

格子凸体とハミルトン系

早稲田大学理工学部 岩尾昌央* (Masataka Iwao)

概要

格子凸多角形によってパラメトライズされたハミルトニアンに対して、正準方程式の離散化を考える。これらに対しては、両立条件を用いる離散化の手法が適用可能である。これらの離散化されたハミルトン系は、さらに超離散化可能な形にもなっている。超離散化されたハミルトン系については、もとの凸多角形の極集合をとる操作を通じて一般解が構成できる。

1 始めに

非解析的極限 [3, 1]

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log \left(\exp \left[\frac{U}{\epsilon} \right] + \exp \left[\frac{V}{\epsilon} \right] + \cdots + \exp \left[\frac{W}{\epsilon} \right] \right) = \max(U, V, \dots, W) \quad (1)$$

がソリトン理論に導入されて以来、多くのソリトン方程式がソリトンセルオートマトンと対応付けられている [2, 4]。現在では、この公式 (1) は超離散極限と呼ばれる。この極限によって全独立変数が離散化された方程式の従属変数が離散変数に変換されるためである。

この稿では超離散極限を自由度 1 のハミルトン系

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q} \quad (2)$$

に適用することを考えたい。そもそもハミルトン系の独立変数 t の離散化自体、完成された理論があるわけではないので、この試みは一般的にはうまくいかない。ところが不思議なことに、次の形のハミルトニアンを選ぶと、離散化から超離散化まで一気に行うことが出来る。

$$H(Q, P) = \epsilon \log \left(\sum_{(j,k)} a_{(j,k)} \exp \left[\frac{jQ + kP}{\epsilon} \right] \right), \quad (3)$$

ここで $\epsilon > 0$ はパラメータ。また重み定数 $a_{(j,k)}$ は凸多角形に依存する定数。具体的には次のように選ぶ。(同様なパターンでいろいろ試してみたが、失敗例が見つからない。しかし一般にこの形のハミルトニアンで失敗しないのかどうか、まだよく分からない)

* 日本学術振興会特別研究員, e-mail: iwao@kurenai.waseda.jp

1.1 多角形 Γ に対応するハミルトニアン

Γ を次の条件を満たす凸多角形とする.

- 全ての頂点 $\in \mathbb{Z}^2$,
- 原点 $(0,0)$ を唯一の内点として持つ.

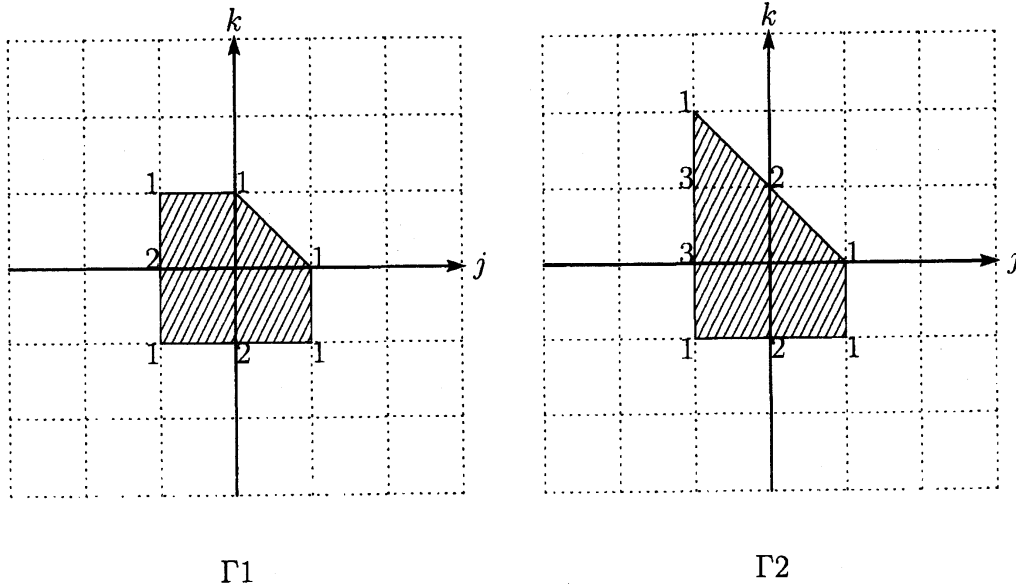


図 1: Γ_1 と Γ_2 . 重み定数がふつてある.

