

多次元経数を持つ正規定常過程

のマルコフ性 (II)

阪大 理 小谷 真一

§ 1 序

前回の報告 [1] では多次元^数経正規定常過程がマルコフ性をもつための一つの十分条件を与えた。この報告ではその延長線上にある2つの問題について述べる。

一つはこの定常過程の spectral density Δ に関する制限を設けることにより、マルコフ性と Δ^{-1} が *infra exponential type* の entire function になることが同値であることを示すことであるが、これは [2] の要約である。方法は $Z(L^2(\Delta))$ の元の Fourier 変換とある *Ultradistribution* の空間で実現することにある。

他の一つは Process がマルコフの場合の Prediction と境界値問題との関係についての話である。

ここでマルコフ性の定義を与えておこう。

$\mathbb{R}^d$ 次元経数と確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の正規定常過程を $X =$

$(X(x, \omega) : x \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega)$ とする。

即ち, ① $X: \mathbb{R}^d \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 可測関数

$$\textcircled{2} (\text{平均 } 0) \quad \int_{\Omega} X(x, \omega) dP(\omega) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

以後簡単のため $X(x) \equiv X(x, \omega)$ とかく。

$$\textcircled{3} (\text{正規}) \quad X \text{ の correlation } R \text{ は } R(x, y) = \int_{\Omega} X(x) X(y) dP$$

とし, $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$P((X(x_1), \dots, X(x_n)) \in E) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \det v} \int_E e^{-\frac{1}{2} x v^{-1} x} dx$$

但し $v = (R(x_i, x_j))$, E は $\mathbb{R}^d$ の Borel set である。

④ (定常性)

$$R(x, y) = R(x - y)$$

をみたす Process のことである。 R は定義より non-negative definite であるから連続性があるならば Bochner の定理より測度 $d\sigma$ の Fourier 変換で表わされるが, ここではさき $d\sigma$ が density Δ とおって後述する。

$$\text{即ち} \quad d\sigma(\lambda) = \Delta(\lambda) d\lambda.$$

次に $\mathcal{B}$ の sub σ -fields を導入するが, G は $\mathbb{R}^d$ の開集合, $\mathcal{D}$ は $\mathbb{R}^d$ の有界開集合を表わすものとする。 $\mathcal{B}(G) = \sigma(X(x) : x \in G)$
 $\equiv \{ (X(x) : x \in G) \text{ をすべて可測にする最小の } \sigma\text{-field} \}$ と
 して, $\mathcal{D}$ に対し $\mathcal{B}_+(\mathcal{D}), \mathcal{B}(\mathcal{D})$ と次のように定める。

$$B_+(D) = \bigcap_{G \supset D^c} B(G)$$

$$B_-(D) = \bigcap_{G \supset D} B(G)$$

$$\partial B(D) = \bigcap_{G \supset \partial D} B(G)$$

このとき X の $\mathcal{D}_G$ -2ルコフ性の定義は次のようになる。

Def. 1 (McKean [3])

X が $\mathcal{D}_G$ -2ルコフ

$$\Leftrightarrow B_-(D) \perp_{\partial B(D)} B_+(D), \quad \forall D \text{ (有界)}$$

$$\left(\Leftrightarrow_{i.e} P(B_- \cap B_+ | \partial B(D)) = P(B_- | \partial B(D)) P(B_+ | \partial B(D)) \right)$$

$$\quad \forall B_{\pm} \in B_{\pm}(D), \quad \forall D \text{ (有界)}$$

X が正規定常の場合は, この定義を関数空間の言葉で言いかえることができる。 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{R}$ と両生極にもつ (Complex) Hilbert空間, $Z = L^2(\Delta)$ とするとき, G に対して $B(G)$ に対応する, $\mathcal{H}(G) = \mathcal{L}_{\mathcal{H}}(R(\cdot - x) : x \in G)$, $Z(G) = \mathcal{L}_Z(e^{i \cdot x} : x \in G)$ を導入して, $\mathcal{H}_{\pm}(D)$, $\partial \mathcal{H}(D)$, $Z_{\pm}(D)$, $\partial Z(D)$ とそれぞれ定めると, 次の補題が成り立つ。

Lem. 2

X が $\mathcal{D}_G$ -2ルコフ

$$\Leftrightarrow \partial \mathcal{H}(D) = P_{\partial \mathcal{H}(D)} \mathcal{H}_+(D) \quad \forall D$$

$$\iff \partial Z(D) = P_{Z^-(D)} Z_+(D) \quad \forall D$$

但し $P_{\mathcal{H}^-(D)}, P_{Z^-(D)}$ は $\mathcal{H}^-(D), Z^-(D)$ の projection と表わす。

$\mathcal{H}$ と Z は次の対応で unitary 同型であることに注意しておく。

$$\mathcal{H}(G) \longleftrightarrow Z(G)$$

$$(1.1) \quad \circ \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\lambda \cdot x} f(\lambda) \Delta(\lambda) d\lambda$$

$$\circ \quad \|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 \Delta(\lambda) d\lambda$$

以後 φ の Fourier 変換 $\hat{\varphi}$ は次のように定義する。

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\lambda \cdot x} \varphi(x) dx$$

