

リーマン面の接続のある問題への擬等角写像の応用

東大 教養 及川廣太郎

1. S_0 をリーマン面とする。もし S_0 から、あるリーマン面 S の部分領域の上への等角写像 ψ が存在するとき、 (S, ψ) のことを S_0 の 接続 と言う。もし $\psi(S_0) \neq S$ ならば、接続は プロパー であるという。もし プロパー な接続がないならば、 S_0 は 極大リーマン面という。 S_0 の接続 (S, ψ) は、もし S が極大リーマン面ならば、 S_0 の 極大接続 と言う。任意の S_0 に対して、その極大接続が存在することが知られている[5]。

S_0 が "唯一つの" 極大接続を持つのは、どのような場合か、という問題を考えるのであるが、"唯一つ" という概念に異なったものがある。

S_0 の極大接続 (S_i, ψ_i) , $i=1, 2$, に対し、 $\psi_1(S_0)$ から $\psi_2(S_0)$ の上への等角写像 $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ が、もしつねに $S_1 \rightarrow S_2$ の位相写像に接続するとき、 S_0 の極大接続は topologically unique であるという。同様に、もしつねに $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ が $S_1 \rightarrow S_2$ の等角写像に接続するとき、 S_0 の極大接続は

conformally unique であるという。最後に、もし S_0 の極大接続 (S_i, γ_i) , $i=1, 2$ において、つねに S_1 と S_2 とが等角同値ならば、 S_0 の極大接続は unique であるという。この際、 S_1 から S_2 への等角写像は、 $\gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}$ とは無関係としてある。

わけわけは、これらのうち第3の場合を問題にする。 S_0 の極大接続が unique であるための必要十分条件を求め。

2. この種の問題のはいまりは、筆者の知る限りでは、つぎの Nevanlinna による "Eindeutigkeitssatz" である ([10]) : 平面領域 S_0 に対して、そこからリーマン球 $\mathbb{P}$ の部分領域の上への等角写像 ϕ 、つねに $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ の等角写像 (つまり一次変換) に拡張できるための必要十分条件は、 S_0 が class OAD に属すること (つまり、Dirichlet 積分が有限であるような非定数の正則関数は存在しないこと) である。

この結果は、後述の Heins の定理を参照するならば、つぎのものと同値である : 平面領域 S_0 の極大接続が conformally unique であるための必要十分条件は、 $S_0 \in OAD$ である。

表 [9] は、これを、次のところまで拡張する : 種数

有限な S_0 の極大接続が conformally unique であるための必要十分条件は, $S_0 \in OAD$ である。

一般の種数に対しては, S_0 が class OAD であるという条件は, かなり様子が異なってくる。今扱っている問題に因しては, つぎのような条件を考えよう。与えられたリーマン面 S_0 が 条件 A をみたすとは, S_0 の任意の regularly imbedded subregion Ω は, もしくはその relative boundary $\partial\Omega$ がコンパクトであるか, 或いはその $\partial\Omega$ に因する double $\hat{\Omega}$ が planar ならば, $\hat{\Omega}$ は class OAD に属する。(S_0 の種数が有限ならば, $S_0 \in OAD$ と条件 A とは同値である)。

この言葉を用いると, 次の定理が得られる: リーマン面 S_0 の極大接続が conformally unique であるための必要十分条件は, S_0 が条件 A をみたすことである。 これは Jurchescu [8] によるものである; たいし, このまゝの形であるわけではなく, この論文中の二・三の定理を組みあわせると Corollary 16 が, ちょうどこれに相当する。

平面領域 S_0 が OAD に入るための特徴づけとして, S_0 から $\mathbb{P}$ の部分領域の上への任意の等角写像に対して, $\mathbb{P} - f(S_0)$ の 2次元測度 $m(\mathbb{P} - f(S_0))$ が 0 であるということがある (Ahlfors-Bearling [3]). このこと

の一般化は、誰か最初に述べたことか、はつきり（たしか、
 Renggli [14] には 定理 2 として述べられていた：
リーマン面 S_0 の極大接続が conformally unique
であるための必要十分条件は、任意の極大接続 (S, γ)
に対して $m(S - \gamma(S_0)) = 0$ が成り立つことである。

3. つぎに、topologically unique であるか、
 馴れた読者なら、こゝまで読んだところで、OAD の代りに
 $OSD (= OSB)$ をとればよいということに気がつくこと
 と思う。したがって、次の定理は Jurchescu [8] の定理
 2/ である：
リーマン面 S_0 の極大接続が topologically
unique であるための必要十分条件は、任意の regular-
ly imbedded subregion Ω で、 2Ω に属する
double $\hat{\Omega}$ が planar なものは、つねに $\in OSD$
であることである。

S_0 の種数が有限に与えられ、この条件はもっと簡単に
 述べることが出来る。たとえば、リーマン面から NSD
 class のコンパクト集合を除いたもの、といったもので、
 まづは S_0 の ideal boundary component はすべて
 weak である、といったもの (Sario-Oikawa [17])。

4. 以上の topological uniqueness, conformal uniqueness は, 字像の接続, 1111 以外は特異点の除去可能性の問題であつたが, たいの uniqueness は様子か異なり. 勿論, conformally unique $\Rightarrow$ unique であるが, 内証は逆の証明である.