図 1 は, このような多角形の例で, 辺の上の格子点に重み定数を付けている. 以降, この Γ_1 と Γ_2 の例を用いて話を進める. Γ_1 と Γ_2 を, 次のハミルトニアンに対応させる.

$$H_{\Gamma_1}(Q, P) = \epsilon \log \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot \exp[(1, 0) \cdot (Q, P)/\epsilon] \\ + 1 \cdot \exp[(1, -1) \cdot (Q, P)/\epsilon] \\ + 2 \cdot \exp[(0, -1) \cdot (Q, P)/\epsilon] \\ + 1 \cdot \exp[(-1, -1) \cdot (Q, P)/\epsilon] \\ + 2 \cdot \exp[(-1, 0) \cdot (Q, P)/\epsilon] \\ + 1 \cdot \exp[(-1, 1) \cdot (Q, P)/\epsilon] \\ + 1 \cdot \exp[(0, 1) \cdot (Q, P)/\epsilon] \end{array} \right\}, \quad (4)$$

$$H_{\Gamma_2}(Q, P) = \epsilon \log \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot \exp[(1, 0) \cdot (Q, P)/\epsilon] \\ + 1 \cdot \exp[(1, -1) \cdot (Q, P)/\epsilon] \\ + 2 \cdot \exp[(0, -1) \cdot (Q, P)/\epsilon] \\ + 1 \cdot \exp[(-1, -1) \cdot (Q, P)/\epsilon] \\ + 3 \cdot \exp[(-1, 0) \cdot (Q, P)/\epsilon] \\ + 3 \cdot \exp[(-1, 1) \cdot (Q, P)/\epsilon] \\ + 1 \cdot \exp[(-1, 2) \cdot (Q, P)/\epsilon] \\ + 2 \cdot \exp[(0, 1) \cdot (Q, P)/\epsilon] \end{array} \right\}. \quad (5)$$

注意すべき点として、重み定数は任意に置き換えることは出来ないが、ある程度自由なパラメータに置き換えることは出来るようである。一般の Γ に対してどのように重み定数を取るべきなのか分からないが、筆者が試したところでは、2項定数をそのまま多角形の辺上の格子点に配置するとうまくいく。メカニズムは不明なので今後の研究課題である。その他の例は次の章に幾つか与えておいた。

なぜなのかは分からないが、とにかくこのようにすると今のところ反例なく上手くいく。

2 独立変数 t の離散化

このようなハミルトン系について独立変数 t を厳密に離散化できる。

キーポイントは次の命題である。証明は簡単だが記述が煩雑になるため省略する。

命題 E_δ を $E_\delta\phi(t) = \phi(t + \delta)$ で定義しておく。ここで δ は実数パラメータ。次を仮定する。(我々の例ではこれらは満たされる)

1. $H(Q, P)$ は $(Q, P) \in \mathbf{R}^2$ 全域で狭義凸関数として与えられていて最小値を持つ。
2. $F(Q, P)$ と $G(Q, P)$ は δ を陽に関数形に含まない形で与えられていて、偏微分可能である。

このとき次の二つの条件が等価になる。

1. ある定数 δ が存在して、ハミルトン系

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q},$$

の一般解が離散力学系

$$E_\delta Q = F(Q, P), \quad E_\delta P = G(Q, P).$$

をも同時に満たすこと。

2. 両立条件。上のハミルトン系と離散力学系に関して、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} E_\delta Q = E_\delta \frac{d}{dt} Q, \\ \frac{d}{dt} E_\delta P = E_\delta \frac{d}{dt} P, \\ E_\delta H(Q, P) = H(Q, P). \end{array} \right. \quad (6)$$