§.2 マルコフ性の Δ による特徴付け。

この § は [2] の要約である。 Δ に対して次の制限を設ける。

(*) 非負単調増大連続関数 T で積分の収束条件 $\int \frac{T(p)}{p^2} dp$

$< +\infty$ とみたすものがあリ、 Δ は次の条件とみたす。

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{\Delta(x)} \leq C e^{T(|x|)} \quad |x| \text{ 十分大}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{\Delta} \in L'_{loc}(\mathbb{R}^d)$$

この T に関する 2 は次の補題が成り立つ。

Lem. 3 (M. C. Roumieu [4])

T が非負単調増大連続関数で $\int \frac{T(p)}{p^2} dp < +\infty$ ならば, 正の単調増大列 $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$ に対して条件をみたすものが存在する。

$$\textcircled{1} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{k-1}}{M_k} < +\infty$$

$$\textcircled{2} \quad M_{k-1} M_{k+1} \leq M_k^2 \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\textcircled{3} \quad \forall h > 0 \quad \kappa(h) < 2$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \{M(p/h) - (T(p) + \sqrt{p})\} = +\infty$$

$$(\text{但し } M(p) = \sup_{p_k \geq 0} \frac{p_k M_0}{M_k})$$

M を使って定義される support compact の Ultra-differentiable の test function の空間を $\mathcal{D}_M$ とする。 $\mathcal{D}_M$ 又は $\mathcal{D}_M'$ に関する H. Komatsu [5] に要約してある。(但し $\mathcal{D}_M$ は Roumieu type.)

Lem. 4

$\mathcal{D}_M$ は $\mathcal{H}$ の dense な subset で injection は連続である。

$f \in \mathcal{Z}$ に対して $\hat{f} \in \mathcal{H}'$ を次のように定義する。

22

$u \in \mathcal{H}$ とすると $(1, 1)$ より $\exists g \in \mathcal{Z}$, $u = \hat{g} \Delta$ となる。この g を使って

$$\langle \hat{f}, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda) g(\lambda) \Delta(\lambda) d\lambda$$

と定義する。 $|\langle \hat{f}, u \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 = \|f\|_2 \|u\|_{\mathcal{H}}$ であるから、

$\hat{f} \in \mathcal{H}'$ となるのである。

Lemma 4 より $\mathcal{H}' \subset \mathcal{M}'$ (injection 連続) となる。 $\hat{f}$ は $\mathcal{M}'$ の元とみなすことにより次の定理が成り立つ。

Th. 5

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{Z}-(D) = \{f \in \mathcal{Z} \mid \text{supp } \hat{f} \subset D\} \quad \forall D \text{ (有界)}$$

(注: Paley-Wiener の定理より $\mathcal{Z}-(D)$ の元はとくに entire function である。)

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{Z}-(D) \text{ は 2 変数として連続な再生核をもつ。}$$

Th. 6

$\mathcal{X}$ が $\mathcal{O}_0$ -コルコフ

$$\Leftrightarrow \Delta^{-1} = P \quad P: \text{infra exponential type の entire function.}$$

(1) で Th. 6 の片方に相当する「 $\Delta^{-1} = P$ ならば $\mathcal{X}$ は $\mathcal{O}_0$ -コルコフである。」を示したが、そのときの主要な補題が今の場合 Th. 5 になる。制約 $(*)$ を設けて *Ultradistribution* と使う

たのは、定理 5 を示すとき Σ を位相と sheaf-property をもった関数空間に埋め込む必要があったからであるが、定理 6 の必要条件も容易に示せるからでもある。

§ 3. Prediction と境界値問題についての一考察.

(X が 2 次元の場合。)

この § では X は 2 次元で、 Δ は条件 (A) をみたしているとする。

$u \in \mathcal{H}$ に対して $H_{\partial D}(x, u) = (P_{\partial \mathcal{H}(D)} u)(x)$ とおく。

$\mathcal{H}$ の元は連続関数であるから右辺は意味がある。

Lem. 7

- ① $H_{\partial D}(x, \cdot) \in \mathcal{H}'$
- ② $\text{supp } H_{\partial D}(x, \cdot) \subset \partial D$ ($\mathcal{H}'$ の元としての support.)

「証明」 ① $u \in \mathcal{H}$ とすると

$$\begin{aligned}
 |H_{\partial D}(x, u)| &= |(P_{\partial \mathcal{H}(D)} u)(x)| \\
 &= |(P_{\partial \mathcal{H}(D)} u, R(\cdot - x))_{\mathcal{H}}| \\
 &= |(u, P_{\partial \mathcal{H}(D)} R(\cdot - x))_{\mathcal{H}}| \\
 &\leq \|P_{\partial \mathcal{H}(D)} R(\cdot - x)\|_{\mathcal{H}} \|u\|_{\mathcal{H}}
 \end{aligned}$$

