k((n-1)L+1)} \omega) \right)^2}{L} + \cdots + \frac{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(\theta^{knL} \omega) \right)^2}{L}$$

そこで

$$\sum_{i=1}^L \mathbf{E} \left[\frac{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(\theta^{k((n-1)L+i)} \omega) \right)^2}{L} \right] / \mathbf{E} \left[\left(\frac{1}{NL} \sum_{n=1}^{NL} X(\theta^{kn} \omega) \right)^2 \right] \geq 1.$$

ここで分子の各被積分関数は独立確率変数の和だから、 $N \rightarrow \infty$ とすれば、

$$\frac{LV(X)}{V_s(X; k)} \geq 1.$$

従って、 $1/k \leq \text{Eff}(X; k)$ が成り立つ。 □

4. ランダムウォークにおけるシフト法の explicit な評価

分散 $V_s(X; k)$ によってシフト法の誤差評価をすることができるとは言うものの、現実には (3) によって具体的な場合に $V_s(X; k)$ を explicit に求めることができるのはまったく例外的である。(そのような場合は恐らく X の平均そのものがサンプリングをしなくても explicit に求められるだろう。) そこで、どのような場合に分散 $V_s(X; k)$ が小さくなるのか、その傾向を定性的にでも考察することは意味がある。

式 (3) によれば、たとえば次の 3 つのことが分かる。

1. $X(\omega)$ と $X(\theta^{kn}\omega)$ の相関が ($\forall n$ にわたり) 十分小さい場合に $V_s(X; k)$ は小さくなる。
2. $X(\omega)$ と $X(\theta^k\omega)$ の負の強い相関を持つ場合に $V_s(X; k)$ は小さくなる。
3. 逆に、 $X(\omega)$ と $X(\theta^k\omega)$ が強い正の相関を持つ場合に $V_s(X; k)$ は大きくなる。

本稿では上の各場合についてランダムウォークに関わる 2、3 の確率変数を例として論じたい。

以下の各例において共通の記号を導入しよう。今までどおり、 $\Omega = \{0, 1\}^\infty$ 、 P を Ω 上の平均 $1/2$ の Bernoulli 確率測度とする。これからはもっぱら 1-bit シフト θ ばかりを考える。次に、 (Ω, P) 上の $\{-1, 1\}$ -値確率変数列 $\{r_i\}_{i=1}^\infty$ を

$$r_i(\omega) := 2\omega_i - 1, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega. \quad (7)$$

とする。このとき

$$r_i(\omega) = r_1(\theta^{i-1}\omega), \quad \omega \in \Omega \quad (8)$$

であることに注意する。 $\{r_i\}_{i=1}^\infty$ は i.i.d. である。

4.1. ランダムウォークの平均 (I)

L -ステップのランダムウォークを次で定義する。

$$S_L(\omega) := \sum_{i=1}^L r_i(\omega), \quad \omega \in \Omega. \quad (9)$$

このとき、 $\mathbf{E}[S_L] = 0$ 、 $V(S_L) = L$ である。一方、シフト法の分散を計算してみると、

$$\begin{aligned} V_s(S_L; 1) &= V(S_L) + 2 \sum_{n=1}^{L-1} \mathbf{E}[S_L(\theta^n \omega) S_L(\omega)] \\ &= L + 2 \sum_{n=1}^{L-1} \mathbf{E} \left[\sum_{j=1}^L r_{n+j} \sum_{l=1}^L r_l \right] \end{aligned}$$

ここで (8) を使った。 $\mathbf{E}[r_j r_i] = \delta_{ji}$ 、 δ_{ji} はクロネッカーのデルタ、なので

$$\begin{aligned} V_s(S_L; 1) &= L + 2 \sum_{n=1}^{L-1} (L-n) \\ &= L + 2 \times \frac{L(L-1)}{2} = L^2 \end{aligned}$$

となることが分かる。これより、シフト法の乱数利用効率 (5) より

$$\text{Eff}(X; 1) = 1$$

である。これは先の命題の (6) をみれば、最悪の乱数利用効率であることが分かる。

$S_L(\omega)$ と $S_L(\theta\omega)$ の相関係数は $1 - (1/L)$ であり L が大きいときはほとんど 1 に等しい。最悪の乱数利用効率となった理由はこの事実と関係が深い。