が成り立つこと。

□

つまりハミルトニアンを与えた時、両立条件 (6) を解いて離散力学系を求めれば、一般解を保つ離散化が出来たことになる。

両立条件 (6) を我々のハミルトン系に都合が良い形に等価変形しておく。従属変数変換 $(Q, P, H, F, G) \mapsto (q, p, h, f, g)$:

$$\begin{cases} q = \exp[Q/\epsilon], \\ p = \exp[P/\epsilon], \\ h(q, p) = \exp[H(Q, P)/\epsilon], \\ f(q, p) = \exp[F(Q, P)/\epsilon], \\ g(q, p) = \exp[G(Q, P)/\epsilon], \end{cases} \quad (7)$$

により式 (6) は未知関数 $f(q, p)$, $g(q, p)$ に関する次の非線形偏微分方程式になる。

$$\begin{cases} \xi(q, p) \frac{\partial f}{\partial q} + \eta(q, p) \frac{\partial f}{\partial p} = \xi(f, g), \\ \xi(q, p) \frac{\partial g}{\partial q} + \eta(q, p) \frac{\partial g}{\partial p} = \eta(f, g), \\ h(q, p) = h(f, g). \end{cases} \quad (8)$$

ここで関数 ξ and η は次で定義した。

$$\begin{aligned} \xi(q, p) &= qp \frac{\partial h(q, p)}{\partial p}, \\ \eta(q, p) &= -qp \frac{\partial h(q, p)}{\partial q}. \end{aligned}$$

予想 ハミルトニアンを前節のように設定すると、どのような多角形 Γ に対しても、この非線形偏微分方程式 (8) は必ず非自明な有理解を持ち、しかもその有理式に現れる係数は全て非負になる。□

Γ は、いわゆる $h_\Gamma(q, p)$ のニュートン多角形である。

2.1 離散化, Γ_1 の場合

変数変換 (7) により式 (4) は

$$h_{\Gamma_1}(q, p) = q + \frac{q}{p} + \frac{2}{p} + \frac{1}{qp} + \frac{2}{q} + \frac{p}{q} + p,$$

となり、定義から次の関数を得る。

$$\xi_{\Gamma_1}(q, p) = qp \frac{\partial h_{\Gamma_1}}{\partial p}, \quad \eta_{\Gamma_1}(q, p) = -qp \frac{\partial h_{\Gamma_1}}{\partial q}.$$

この ξ_{Γ_1} と η_{Γ_1} について方程式 (8) は、

$$\begin{cases} \xi_{\Gamma_1}(q, p) \frac{\partial f}{\partial q} + \eta_{\Gamma_1}(q, p) \frac{\partial f}{\partial p} = \xi_{\Gamma_1}(f, g), \\ \xi_{\Gamma_1}(q, p) \frac{\partial g}{\partial q} + \eta_{\Gamma_1}(q, p) \frac{\partial g}{\partial p} = \eta_{\Gamma_1}(f, g), \\ h_{\Gamma_1}(q, p) = h_{\Gamma_1}(f, g). \end{cases}$$

この偏微分方程式は次の厳密解を持つ.

$$f = p, \quad g = \frac{p+1}{q}.$$

従って次の有理写像の力学系が得られる.

$$E_\delta q = p, \quad E_\delta p = \frac{p+1}{q}.$$

これは式 (7) により離散力学系

$$E_\delta Q = P, \quad E_\delta P = \epsilon \log(\exp[P/\epsilon] + 1) - Q,$$

に変換されるが, これは命題により δ を適当に選べばハミルトン系の一般解を共有する.