より明らかである。

②: $\varphi \in \mathcal{D}_M$, $\text{supp } \varphi \cap \partial D = \emptyset$ とする。 ∂D は compact であるから $\exists \varepsilon > 0$, $\text{supp } \varphi \cap \partial D_\varepsilon = \emptyset$ (すなわち ∂D_ε は ∂D の ε -近傍を表わす) である。 $R(\cdot, x): x \in \partial D_\varepsilon$ に対しては

$$(\varphi, R(\cdot, x))_{\mathcal{H}} = \varphi(x) = 0$$

よって $\varphi \in \mathcal{H}(\partial D_\varepsilon)^\perp$ となる。 $\partial \mathcal{H}(D) \subset \mathcal{H}(\partial D_\varepsilon)$ であるから $\varphi \in (\partial \mathcal{H}(D))^\perp$

$$\text{すなわち } H_{\partial D}(x, \varphi) = (P_{\partial \mathcal{H}(D)} \varphi)(x) \equiv 0$$

と示すことができる。

「証明終り」

§2 Process X の Prediction を時間 t で考えるとき、次のようにする。

「 $\mathcal{H}_+(D)$ の元 u に 1 番近い $\mathcal{H}_-(D)$ の元 v は何か。」

明らかで、 $v = P_{\mathcal{H}_-(D)} u$ であるが、ここでは v が u からどのくらい離れているかを作用素 $P(t)$ ($P = A^{-1}$) でみよ。

Prop. 8

$u \in \mathcal{H}_+(D)$ に対して $v = P_{\mathcal{H}_-(D)} u$ とすると

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} v = u & \text{on } D \cup \overline{D} \\ P(t)v = 0 & \text{on } D^c \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad v(x) = H_{\partial D}(x, u) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

「証明」① $x \in D$ に対しては

$$\begin{aligned} v(x) &= (P_{\partial D}(u))(x) \\ &= (P_{\partial D}(u), R(\cdot - x))_{\partial D} \\ &= (u, P_{\partial D}(R(\cdot - x)))_{\partial D} \\ &= (u, R(\cdot - x))_{\partial D} \quad (\because R(\cdot - x) \in \mathcal{H}_-(D)) \\ &= u(x) \end{aligned}$$

とわかるから①は示された。

②は X が 214 の性質をもつから Lem. 2 より $P_{\partial D}(\mathcal{H}_+(D)) = \partial \mathcal{H}(D)$ とわかる。だから $u \in \mathcal{H}_+(D)$ に対しては $v(x) = (P_{\partial D}(u))(x)$
 $(= (P_{\partial D}(u))(x)) = H_{\partial D}(x, u)$ である。 「証明終り」

$\mathcal{H}_-(D) = \mathcal{H}(D)$ と仮定するときは Proposition 8 により v は境界条件が u である D の外部で P -harmonic な $\mathcal{H}$ の元として一意に定まることがあり、harmonic measure に相当するものが $H_{\partial D}(x, \cdot)$ である。とくに $P(\partial D)$ が (有限階) の微分作用素のときは境界条件としてどのようなものをおけば、この境界値問題が well-posed になるかということに興味があることであるが、それは③より $H_{\partial D}(x, \cdot)$ の形と関係してゐる。

定理 5 より $\partial \mathcal{H}(D)$ は基底 $J_{\partial D}$ をもっているが次は $H_{\partial D}$

20

と $J_{\partial D}$ で表わすことを考えよう。

Zh. 9

$$H_{\partial D}(x, \cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda \cdot x} \widehat{J_{\partial D}^\lambda} \frac{1}{p(\lambda)} d\lambda$$

(積分は $\mathcal{H}'$ の弱積分。)

「証明」 $u \in \mathcal{H}$ に対し z , $u = \widehat{\frac{f}{p}}$ とすると

$$\begin{aligned} \langle \widehat{J_{\partial D}^\lambda}, u \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{J_{\partial D}^\lambda(x)} f(x) \frac{1}{p(x)} dx \\ &= (P_{\partial Z(D)} f)(\lambda) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} &\langle \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda \cdot x} \widehat{J_{\partial D}^\lambda} \frac{1}{p(\lambda)} d\lambda, u \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda \cdot x} (P_{\partial Z(D)} f)(\lambda) \frac{1}{p(\lambda)} d\lambda \\ &= (P_{\partial Z(D)} f, e^{i\cdot x})_Z \\ &= (P_{\partial \mathcal{H}(D)} u, R(\cdot, -x))_{\mathcal{H}} \\ &= (P_{\partial \mathcal{H}(D)} u)(x) \\ &= H_{\partial D}(x, u) \end{aligned}$$

となり Zh. 9 は示された。

「証明終り」

参考文献

- [1] S. Kotani, and Y. Okabe

On the Markovian property of stationary Gaussian processes with a multi-dimensional parameter.

数理解析研究所講究録.

- [2] S. Kotani

$\mathbb{R}^d$ -径教正規定常過程のマルコフ性について.

修士論文.

- [3] H. P. McKean, Jr

Brownian motion with a several dimensional time.

Theory of Prob. and its appli. 8 (1963)

- [4] M. C. Roumieu.

Sur quelques extensions de la notion de distribution.

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 3 série 77

- [5] H. Komatsu.

Ultradistributions and hyperfunctions.

数理解析研究所講究録.