4.2. ランダムウォークの平均 (II)

次の例は同じく L -ステップのランダムウォークであるが、

$$\tilde{S}_L(\omega) := \sum_{i=1}^L (-1)^i r_i(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

で定義されるものである。ただし、ここでは L は偶数としておこう。

平均と分散はそれぞれ、 $\mathbf{E}[\tilde{S}_L] = 0$ 、 $V(\tilde{S}_L) = L$ で、前節の S_L の場合と同じであり、独立なランダムサンプリングにおける精度は S_L の場合とやはり同じである。ところが、シフト法では事情がまったく異なる。実際、シフト法の場合の分散は $V_s(\tilde{S}_L; 1) = 0$ となる。これは $\tilde{S}_L$ が (4) の形

$$\tilde{S}_L(\omega) = Y(\theta\omega) - Y(\omega), \quad Y(\omega) = \sum_{i=1}^{L/2} r_{2i-1}(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

で書かれることから分かる。従って $\text{Eff}(\tilde{S}_L; 1) = \infty$ であり非常に乱数利用効率が高い例であることが分かる。

$\tilde{S}_L(\omega)$ と $\tilde{S}_L(\theta\omega)$ の相関係数は $(1/L) - 1$ であり L が大きいときはほとんど -1 に等しいことに注意せよ。

4.3. ランダムウォークの分布の L^2 -収束

4.1. 節で定義したランダムウォーク $\{S_l(\omega)\}_{l \in \mathbb{N}}$ のパスはシフト θ に関してほとんど変化しない。Bouleau たちは、このように「パスとそれをシフトしたパスがパス空間で近接するようなシフト法の運用の仕方はよくない」、と述べている ([3], p.283)。確かに、パス空間で近接する 2 つのパスに対してほとんど同じ値を返すような確率変数 X (たとえば $X = S_L$) の場合、荒っぽく言い替えるとパス空間の位相に対して連続な確率変数の場合、 $X(\omega)$ と

$X(\theta\omega)$ が強い正の相関を持ってしまうから、シフト法の分散が大きくなってしまう。それで Bouleau たちの見解に従うならば、4.2. 節でのシフト法の運用の方が好ましいということになる。

しかし、一方ではパス空間で近接する 2 つのパスに対してもまったく違う値を返すような確率変数 X の場合、すなわちパス空間の位相に関して著しく不連続な確率変数の場合、 $X(\omega)$ と $X(\theta\omega)$ の相関が極めて小さくなることもあり得る。そして、そのような場合はシフト法の効率が良い。この節では、そのような例で explicit に分散が計算できるものを紹介しよう。

$S_L(\omega)$ を 4.1. 節で定義したランダムウォークとする (L は奇数であってもよい)。確率変数 $\mathbf{1}_{\{S_L=l\}}$ 、 $l = -L, \dots, L$ 、を次で定義する。

$$\mathbf{1}_{\{S_L=l\}}(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{if } S_L(\omega) = l, \\ 0, & \text{if } S_L(\omega) \neq l. \end{cases}$$

$\mathbf{1}_{\{S_L=l\}}$ はランダムウォークのパス空間の中で極めて不連続である。すなわち、 $\mathbf{1}_{\{S_L=l\}}(\omega)$ と $\mathbf{1}_{\{S_L=l\}}(\theta\omega)$ の相関は小さい。

さて、初めに平均と分散を計算しておこう。

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{S_L=l\}}] = P(S_L = l), \quad V(\mathbf{1}_{\{S_L=l\}}) = P(S_L = l) - P(S_L = l)^2 \quad (10)$$

これらは 2 項係数を用いていつでも explicit に計算できる。この確率変数にシフト法を適用したときの分散を explicit に求めることは難しいので次のよう量を求めることにしよう。まず、独立なランダムサンプリングに関して

$$v(L, N) := \mathbf{E} \left[\sum_{l=-L}^L \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\{S_L=l\}}(\theta^{(n-1)L}\omega) - P(S_L = l) \right)^2 \right]$$