2.2 離散化, Γ_2 の場合

同様に式 (7) により式 (5) は

$$h_{\Gamma_2}(q, p) = q + \frac{q}{p} + \frac{2}{p} + \frac{1}{qp} + \frac{3}{q} + \frac{3p}{q} + \frac{p^2}{q} + 2p,$$

になり, 次が得られる.

$$\xi_{\Gamma_2}(q, p) = qp \frac{\partial h_{\Gamma_2}}{\partial p}, \quad \eta_{\Gamma_2}(q, p) = -qp \frac{\partial h_{\Gamma_2}}{\partial q}.$$

この ξ_{Γ_2} and η_{Γ_2} について方程式 (8) は,

$$\begin{cases} \xi_{\Gamma_2}(q, p) \frac{\partial f}{\partial q} + \eta_{\Gamma_2}(q, p) \frac{\partial f}{\partial p} = \xi_{\Gamma_2}(f, g), \\ \xi_{\Gamma_2}(q, p) \frac{\partial g}{\partial q} + \eta_{\Gamma_2}(q, p) \frac{\partial g}{\partial p} = \eta_{\Gamma_2}(f, g), \\ h_{\Gamma_2}(q, p) = h_{\Gamma_2}(f, g). \end{cases}$$

この方程式に次の厳密解が存在する.

$$f = \frac{p(q+p+1)}{q}, \quad g = \frac{p+1}{q}.$$

有理写像

$$E_\delta q = \frac{p(q+p+1)}{q}, \quad E_\delta p = \frac{p+1}{q},$$

を式 (7) で変数変換して離散力学系

$$E_\delta Q = P + \epsilon \log(\exp[Q/\epsilon] + \exp[P/\epsilon] + 1) - Q, \quad E_\delta P = \epsilon \log(\exp[P/\epsilon] + 1) - Q,$$

を得る.

2.3 偏微分方程式の厳密解, その他の例

他の例を列挙する. h_Γ と対応する偏微分方程式の厳密解を 1 組ずつ挙げておく. 他にも h_Γ を換えれば, たくさんの例が作れる.

- $h_{\Gamma 3} = q + qp^{-1} + p^{-1} + q^{-1}p + p.$

$$f = \frac{p}{q(q+p+1)}, \quad g = \frac{1}{q+p}.$$

- $h_{\Gamma 4} = qp + 2p^{-1} + q^{-1}p^{-3} + 4q^{-1}p^{-2} + 6q^{-1}p^{-1} + 4q^{-1} + q^{-1}p + 2p.$

$$f = \frac{p(qp^2 + (p+1)^2)^2}{(p+1)^4}, \quad g = \frac{(p+1)^2}{qp^2}.$$

- $h_{\Gamma 5} = q + qp^{-1} + 2p^{-1} + q^{-1}p^{-1} + q^{-1} + p.$

$$f = \frac{qp}{q+1}, \quad g = \frac{qp+q+1}{q(q+1)}.$$

- $h_{\Gamma 6} = q + p^{-1} + q^{-1} + qp.$

$$f = \frac{p}{qp+1}, \quad g = \frac{1}{qp}.$$

- $h_{\Gamma 7} = qp + p^{-1} + q^{-1}p^{-1} + p + qp^2.$

$$f = qp^2(p+1), \quad g = \frac{1}{qp(p+1)}.$$

これらの例に対しても以下の議論が適用できるが, 省略する. (以下の議論をよく考えれば, これらの解が線形代数の知識だけで構成できる)

3 超離散極限

超離散極限 $\epsilon \rightarrow +0$ を適用しよう. 公式 (1) により式 (4) と式 (5) は

$$H_{\Gamma 1}(Q, P) = \max(Q, Q-P, -P, -Q-P, -Q, -Q+P, P),$$

$$H_{\Gamma 2}(Q, P) = \max(Q, Q-P, -P, -Q-P, -Q, -Q+P, -Q+2P, P),$$

as $\epsilon \rightarrow +0$.