この種の問題の出発は, つきの Heins [6] による定理である: 平面領域 S_0 が, 種数 > 0 のリーマン面の部分領域と等角同値であるための必要十分条件は, S_0 が有界単葉正則関数を持たないことである. これには, Jenkins [7], Rochberg [16] による別証もある.

この結果を一寸変形すると, つきのようになる:

定理 1 (Heins) 平面領域 S_0 の極大接続が unique であるための必要十分条件は, $S_0 \in \text{OSD}$ である.

1960年, 筆者はつきのことを証明した [12]:

定理 2. 種数 $\infty > 0$ で $< \infty$ であるようなリーマン面 S_0 の極大接続が unique であるための必要十分条件は, $S_0 \in \text{OAD}$ である.

こゝでは, これを拡張した次の定理を証明する:

定理 3. 種数が > 0 (つまり planar でない) リーマン面 S_0 の極大接続が unique であるための必要十分条件は, S_0 が条件 A をみたすことである.

5. 定理 2 と 3 にあって, 十分性は, conformally unique に因る条件からすぐ証明できる.

必要性を証明するためには, 次のように考える. いま S_0 が条件 A をみたさなかつたとする. その極大接続は conformally unique ではないから, 2° の最後で述べた命題によつて, つぎのような極大接続 (S, γ) が存在する: $m(S - \gamma(S_0)) > 0$. コンパクト集合 $E \subset S - \gamma(S_0)$ と, そんな小さくて γ からは, $mE > 0$ であるように選ぶと, この部分のみで S の解析構造をみえ. 即ち, support が E に含まれるような, S 上の Beltrami 微分 $\mu d\bar{z}dz^{-1}$ によるリーマン面 S^μ を考えよう; ここで S^μ は, 位相空間としては S と同じものであるが, 恒等写像 τ は μ -等角写像となつていゝものである (Bers [4]). さて, τ は $S - \gamma(S_0)$ には

等角であるから $(S^\mu, 2.4)$ は S_0 の接続である。擬等角写像は極大性を保存する ([11]) から、これは S_0 の極大接続である。従って、もし S^μ が S と等角同値でない (ような μ が存在する) ならば、 S_0 の極大接続は unique であることとなつて、定理 2, 3 の証明が完了することになる。

よって、定理 2 と 3 の証明は、次の定理に含まれる (S が 位数 > 0 で極大なら、定理 4 の仮定をみたら)：

定理 4. リーマン面 S は、リーマン球から n ($0 \leq n \leq 3$) 個の点を除いたもの、半直円板から m ($0 \leq m \leq 1$) 個の点を除いたものからなるものとするとき、 $mE > 0$ であるような任意のコンパクト集合 E に対し、

$$\|\mu\|_\infty < 1, \quad \text{supp } \mu \subset E$$

であるような S 上の Beltrami 微分 μ をとり、 S^μ が S と等角同値であるようにすること ができる。

6. 定理 2 を証明するとき、定理 4 を、 S が 位数 > 0 の閉リーマン面について証明すればよい。このときは、 S 中の Teichmüller 空間を考え、 $\text{supp } \mu \subset E$

であるような S^μ の全体は, S を内点に含むことを示せる. Teichmüller 空間において, moduli 空間上の各ファイバーは discrete な集合であるので, 以上によつてこの場合の定理 4 の証明が終る (以上 [12] の方法).

ところが, このやり方は, 一般の S に対しては通用しないのである. 何故ならば, 一般には, $\text{supp } \mu \subset E$ であるような S^μ のみでは, S の近傍を埋め得ない のである. 反例はつぎのとおりである (若林功, 谷口雅彦両氏による).

反例 1. $S = \mathbb{C} - \{1, 2, \dots\}$, $S_\varepsilon = \mathbb{C} - \{1+i\varepsilon, 2, 3, \dots\}$ とす. ε が近くと S_ε は (Teichmüller 距離で測って) S の近くにある. にもかゝらず, $S \rightarrow S_\varepsilon$ の擬等角写像は, あるコンパクト集合を除いて等写であるものは, 存在しない; $1+i\varepsilon$ に対応する点がありえないことを示せるのである.