と置く。 $\{\mathbf{1}_{\{S_L=l\}}(\theta^{(n-1)L}\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ が i.i.d. であることから、 $v(L, N)$ は L -ステップのランダムウォークの独立な N 個のサンプルの分布と理論上の分布の平均 2 乗誤差を表している。同様にシフト法に関して

$$v_s(L, N) := \mathbf{E} \left[\sum_{l=-L}^L \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\{S_L=l\}}(\theta^{n-1}\omega) - P(S_L = l) \right)^2 \right]$$

とすれば、 $v(L, N)$ は L -ステップのランダムウォークの N 個のサンプルをシフト法によって取ってきたとき、そのサンプル分布と理論上の分布の平均 2 乗誤差を表している。

定理 3.

$$v^*(L) := \lim_{N \rightarrow \infty} N v(L, N) = 1 - P(S_{2L} = 0) \quad (11)$$

$$v_s^*(L) := \lim_{N \rightarrow \infty} N v_s(L, N) = 1 - (2L - 1)P(S_{2L} = 0) + 2 \sum_{l=1}^{L-1} P(S_{2l} = 0) \quad (12)$$

証明は後で述べるとして定理 3 より、この場合のシフト法の乱数利用効率を (5) に倣って考えてみよう。(5) において $k=1$ としたものを参考にすれば良いから、

$$\text{Eff}^*(L) := \frac{L v^*(L)}{v_s^*(L)} = \frac{L(1 - P(S_{2K} = 0))}{1 - (2L-1)P(S_{2L} = 0) + 2 \sum_{l=1}^{L-1} P(S_{2l} = 0)}$$

が、今の場合のシフト法の独立なランダムサンプリングに対する乱数利用効率である。すなわち、 $v(L, N)$ と $V_s(L, N_s)$ がほぼ同じになるためには、後者のサンプリングにおける乱数の個数は前者のそれのおよそ $1/\text{Eff}^*(L)$ 程度で済む。実際に計算機で $\text{Eff}^*(L)$ を計算すると次のようになる。

表 1.

L	$v^*(L)$	$v_s^*(L)$	$\text{Eff}^*(L)$
50	0.9204108	7.0385130	6.5383893
100	0.9436515	10.3260443	9.1385578
150	0.9539725	12.8542818	11.1321562
200	0.9601307	14.9875901	12.8123426
250	0.9643354	16.8679874	14.2923890
300	0.9674401	18.5685187	15.6303270
350	0.9698536	20.1326497	16.8606097
400	0.9717993	21.5887327	18.0056763
450	0.9734112	22.9564775	19.0811093
500	0.9747750	24.2502432	20.0982517

上の表から分かるように、 $\text{Eff}^*(L)$ は L の増加関数であり、 $L=500$ では乱数利用効率が実に 20 倍を越える。

(定理 3 の証明) まず (11) を示そう。

$$\begin{aligned} v(L, N) &= \frac{1}{N} \sum_{l=-L}^L \mathbf{E} \left[\left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N (\mathbf{1}_{\{S_L=l\}}(\theta^{(n-1)L}\omega) - P(S_L=l)) \right\}^2 \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=-L}^L V(\mathbf{1}_{\{S_L=l\}}) = \frac{1}{N} \left(\sum_{l=-L}^L P(S_L=l) - \sum_{l=-L}^L P(S_L=l)^2 \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(1 - \sum_{l=-L}^L P(S_L=l)^2 \right) \end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{l=-L}^L P(S_L=l)^2 = \sum_{l=-L}^L P(S_L=l)P(S_{2L}-S_L=-l) = P(S_{2L}=0) \quad (13)$$

だから、

$$v(L, N) = \frac{1}{N} (1 - P(S_{2L} = 0))$$

これより (11) が従う。次に (12) を示そう。

$$v_s(L, N) = \frac{1}{N} \sum_{l=-L}^L \mathbf{E} \left[\left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N (\mathbf{1}_{\{S_L=l\}}(\theta^{n-1}\omega) - P(S_L = l)) \right\}^2 \right]$$