また, 我々が前節で得た離散力学系は

for $H_{\Gamma 1}(Q, P)$,

$$\begin{cases} E_\delta Q = P, \\ E_\delta P = \max(P, 0) - Q; \end{cases}$$

and for $H_{\Gamma 2}(Q, P)$,

$$\begin{cases} E_\delta Q = P + \max(Q, P, 0) - Q, \\ E_\delta P = \max(P, 0) - Q, \end{cases}$$

as $\epsilon \rightarrow +0$.

3.1 Γ の極集合

超離散極限での我々の力学系に対して、一般解を構成する手順を述べる。まず Γ に対する「極集合 (polar set)」[5] を次の手続きにより構成する。(ただし、この手続きは Γ が特殊な条件付きの多角形であるため適用可能であり、一般の多角形に対する極集合の概念はもっと抽象的な定義である)

1. $\Gamma(h_i)$ の各頂点には隣接して2つの辺が存在する。それらに対して外向きの2つの法線ベクトルを考える。法線ベクトルの始点にその頂点を取り、終点に頂点から最も近い格子点をとる。
2. それぞれの頂点について、そのような2つの法線ベクトルを2辺とする3角形を作図する。
3. 全ての頂点に対する3角形たちを、それらを張っているベクトルの始点が原点と一致するように、平行移動する。これらの3角形たちの合併集合を Γ^Δ とする。

これにより得られる Γ^Δ が、抽象的に定義される極集合と一致することを示すためには、よく知られた「整数が互いに素であるための必要十分条件」を使う。記述が煩雑なので証明は略す。

Γ_1 と Γ_2 に対する極集合の作図を図2に示す。

ここで次の公式が成り立つ。どのような Γ に対しても

$$\{(Q, P) | H_\Gamma(Q, P) = 1\} = \text{the boundary of } \Gamma^\Delta.$$

この公式は極集合の通常の抽象的な定義から自然に従う。左辺は超離散化されたハミルトニアン²の等高線で、右辺は極集合 Γ^Δ の境界である。

さらに、超離散化されたハミルトニアン²の等高線は相似な図形になる。すなわち $H_\Gamma(\lambda Q, \lambda P) = \lambda H_\Gamma(Q, P) = \lambda$ が任意の Γ と $\lambda \geq 0$ に対して常に成り立つ。

以上により、超離散化されたハミルトニアン²の任意の等高線を描くための手続きが得られた。

3.2 超離散化された力学系の一般解

公式 (9) を $\mathbb{Z}^2$ に制限する:

$$\{(Q, P) \in \mathbb{Z}^2 | H_\Gamma(Q, P) = 1\} = \partial\Gamma^\Delta \cap \mathbb{Z}^2.$$

この公式により超離散化された力学系の一般解を見つけることが出来る。具体的には次のようにする。

まず Γ_1 に対する超離散化された力学系

$$\begin{cases} E_\delta Q = P, \\ E_\delta P = \max(P, 0) - Q, \end{cases}$$

が次の集合上の置換を引き起こすことに注意する.

$$\begin{aligned}\{(Q, P) \in \mathbf{Z}^2 | H_{\Gamma 1}(Q, P) = 1\} &= \partial \Gamma 1^\Delta \cap \mathbf{Z}^2 \\ &= \{(1, 0), (0, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 1)\}.\end{aligned}$$

実際計算してみると

$$(1, 0) \mapsto (0, -1) \mapsto (-1, 0) \mapsto (0, 1) \mapsto (1, 1) \mapsto (1, 0),$$