反例 2. 上記の S を 2 枚用意して, 分岐点 2 つつゝを切り込みで結ぶ, これらに沿って 2 枚を貼りあわせ. それを $\hat{S}$ とすると, S_ε から同様に作った $\hat{S}_\varepsilon$ に因りて, 上と同様なことはいえる. つまり, $\hat{S}$ の近傍は, $\text{supp } \mu$ がコンパクトな集合を含むていよな $\hat{S}^\mu$ では埋め得ない. なお, この $\hat{S}$ は 極大リーマン面である (Radó [13]).

7. 筆者は、はいめ、一般の場合の定理4も、6°のはいめの
 の方で述べたような方法を証明しようとしたのであるが、
 反例が出るに及んで、あきらめざるを得なかった。

その内、1975, Renggli [15] が定理3の証明を
 与えた。彼の方法は conformal sewing というものを
 用いたものである。

彼の証明をよむうちに、つぎのことに気がつく。すなわ
 ち、定理4は次の定理に含まれる：

定理5. S と E とは、定理4と同じものとするとき、
 S 中の Teichmüller 空間 $T(S)$ 上の連続関数
 Φ と、 $\text{supp } \nu \subset E$ であるような S 上の Beltrami
 微分 $\nu d\bar{z} dz'$ で、条件

(i) $T(S)$ の moduli 空間の S の上の fiber
 における Φ の値域は、可算集合

(ii) $\frac{d}{dt} \Phi(\langle S^{t\nu}, \nu \rangle) \Big|_{t=0}$ は存在して $\neq 0$.

をみたすものが存在する。

この定理から定理4を導くことは、つぎのように、容易であ
 る。即ち、曲線 $t \in [0, t_0] \mapsto \langle S^{t\nu}, \nu \rangle \in T(S)$,

たいてい $0 < t_0 = 1/\|v\|_\infty$, の上で Φ の値域は区間,
 よってこの曲線は S 上の fiber に含まれてしまうわ
 けにはない。従って, ある $t \in (0, t_0]$ に対して
 S^{tv} は S と等角同型にならない。この tv が, 定理4の
 μ である。

さて, 定理5の証明であるが, Φ として, はいぬは周期
 微分の1/L4 などを考えていたが, つぎに示すように, 甚だ簡
 単なものでよいことがわかった。

8. 定理5の証明. S が torus の場合だけ, 別にや
 るなければならない。これは, 下記のものに直接的に移す
 のであるが, ぐわしくは読者にゆかせる。

それ以外の場合の S は, 上半平面 H_+ の non-elementary
 な Fuchs 群 Γ で, 楕円的変換を含まないもの, によって,
 $S = H_+/\Gamma$ とあらわすことができる。一般性を失うこ
 となく, $0 < \infty$ は, u と v の双曲的変換 $\gamma_0 \in \Gamma$ の
 不動点 (すなわち, repelling と attracting な), 1 は
 u と v の双曲的変換 $\gamma_1 \in \Gamma$ の repelling な不動点と
 仮定してよい。 γ_1 の attracting な不動点を a とおく。

S 中の Teichmüller 空間の代りに, Γ 中の Teich-
 müller 空間 $T(\Gamma)$ を考える。それは, $H_+ \rightarrow H_+$ の

擬等角変換 f で, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(\infty)=\infty$, さらに $\forall \gamma \in \Gamma$ に対して $f \circ \gamma \circ f^{-1}$ が 1 次写像となつていふものを通じてからなる空間を, $\mathbb{R}$ で一致するものの同値を同値とする関係によつて, 類別して得らるゝものがある. 同値類を $\langle f \rangle$ とあらわす. 図形

$$\Phi : \langle f \rangle \mapsto f(a)$$

は $T(\Gamma)$ の定数である (実数値) 連続関数である.