であるから、 $X(l; \omega) := \mathbf{1}_{\{S_L=l\}}(\omega) - P(S_L = l)$ と置けば定理 1 により、

$$\begin{aligned} v_s^*(L) &= \sum_{l=-L}^L V(X(l; \omega)) + 2 \sum_{l=-L}^L \sum_{i=1}^{L-1} \mathbf{E} [X(l; \theta^i \omega) X(l; \omega)] \\ &= Nv(L, N) + 2 \sum_{l=-L}^L \sum_{i=1}^{L-1} \mathbf{E} [\mathbf{1}_{\{S_L=l\}}(\theta^i \omega) \mathbf{1}_{\{S_L=l\}}(\omega)] - 2 \sum_{l=-L}^L \sum_{i=1}^{L-1} P(S_L = l)^2 \end{aligned}$$

ここで $Nv(L, N) = v_s(L) = 1 - P(S_{2L} = 0)$ と (13) より、

$$\begin{aligned} v_s^*(L) &= 1 - P(S_{2L} = 0) + 2 \sum_{l=-L}^L \sum_{i=1}^{L-1} P(S_L(\theta^i \omega) = l, S_L(\omega) = l) - 2 \sum_{i=1}^{L-1} P(S_{2L} = 0) \\ &= 1 - P(S_{2L} = 0) - 2(L-1)P(S_{2L} = 0) + 2 \sum_{i=1}^{L-1} P(S_L(\theta^i \omega) = S_L(\omega)) \\ &= 1 - (2L-1)P(S_{2L} = 0) + 2 \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{m=-i}^i P(S_i = m, S_{L+i} - S_L = m) \\ &= 1 - (2L-1)P(S_{2L} = 0) + 2 \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{m=-i}^i P(S_i = m)^2 \end{aligned}$$

ここで再び (13) を用いると、(12) が示される。 □

5. 数値実験

4.3. 節で述べたランダムウォークの分布の L^2 -収束を観測するための数値実験を行ったので報告する。なお、実験に用いた乱数は [6][7] で紹介された無理数回転を利用する方法で生成した。

ランダムウォークのステップ数は $L = 500$ とした。図 1.A. は独立なランダムサンプリングでサンプル数を 2,000 としたときの相対度数分布を示す。図 1.B. はシフト法によるサンプリングでサンプル数は 1,000,000 としたときの相対度数分布である。これらの実験に要した乱数は前者が 1,000,000 bit、後者が 1,000,499 bit とほぼ同量であることに注意されたい。シフト法の方がずっと滑らかな正規分布の形を呈していて 4.3. 節で述べたとおり、分布の平均 2 乗誤差はシフト法がはるかに小さい。しかし、明かに山の頂上が右側にずれている。これは 4.1. 節で述べたとおり、ランダムウォークの平均の揺らぎは独立なランダムサンプリングとシフト法が同程度であることに由来している。

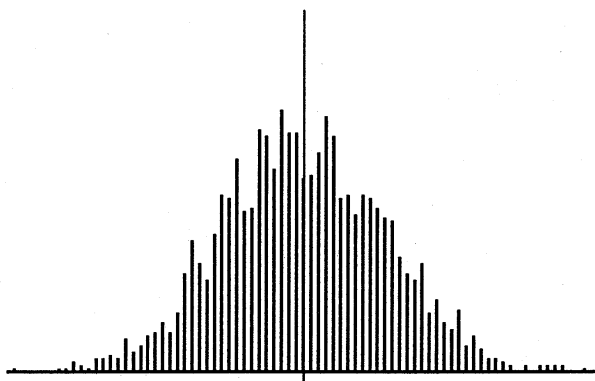


図 1.A. 独立なランダムサンプリング (サンプル数: 2,000 使用乱数: 1,000,000)