となる. さて, $\Phi(Q_0, P_0)$ により $\Gamma 1$ に対する我々の力学系の 1 つの周期解を表すことにする. ここで (Q_0, P_0) は集合 $\partial \Gamma 1^\Delta \cap \mathbf{Z}^2$ から選んだ初期値とする. 例えば

$$\Phi(1, 0) = \begin{cases} (1, 0), & t/\delta \equiv 0 \pmod{5}, \\ (0, -1), & t/\delta \equiv 1 \pmod{5}, \\ (-1, 0), & t/\delta \equiv 2 \pmod{5}, \\ (0, 1), & t/\delta \equiv 3 \pmod{5}, \\ (1, 1), & t/\delta \equiv 4 \pmod{5}. \end{cases}$$

すると $\Gamma 1$ に対する我々の力学系の一般解は次のように表示される.

$$\mu \Phi(Q_0, P_0) + \nu E_\delta \Phi(Q_0, P_0), \quad (9)$$

for arbitrary $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$ and $(Q_0, P_0) \in \partial \Gamma 1^\Delta \cap \mathbf{Z}^2$.

同様に $\Gamma 2$ の場合を考えよう. 超離散化された力学系は

$$\begin{cases} E_\delta Q = P + \max(Q, P, 0) - Q, \\ E_\delta P = \max(P, 0) - Q, \end{cases}$$

は次の集合上の置換を引き起こす.

$$\begin{aligned}\{(Q, P) \in \mathbf{Z}^2 | H_{\Gamma 2}(Q, P) = 1\} &= \partial \Gamma 2^\Delta \cap \mathbf{Z}^2 \\ &= \{(1, 0), (0, -1), (-1, 0), (1, 1)\}.\end{aligned}$$

実際次のようになる.

$$(1, 0) \mapsto (0, -1) \mapsto (-1, 0) \mapsto (1, 1) \mapsto (1, 0).$$

ここで $\Psi(Q_0, P_0)$ を一つの周期解とする. ただし初期値 (Q_0, P_0) は $\partial \Gamma 2^\Delta \cap \mathbf{Z}^2$ から選ぶ. 例えば

$$\Psi(1, 0) = \begin{cases} (1, 0), & t/\delta \equiv 0 \pmod{4}, \\ (0, -1), & t/\delta \equiv 1 \pmod{4}, \\ (-1, 0), & t/\delta \equiv 2 \pmod{4}, \\ (1, 1), & t/\delta \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

すると一般解は次のように表示できる:

$$\mu \Psi(Q_0, P_0) + \nu E_\delta \Psi(Q_0, P_0), \quad (10)$$

for arbitrary $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$ and $(Q_0, P_0) \in \partial \Gamma 2^\Delta \cap \mathbf{Z}^2$.

式 (9) と式 (10) は全く同じ形式になっている. 他の $\Gamma 3, \Gamma 4, \dots$, 等の例に対しても同様の形式に一般解を書き下すことが出来る.

4 まとめ

格子凸多角形によってパラメトライズされたハミルトニアンに対して、正準方程式の離散化を考えた。これらに対しては、両立条件を用いる離散化の手法が適用可能である。これらの離散化されたハミルトン系は、さらに超離散化可能な形にもなっている。超離散化されたハミルトン系については、もとの凸多角形の極集合をとる操作を通じて一般解が構成できる。

参考文献

- [1] R. Hirota, M. Iwao, A. Ramani, D. Takahashi, B. Grammaticos and Y. Ohta, "From Integrability to Chaos in a Lotka-Volterra Cellular Automaton", *Phys. Lett. A* **236** (1997) 39-44.
- [2] D. Takahashi and J. Satsuma, "A Soliton Cellular Automaton", *J. Phys. Soc. JPN.* **59** (1990) 3514-3519.
- [3] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, "From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through Limiting Procedure", *Phys. Rev. Lett.* Vol. **76** (1996) 3247-3250.
- [4] S. Wolfram, *Cellular Automata and Complexity* (Addison-Wesley, 1994).
- [5] Günter M. Ziegler, *Lectures on Polytopes* (Springer-Verlag New York, 1995).