H_+/Γ と $H_+/f\Gamma f^{-1}$ とが等角同型であるような f の $\langle f \rangle$ の全体を $\mathcal{F}_\Gamma$ とあらわす (moduli 空間上の fiber である). $f \in \langle f \rangle \in T(S)$ に対し $\langle f \rangle \in \mathcal{F}_\Gamma$ であるための必要十分条件は, 適当な 1 次写像 l によつて $f\Gamma f^{-1} = l\Gamma l^{-1}$ が成り立つことである. 従つて, $(l^{-1}f\gamma_0 f^{-1}l, l^{-1}f\gamma_1 f^{-1}l) \in \Gamma \times \Gamma$ が得られる. この事は, $\langle f \rangle$ からの f のとり直しによらずに, たいし l のえらぬ $\bar{l}$ によつて成る. いま, $\langle f_1 \rangle, \langle f_2 \rangle \in \mathcal{F}_\Gamma$ に対して, それぞれ適当に l_1, l_2 をとつて得られる, 上記の事は一致しなくてはならない: $l_1^{-1}f_1\gamma_i f_1^{-1}l_1 = l_2^{-1}f_2\gamma_i f_2^{-1}l_2$, $i=0,1$. ちよつと, γ_0, γ_1 の不動点 $0, 1, \infty$ をしらぬことによつて, $l_1 = l_2$ を得, 従つて $f_1(a) = f_2(a)$ を得る. よつて, 図形 Φ の $\mathcal{F}_\Gamma$ での値域は, $\Gamma \times \Gamma$ の濃度, つまり可算, をとる.

$$\Phi(\langle f^{tv} \rangle) = f^{tv}(a) \quad \text{これについては, Ahlfors - Bers [2]}$$

によって示されておもしろい

$$\left. \frac{d}{dt} f^{tv}(a) \right|_{t=0} = \frac{-a(a-1)}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{V(z) dx dy}{z(z-1)(z-a)}$$

である; $z \mapsto V(z)$ は 有界可測関数で, $V(\bar{z}) = \overline{V(z)}$,

$$\forall \gamma \in H_+ \quad \gamma \text{ は } V(\gamma(z)) \overline{\gamma'(z)} \gamma'(z)^{-1} = V(z) \quad \text{を } \gamma$$

$\in \Gamma$ に対してみたときのとき。

S に与えられた $E \subseteq H^+$ の Γ の基本領域内にもちあがり,
 $z \mapsto V(z) = 1 / \bar{z}(\bar{z}-1)(\bar{z}-a)$ とおく。次に $\Gamma(E)$,
 およびその下の平面への鏡像へは, 上述の関係式が
 成り立つように拡張し, $\mathbb{C}$ のそれ以外の部分では 0 とおくと,
 これは S 上の Beltrami 微分とみて $\text{supp } V \subset E$
 であり, (しかも, 上式の右辺を 0 にする)。つまり, この
 ようにして求めた μ と V から, 定理 5 を要求されたもので
 ある。(証明終)

文献

- [1] Ahlfors, L. V. Lectures on Quasiconformal Mappings. D. Van Nostrand Co., Inc., 1966.

- [2] Ahlfors, L. V. and Bers, L. Riemann's mapping theorem for variable metrics. *Ann. Math.* 72 (1960), 385-404.
- [3] Ahlfors, L. A. and Beurling, A. Conformal invariants and function-theoretic null-sets. *Acta Math.* 83 (1950), 101-129.
- [4] Bers, L. Spaces of Riemann surfaces. *Proc. Math. Congr. Edinburgh*, 1958, pp. 349-367.
- [5] Bochner, S. Fortsetzung Riemannscher Flächen. *Math. Ann.* 98 (1928), 406-421.
- [6] Heins, M. A problem concerning the continuation of Riemann surfaces. *Contribution to the Theory of Riemann Surfaces*. Princeton Univ. Press, 1953, pp. 55-62.
- [7] Jenkins, James A. On a result of M. Heins. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) 19 (1974/75), 371-373.
- [8] Jurchescu, M. Bordered Riemann surfaces. *Math. Ann.* 143 (1961), 264-292.
- [9] Mori, A. A remark on the prolongation of Riemann surfaces of finite genus. *J. Math. Soc. Japan* 4 (1952), 198-209.
- [10] Nevanlinna, R. Eindeutigkeitsfragen in der Theorie der konformen Abbildung. *Comptes Rendus* 10, Congr. Scand., 1946.

- [11] Oikawa, K. Some properties of quasi-conformal mappings.
Sūgaku 9 (1957/58), 13-14. Japanese.
- [12] ---"--- On the uniqueness of the prolongation of an open
Riemann surface of finite genus. Proc. Amer. Math.
Soc. 11 (1960), 785-787.
- [13] Radó, T. Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannig-
faltigkeit. Math. Z. 20 (1924), 1-6.
- [14] Renggli, H. On removable sets for conformal mappings. Ann.
Math. 176 (1968), 517-323.
- [15] ---"--- Structural instability and extensions of Riemann
surfaces. Duke Math. J. 42 (1975), 211 - 224.
- [16] Rochberg, Richard. Continuation of Riemann surfaces. Proc.
Amer. Math. Soc. 48 (1975), 82 - 84.
- [17] Sario, L. and Oikawa, K. Capacity Functions. Springer
Verlag. 1969.