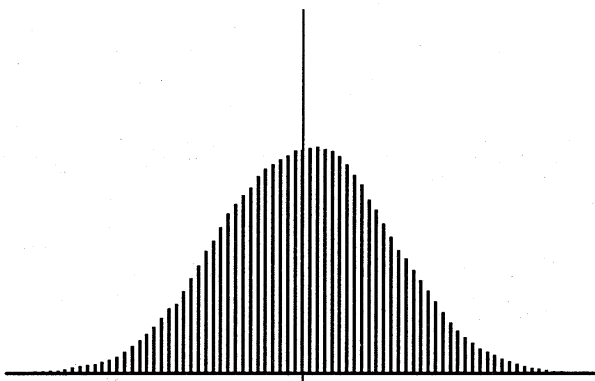


図 1.B. シフト法 (サンプル数: 1,000,000 使用乱数: 1,000,499)

図 2.A. と図 2.B. はそれぞれ図 1.A. と図 1.B. のサンプル数を (従って乱数の使用量も) 10 倍にしたときの相対度数分布である。図 2.B. では分布がほぼ理論的な分布に収束している。実は $S_L(\omega)$ から $S_L(\theta\omega)$ を計算するのがとても容易なので乱数の使用量が同じならシフト法の方がずっと早く計算できる。そのうえ分布の収束は非常に早い。

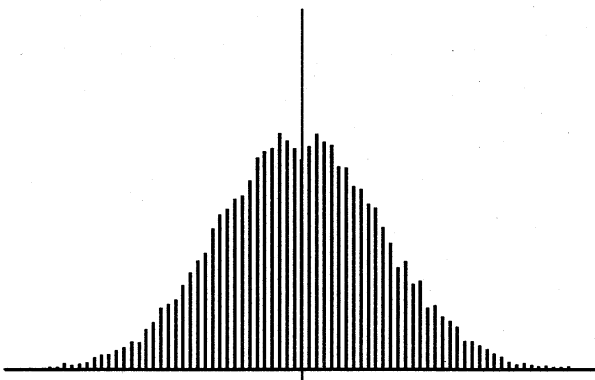


図 2.A. 独立なランダムサンプリング (サンプル数: 20,000 使用乱数: 10,000,000)

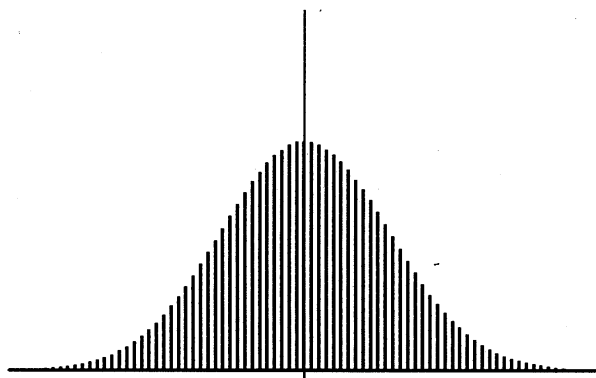


図 2.B. シフト法 (サンプル数: 10,000,000 使用乱数: 10,000,499)

6. 参考文献

- [1] N.Bouleau, On effective computation of expectations in large or infinite dimension, *J. Comput. Appl. Math.* **31**, 23-34 (1990)
- [2] N.Bouleau, On numerical integration by the shift and application to Wiener space, *Acta Appl. Math.* **25**, 201-220 (1991)
- [3] N.Bouleau and D.Lépinle, *Numerical methods for stochastic processes*, John Wiley & Sons, (1994)
- [4] R.Fortet, Sur une suite également réartie, *Studia Math.* **9**, 54-69 (1940)
- [5] M.Kac, On the distribution of values of sums of type $\sum f(2^k t)$. *Ann. Math.* **47**, 33-49 (1946)
- [6] H.Sugita, Pseudo-random number generator by means of irrational rotation, *Monte Carlo Method and Applications*, Vol.1-1, 35-57(1994)
- [7] 杉田洋、「無理数回転による擬似乱数生成」、数理解析研究所講究録 915、数値計算アルゴリズムの現状と展望 II、(1995)
- [8] P.Walter, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer, (1981)

杉田 洋
 九州大学大学院数理学研究科
 810 福岡市中央区六本松 4-2-1
 E-mail: sugita@math.kyushu-u.ac.jp