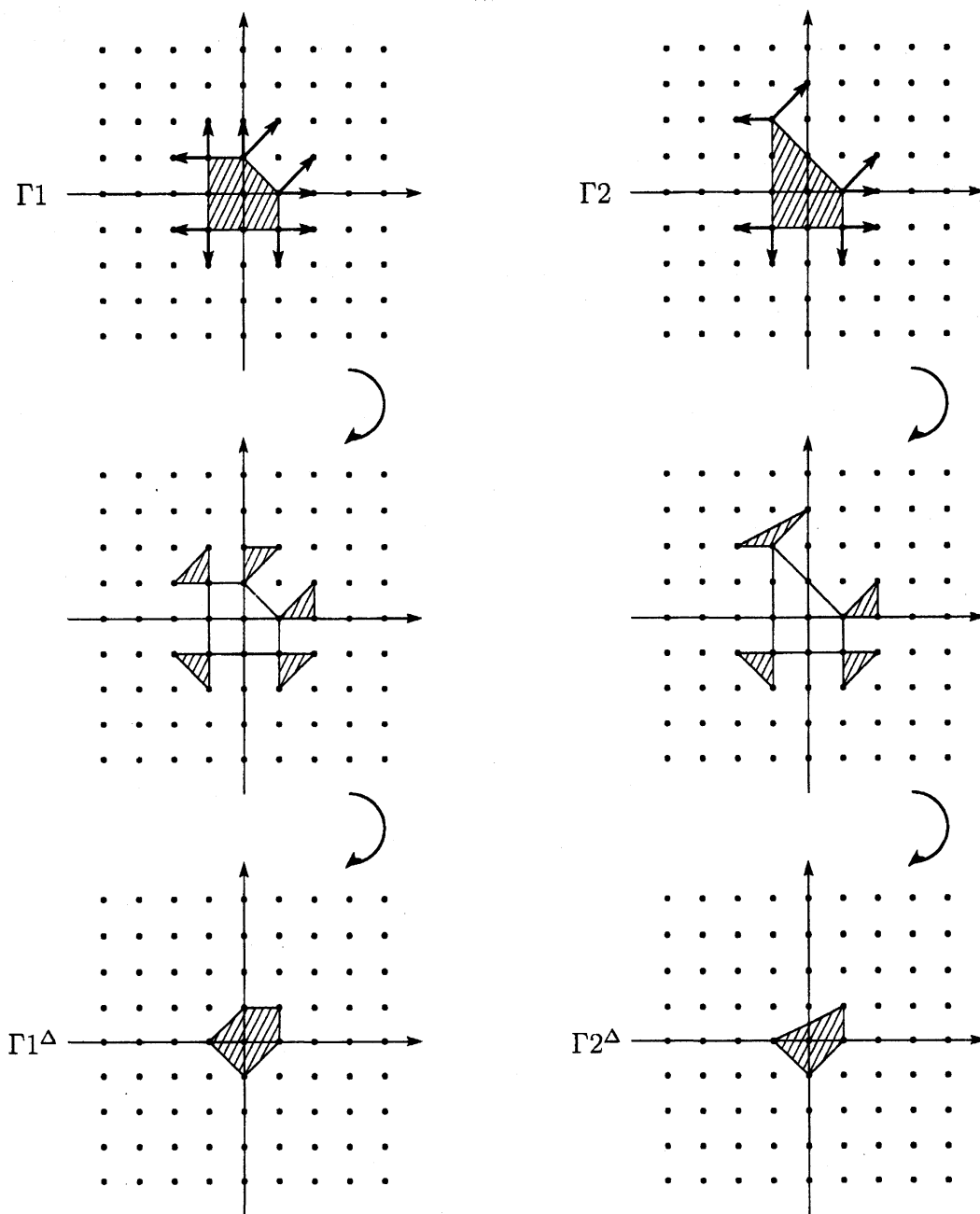


図 2: 極集合 Γ^Δ の作図.